[P] PatterN DriLL

수능 빈출 유형 분석

삼각형의 분석

5A ACADEMY

SOOHAN

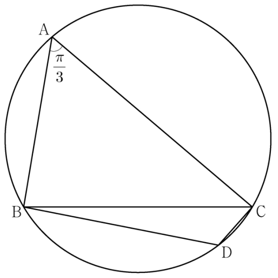
[사인법칙]

▷ 각이 두 개(세 개) 주어지면 사인법칙을 때린다.
 : ASA에서 삼각형을 결정해주는 공식이다.
※ 미적분의 삼각함수의 덧셈정리를 쓸 수 있냐 없냐에
 따라 활용도가 달라진다. 안다면 쓰자.

▷ 외접원이 뜨면 사인법칙을 때린다. 거의 무조건.

001. [2022학년도 9월 12번]

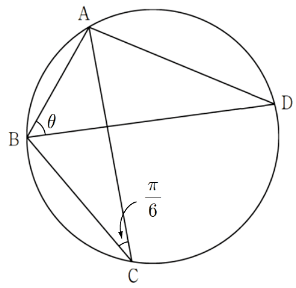
반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은?[1)]



① $\frac{19}{2}$　② 10　③ $\frac{21}{2}$　④ 11　⑤ $\frac{23}{2}$

002. [한성은 YY1379번]

그림과 같이 한 원 위에 네 점 A, B, C, D가 있다. $\overline{AB}=5$, $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$이고 $\angle ABD = \theta$일 때, $\cos\theta = \frac{3}{5}$이다. $\overline{AD}$의 값은?[2)]



① 6　② $\frac{20}{3}$　③ $\frac{22}{3}$　④ 8　⑤ $\frac{26}{3}$

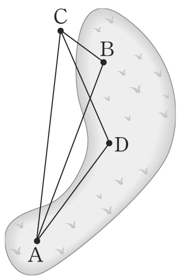
[코사인법칙(길이)]

▷ 각이 한 개 주어지면 코사인법칙을 때린다.
: SAS에서 삼각형을 결정해주는 공식이다.

※ 주어진 조건이 SSA인 경우에는
나머지 한 변의 길이에 대한 이차식이 뜬다.

003. [2004학년도 9월 20번]

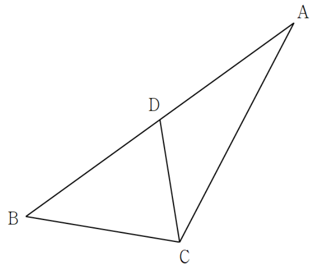
A지점에서 공을 치기 시작하여 B지점에 이르게 하는 골프 경기가 있다. 한 방송사에서 이 골프 경기를 중계방송하기 위하여 출발점인 A지점과 $\overline{AC}=240\text{m}$, $\overline{BC}=60\text{m}$인 C지점에 각각 카메라를 설치하였다. 한 선수가 A지점에서 친 공이 D지점에 떨어졌을 때, A지점과 C지점에서 바라본 각이 $\angle CAD=\angle ACD=30^\circ$이었다. $\angle BCD=30^\circ$일 때 D지점에서 B지점까지의 직선거리는?3)



① $18\sqrt{21}\,\text{m}$ ② $20\sqrt{21}\,\text{m}$ ③ $22\sqrt{21}\,\text{m}$
④ $24\sqrt{21}\,\text{m}$ ⑤ $26\sqrt{21}\,\text{m}$

004. [한성은 NS4647번]

그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB의 중점을 D이라 할 때, $\overline{CD}=\sqrt{5}$이다. $\overline{BC}$의 값은?4)



① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

[코사인법칙(각)]

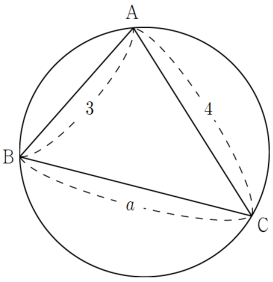
▷ 삼각형의 세 변의 길이에서 각을 구할 수 있다.
: SSS에서 삼각형을 결정해주는 공식이다.

005. [2006년 고2 3월 19번]

그림과 같이

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=4$

인 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다. 이 원의 반지름의 길이를 R라 할 때, 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은?[5)]

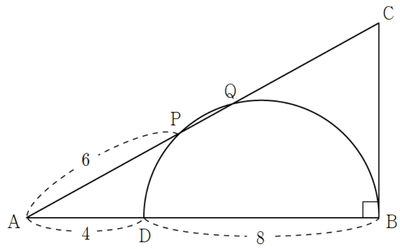


ㄱ. $a=5$이면 $R=\frac{5}{2}$이다.
ㄴ. $R=4$이면 $a=8\sin A$이다.
ㄷ. $1<a\leq\sqrt{13}$일 때, $\angle A$의 최댓값은 $60°$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

006. [한성은 WI5130번]

그림과 같이 $\overline{AB}=12$, $\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC와 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 D에 대하여 선분 BD를 지름으로 하는 반원이 선분 AC와 두 점 P, Q에서 만난다. $\overline{AP}=6$일 때, $\overline{CQ}$의 값은?[6)] (단, $\overline{AP}<\overline{AQ}$이다.)



① $\frac{40}{7}$ ② 6 ③ $\frac{44}{7}$
④ $\frac{46}{7}$ ⑤ $\frac{48}{7}$

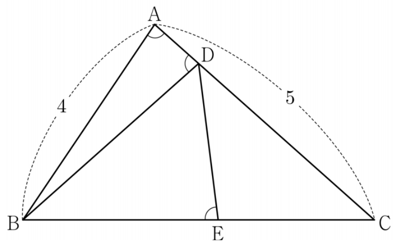
[수선과 삼각형의 결정]

▷ 사인법칙과 코사인법칙은 (외접원 반지름의 길이 관련만 제외하면) 적당한 수선을 한 번 내리는 것으로 설명된다. 가능하면 양쪽으로 풀어보자.

▷ 삼각형은 (대체로) 세 개의 정보에 의해서 결정된다. 삼각형에 대한 정보가 '세 개'인지를 째려보자.

007. [2022학년도 6월 12번]

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여 $\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$일 때, 선분 DE의 길이는?7)

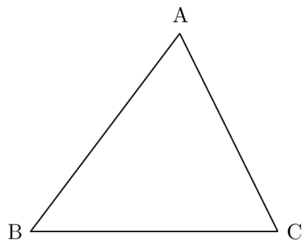


① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

008. [한성은 RI4182번]

예각삼각형 ABC에서 $\tan(\angle B)=\frac{4}{3}$, $\tan(\angle C)=2$, $\overline{BC}=5$이다. 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.8)



[삼각형의 넓이]

▷ 삼각형의 넓이 : 대충 아래 식 정도는 익혀 놓자.

① 밑변과 높이 : $S=\frac{1}{2}ah$

② 끼인각 : $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

③ 내접원의 반지름의 길이 : $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

④ 좌표평면의 세 꼭짓점 : $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & c & e & a \\ b & d & f & b \end{vmatrix}$

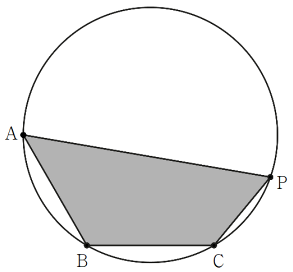
⑤ 헤론의 공식 : (있다는 것만)

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \left(s=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

⑥ 외접원의 반지름이 길이 : $S=\frac{abc}{4R}$ (쓰레기)

009. [2019년 고2 9월 19번]

반지름의 길이가 3인 원의 둘레를 6등분하는 점 중에서 연속된 세 개의 점을 각각 A, B, C라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{CP}=8$이다. 사각형 ABCP의 넓이는?[9)]

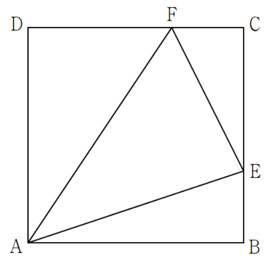


① $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{19\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$

010. [한성은 BG5924번]

한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD에 대하여 선분 BC를 1:2로 내분하는 점을 E, 선분 CD를 1:2로 내분하는 점을 F라 하자. 삼각형 AEF의 넓이는?[10)]



① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[원과 보조선]

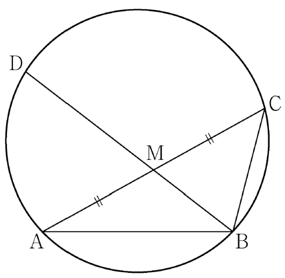
▷ 원이 뜨면 원 위의 점은 중심과 연결.

▷ 부채꼴, 원주각과 중심각, 접선과 현이 이루는 각, 원에 내접하는 사각형 등 중학교 원 관련 내용 학습

▷ 방멱(할선정리)

011. [2023학년도 6월 10번]

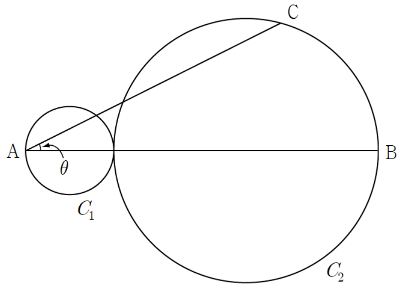
그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는?[11)]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

012. [한성은 IW8762번]

그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1, 3인 두 원 C_1, C_2가 서로 외접하고 있다. 원 C_1 위의 점 A, 원 C_2 위의 점 B는 $\overline{AB}=8$를 만족시키고, 원 C_2 위의 점 C에 대하여 $\angle CAB=\theta$일 때, $\tan\theta=\frac{1}{2}$이다. 선분 CA의 길이는?[12)] (단, $\overline{CA}>4$이다.)



① 5 ② 6 ③ 7
④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $2\sqrt{5}+2$

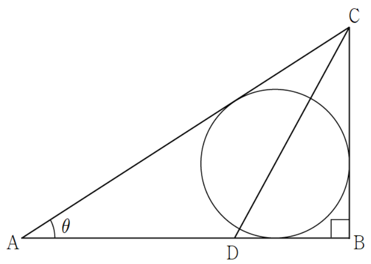
[삼각형의 내접원]

▷ 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$이 강력하다.

▷ 내심이 각의 이등분선 위에 있음 가끔 사용

013. [한성은 SM7746번]

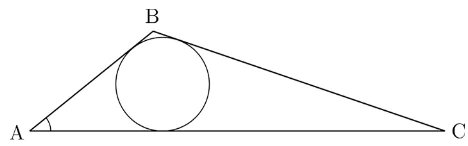
$\overline{AB}=1$, $\angle CAB=\theta$, $\angle CBA=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 C와 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 지나는 직선이 직선 AB와 만나는 점을 D라 하자. 다음 중 선분 BD의 길이를 나타내는 것은?13)



① $\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$ ② $\frac{1}{1+\cos\theta}$ ③ $\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$
④ $\frac{1}{1+\sin\theta}$ ⑤ $\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

014. [한성은 VL7904번]

넓이가 6인 삼각형 ABC는 $\cos(\angle A)=\frac{4}{5}$, $\overline{BC}=2\sqrt{7}$를 만족시킨다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이는?14)



① $\frac{6-\sqrt{7}}{3}$ ② $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$ ③ $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$
④ $\frac{8-2\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $\frac{7-2\sqrt{7}}{3}$

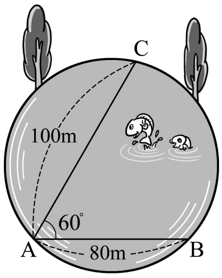
[연습문제]

015. [2008년 고2 3월 21번]

원 모양의 호수의 넓이를 구하기 위해 호수의 가장자리의 세 지점 A, B, C에서 거리와 각을 측정한 결과가 다음과 같았다.

$\overline{AB}=80\text{m}$, $\overline{AC}=100\text{m}$, $\angle CAB=60^\circ$

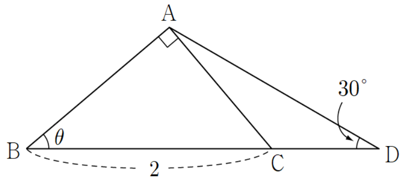
이때 이 호수의 넓이는?15)



① $2400\pi\text{m}^2$ ② $2500\pi\text{m}^2$ ③ $2600\pi\text{m}^2$
④ $2700\pi\text{m}^2$ ⑤ $2800\pi\text{m}^2$

016. [한성은 QE0459번]

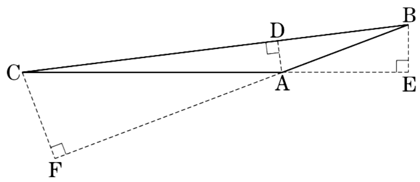
그림과 같이 $\overline{BC}=2$, $\angle BAC=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 선분 BC의 연장선 위에 $\angle ADC=30^\circ$가 되도록 점 D를 잡는다. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 다음 중 선분 AD의 길이를 나타내는 것은?16) (단, $\theta<60^\circ$이고 $\overline{BD}>\overline{CD}$이다.)



① $2\tan\theta$ ② $4\tan\theta$ ③ $\dfrac{4}{\cos\theta}$
④ $2\sin\theta\cos\theta$ ⑤ $4\sin\theta\cos\theta$

017. [2014년 고2 3월(B형) 19번]

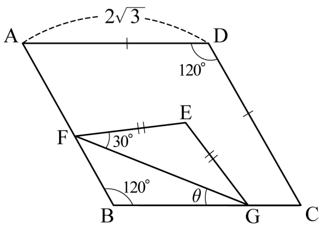
그림과 같이 $A>90^\circ$인 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C에서 세 직선 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{AD}:\overline{BE}:\overline{CF}=2:3:4$일 때, 삼각형 ABC에서 $\cos C$의 값은?17)



① $\dfrac{5}{6}$ ② $\dfrac{41}{48}$ ③ $\dfrac{7}{8}$
④ $\dfrac{43}{48}$ ⑤ $\dfrac{11}{12}$

018. [2010년 고2 3월 13번]

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$이고 $\angle B = 120^\circ$인 마름모 ABCD의 내부에 $\overline{EF} = \overline{EG} = 2$이고 $\angle EFG = 30^\circ$인 이등변삼각형 EFG가 있다. 점 F는 선분 AB 위에, 점 G는 선분 BC위에 있도록 삼각형 EFG를 움직일 때, $\angle BGF = \theta$라 하자. 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?18) (단, $0^\circ < \theta < 60^\circ$)

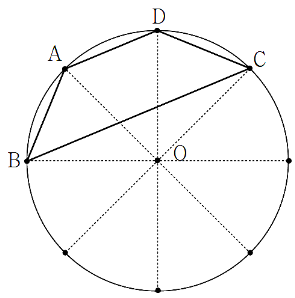


ㄱ. $\angle BFE = 90^\circ - \theta$
ㄴ. $\overline{BF} = 4\sin\theta$
ㄷ. 선분 BE의 길이는 항상 일정하다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

019. [2012년 고2 3월 20번]

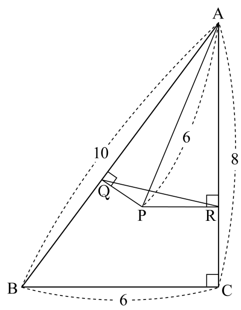
그림과 같이 중심이 O이고 반지름이 1인 원에 내접하는 사각형 ABCD의 꼭짓점이 원둘레를 8등분한 점에 위치하고 있다. 사각형 ABCD의 넓이는?19)



① $\sqrt{2}-1$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{3}{4}\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{2}$

020. [2009년 고2 3월 19번]

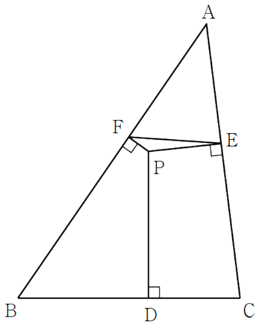
그림과 같이 $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CA} = 8$인 삼각형 ABC와 그 삼각형의 내부에 $\overline{AP} = 6$인 점 P가 있다. 점 P에서 변 AB와 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 선분 QR의 길이는?20)



① $\frac{14}{5}$　② 3　③ $\frac{16}{5}$
④ $\frac{17}{5}$　⑤ $\frac{18}{5}$

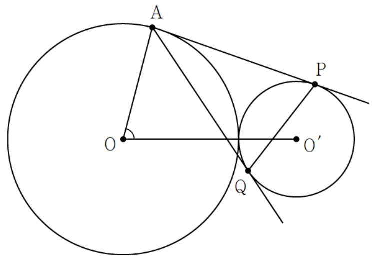
021. [2012년 고2 3월 30번]

그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$인 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 한다. $\overline{PD}=\sqrt{7}$, $\overline{PE}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$일 때, 삼각형 EFP의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.21) (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



022. [한성은 XL9688번]

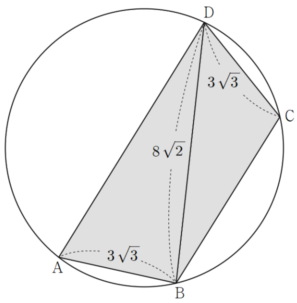
그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심이 O인 원 O와 반지름의 길이가 1이고 중심이 O′인 원 O'이 외접하고 있다. $\cos(\angle AOO')=\dfrac{1}{4}$를 만족시키는 원 O 위의 점 A에서 원 O'에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}$의 값은?22)



① $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　② $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$　③ $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$　④ $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$　⑤ $\sqrt{10}$

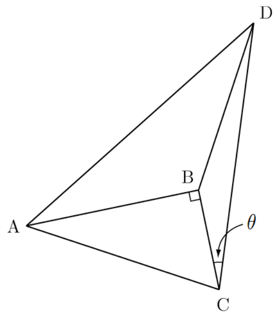
023. [2019년 고2 11월 28번]

그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=\overline{CD}=3\sqrt{3}$, $\overline{BD}=8\sqrt{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하자. $\frac{S^2}{13}$의 값을 구하여라.23)



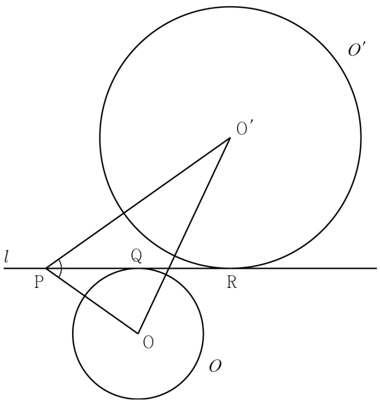
024. [한성은 SM0927번]

그림과 같이 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고, 점 D는 $\overline{BD}=2\sqrt{3}$, $\tan(\angle BCD)=\frac{\sqrt{3}}{5}$를 만족시킨다. $\overline{AD}$의 값을 구하여라.24) (단, $\angle ACD>\frac{\pi}{3}$이다.)



025. [한성은 NA6066번]

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 O와 중심이 O′이고 반지름의 길이가 2인 원 O'이 직선 l에 접한다. 직선 l과 두 원 O, O'의 접점을 각각 Q, R이라 하면, 직선 l 위의 점 P는 $\overline{PQ}=\overline{QR}$이고 R이 아닌 점이다. $\cos(\angle OPO')=\frac{1}{3}$일 때, 삼각형 OPO′의 넓이는?[25]



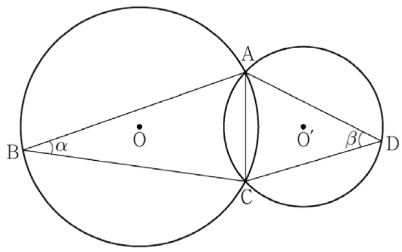
① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

026. [수능 예시문항 21번]

그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle ABC=\alpha$, $\angle ADC=\beta$라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\ \overline{OO'}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.[26] (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



1) ②
2) ④
3) ②
4) ②
5) ⑤
6) ①

선분 BD의 중점을 O라 할 때, 삼각형 AOP에서 코사인 때리면 $\cos(\angle \mathrm{PAO}) = \frac{7}{8}$이다.

O에서 선분 PQ에 수선 내리고 째려보면 $\overline{\mathrm{PQ}}=2$이다. 또 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{96}{7}$이다.

※ 사실 방멱에 의해 $\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}$이다. 최대한 안 보이게 해봤는데..

7) ③
8) 10

$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$에서 $\sqrt{5}b=2c$이다. 코사인 법칙에서 $b^2=c^2+25-6c$, $c^2=b^2+25-2\sqrt{5}b$이다.

세 식을 연립하면 $b=2\sqrt{5}$, $c=5$이고 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times5\times5\times\frac{4}{5}$이다.

9) ②
10) ③
11) ③
12) ⑤
13) ⑤
14) ②

넓이 $\frac{1}{2}bc\sin(\angle \mathrm{A})$에서 $bc=20$, 코사인에서 $28=b^2+c^2-2bc\cos(\angle \mathrm{A})$에서 $b^2+c^2=60$이다. 연립하면 $b+c=10$이다.

내접원의 반지름의 길이 r에 대하여 $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$이므로 $r=\frac{5-\sqrt{7}}{3}$이다.

15) ⑤
16) ⑤
17) ④
18) ⑤
19) ②
20) ⑤
21) 103

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{15\sqrt{7}}{4}$이다. $\overline{\mathrm{PF}}=x$라 하면 $\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}\left(6x+4\sqrt{7}+\frac{5\sqrt{7}}{2}\right)$에서 $x=\frac{\sqrt{7}}{6}$.

구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{6}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\sin(\pi-A)$

22) ③
23) 192
24) 6

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하자. 삼각형 BCD에서 $(2\sqrt{3})^2=2^2+x^2-4x\cos\theta$이다. $\rightarrow$ $x=2\sqrt{7}$.

삼각형 BCD에서 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{7}}{\sin(\angle \mathrm{CBD})}$이다. $\rightarrow$ $\angle \mathrm{CBD}=\frac{5}{6}\pi$.

$\angle \mathrm{ABD}=\frac{2}{3}\pi$이고 삼각형 ABD에서 $\overline{\mathrm{AD}}=6$이다.

25) ②

$\overline{\mathrm{PQ}}=a$라 하자. $\overline{\mathrm{PO}}=\sqrt{a^2+1}$, $\overline{\mathrm{PO'}}=2\sqrt{a^2+1}$, $\overline{\mathrm{OO'}}=\sqrt{a^2+9}$이다.

삼각형 OPO′에서 코사인 법칙 치면 $a=\sqrt{2}$이다.

26) 26