[P]

PatterN DriLL

수능 빈출 유형 분석

적분의 연산

5A ACADEMY

SOOHAN

[치환적분]

▷ $\int g(f(x))f'(x)dx$의 꼴.
$f'(x)$가 보이면 때는 치환적분각이 선다.

001. [2010학년도 9월 28번]

함수 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}dt$에 대하여 상수 a가 $f(a)=\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx$의 값은?[1)]

① $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$ ② $\sqrt{e}-1$ ③ 1
④ $\frac{\sqrt{e}+1}{2}$ ⑤ $\sqrt{e}+1$

002. [2013학년도 수능 12번]

연속함수 $f(x)$가 $f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)dt$를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)dx$의 값은?[2)]

① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$
④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

003. [2018학년도 수능 15번]

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

일 때, $(f \circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은?[3)]

① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$
④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

[치환과 변수관계]

▷ $f(\star)$이 보일 때 ★을 치환해보자.
변수/상수 헷갈리지 않도록 주의.

004. [2011학년도 9월 28번]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가
모든 실수 t에 대하여 $\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$을 만족시킬 때,
$f(2)$의 값은?4)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

005. [2014학년도 6월 27번]

함수 $f(x) = \frac{1}{1+x}$에 대하여

$$F(x) = \int_0^x tf(x-t)dt \quad (x \geq 0)$$

일 때, $F'(a) = \ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.5)

[함수식의 치환]

▷ $f'(x)$가 곱해져 있으면.

006. [2017학년도 수능 21번]

닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)dx = 2,\ \int_0^1 |f(x)|dx = 2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|dt \quad (0 \le x \le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은?6)

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

007. [한성은 PU8423번]

닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 4)$에서 두 번 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f''(x)>0$이고, 다음을 조건을 만족시킨다.

> (가) $\{f(0)\}^2 + \{f(4)\}^2 = 32$
> (나) 열린 구간 $(0,\ 4)$에 방정식
> $$\{f'(x)\}^2 + \{f(x)\}^2 = 0$$
> 의 근이 적어도 하나 존재한다.

$\int_0^4 f(x)|f'(x)|dx$의 값을 구하여라.7)

[부분적분법]

▷ $\int f(x)g(x)dx$에서 $f(x)g(x)$보다 $f'(x)G(x)$가 적분하기 좋아 보일 때 부분적분각이 선다.

008. [2012학년도 6월 19번]

정의역이 $\{x|x>-1\}$인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x^3)^2}$이고, 함수 $g(x)=x^2$일 때,

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx=\frac{1}{6}$$

이다. $f(1)$의 값은?8)

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{2}{9}$ ③ $\dfrac{5}{18}$

④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{18}$

009. [2011학년도 수능 28번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고, $f(a)=0$, $\int_{2a}^{4a}\dfrac{f(x)}{x}dx=k$ $(a>0,\ 0<k<1)$일 때, $\int_a^{2a}\dfrac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은?9)

① $\dfrac{k^2}{4}$ ② $\dfrac{k^2}{2}$ ③ k^2

④ k ⑤ $2k$

[식의 변형과 부분적분]

▷ 적당한 조작을 가해야 하는 경우도 있다.
부분적분법의 핵심은 두 함수의 곱의 적분이
(미분한 함수)×(적분한 함수)
의 적분으로 문제가 바뀐다는 것.

010. [2017학년도 9월 21번]

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$

(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2)-g(2)$의 값은?10)

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$
④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

011. [2014학년도 수능 21번]

연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)\,dt$$

이다. $f(1)=1$일 때, $\pi^2\displaystyle\int_0^1 xf(x+1)\,dx$의 값은?11)

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

012. [2020학년도 9월 17번]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^4-1$이다.
(나) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 g'(x)\,dx = 120$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 f(x)\,dx$의 값은?12)

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

[역함수 치환적분]

▷ $\int f(x)dx$에서 $x=f(t)$로 치환하는 것은 어색하다.

013. [수능 예시문항 29번]

함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하여라.13)

014. [한성은 AY9938번]

$x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=xe^x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_0^e xg'(x)g(x)dx$의 값은?14)

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
④ $2e-2$ ⑤ $2e-1$

015. [한성은 GA2970번]

$\frac{1}{e} \leq x$에서 정의된 함수 $f(x)=x\ln x$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $\int_0^e \frac{x}{\ln g(x)+1}dx$의 값은?15)

① $\frac{1+e^2}{4}$ ② $\frac{2+e^2}{4}$ ③ $\frac{3+e^2}{4}$
④ $\frac{4+e^2}{4}$ ⑤ $\frac{5+e^2}{4}$

[구간과 적분]

▷ 조각정의된 함수의 정적분
① 주어진 함수는 정의된 구간 내에서만 사용 가능하다.
② $f(g(x))$에서 $g(x)$가 먹고 들어가는 구간 관찰.

016. [2019학년도 수능 16번]

$x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$의 값은?16)

① $\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$　② $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$　③ $\frac{\ln 2}{3}+1$
④ $\frac{2\ln 2}{3}+1$　⑤ $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{3}{2}$

017. [한성은 BK3563번]

연속함수 $f(x)$는 $1\le x\le 4$인 x에 대하여

$$f(x)=f(2x+2)-6$$

를 만족시킨다. $\int_{1}^{10} f(x)dx=72$일 때, $\int_{4}^{10} f(x)dx$의 값을 구하여라.17)

018. [2014학년도 9월 30번]

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_{1}^{e^2} g(x)dx=6e^2+4$이다.

$\int_{1}^{e} f(\ln x)dx=ae+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.18)
(단, a, b는 정수이다.)

[항등식의 양 변 적분]

▷ 항등식의 양 변을 적분할 수 있다. 적분상수 조심.

019. [2018학년도 9월 18번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ f(t))(t>0)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 t에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t})$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?[19]

① $e-2$ ② e ③ $e+2$
④ $e+4$ ⑤ $e+6$

020. [2020학년도 9월 30번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하여라.[20]

021. [2019학년도 수능 21번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?[21]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$2\{f(x)\}^2 f'(x)=\{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.
(나) $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1,\ f(6)=2$

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$
④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

[정적분으로 정의된 함수]

▷ 함수 $\int_a^x f(t)dt$가 나오면, $g(x)$ 등으로 이름 붙이고,

① $g'(x)=f(x)$

② $g(a)=0$

임을 이용하여 다룬다. $f(x)$에 대한 넓이로 풀지 마.

※ ②를 이용하여 x축의 위치를 결정할 수 있다.

022. [2016학년도 9월 21번]

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x<0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0\le x\le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt\ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은?[22)]

(단, $-\frac{7}{2}\pi\le a\le \frac{7}{2}\pi$)

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$

④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

023. [2018학년도 9월 21번]

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=-1,\ a_n=2-\frac{1}{2^{n-2}}(n\ge 2)$$

이다. 구간 $[-1,\ 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$f(x)=\sin(2^n\pi x)\ \ (a_n\le x\le a_{n+1})$$

이다. $-1<\alpha<0$인 실수 α에 대하여 $\int_\alpha^t f(x)dx=0$을 만족시키는 $t(0<t<2)$의 값의 개수가 103일 때, $\log_2(1-\cos(2\pi\alpha))$의 값은?[23)]

① -48 ② -50 ③ -52

④ -54 ⑤ -56

[연습문제]

024. [한성은 JY7787번]

함수 $f(x)=\int_{1}^{x}e^{t^2}dt$와 실수 a에 대하여 $f(a)=\ln 4$일 때, $\int_{1}^{a}e^{x^2+f(x)}dx$의 값은?[24)]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

025. [한성은 DU9597번]

$f(x)=\int_{1}^{x}e^{-t^2}dt$일 때, $\int_{0}^{1}f(x)dx$의 값은?[25)]

① $\frac{1}{2e}$ ② $\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2e}-1$

④ $\frac{1}{e}$ ⑤ $\frac{1}{e}-\frac{1}{2}$

026. [한성은 ML9238번]

실수 전체의 집합에서 연속이고 증가하는 함수 $f(x)$가 다음을 만족시킬 때, $\int_{1}^{e^2}\frac{f'(\ln x)\ln x}{x}dx$의 값은?[26)]

(가) $f(0)=0,\ f(2)=2$
(나) $\int_{0}^{2}f(x)dx=\frac{4}{3}$

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$

④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

027. [한성은 WT7406번]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $F(x)=6\{f(x)\}^3-6$이고 $f(0)=0$일 때, $\int_{0}^{a}\{f(x)\}^2dx$의 값은?27)

① $\frac{9}{2}$ ② 3 ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{9}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

028. [2017년 3월 21번]

구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt \ (0\le x\le 1)$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x)=f(x)-x$
(나) $\int_{0}^{1} F(x)dx=e-\frac{5}{2}$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?28)

ㄱ. $F(1)=e$
ㄴ. $\int_{0}^{1} xF(x)dx=\frac{1}{6}$
ㄷ. $\int_{0}^{1}\{F(x)\}^2dx=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

029. [2021학년도 9월 20번]

함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt\ (x\geq 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $k^2<a_6<(k+1)^2$인 자연수 k의 값은?[29)]

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

030. [한성은 NM1379번]

함수 $f(x)=(x-1)(x-6)+1$에 대하여

$$g(s)=\int_0^s (e^{f(x)}-e)dx$$

이다. $1\leq s\leq 8$에서 $g(s)$가 최소가 되는 s값을 a라 하자. $g''(a)$의 값은?[30)]

① e ② $2e$ ③ $5e$
④ $2e^2$ ⑤ $5e^2$

031. [2012학년도 수능 28번]

함수 $f(x)=3(x-1)^2+5$에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$를 만족시킨다. $g'(2)=p$일 때, $30p$의 값을 구하여라.[31)]

032. [2018학년도 6월 30번]

실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m(m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx = k\alpha_m\int_0^1 |f(x)|dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하여라.32)

033. [한성은 MV6314번]

함수 $f(x)=\begin{cases}\sin x & (x\le\pi)\\ -\sin x & (x>\pi)\end{cases}$와 실수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이다.

$\displaystyle\int_{-\pi}^{3\pi} g(x)dx = 8\pi\times\int_0^k |f(x)|dx$일 때, k의 값은?33)

① 0 ② $\dfrac{\pi}{6}$ ③ $\dfrac{\pi}{4}$
④ $\dfrac{\pi}{2}$ ⑤ π

034. [2015학년도 9월 30번]

양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.
(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하여라.34)
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

035. [한성은 CP1573번]

0 이상의 실수 전체에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 0 이상의 실수 x에 대하여

$$2f(2x)-f(x)=g'(x)$$

를 만족시킨다. 모든 0 이상의 정수 n에 대하여 $g(n)=n^2$일 때, $\displaystyle\int_1^8 f(x)dx$의 값을 구하여라.35)

036. [한성은 LP4745번]

연속 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=6$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x)dx$의 값은?36)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

037. [2020학년도 6월 20번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)>0$
> (나) $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?37)

> ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.
> ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.
> ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 할 때, $f(1)+\{F(1)\}^2=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

038. [한성은 AZ8654번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $F(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $F(x)>0$이다.
> (나) $\int \left\{\frac{f(x)}{F(x)}\right\}^2 dx=\int \frac{f'(x)}{F(x)}dx-\frac{e^x}{1+e^x}$

$F(0)=2f(0)=4$일 때, $F(1)$의 값은?38)

① e ② $e+1$ ③ $e+2$
④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

1) ②
2) ④
3) ④
4) ④
5) 9
6) ④
7) 16
8) ④
9) ④
10) ③
11) ①
12) ②
13) 12
14) ①

$g(x)=t$로 치환하면 $\int_0^1 tf(t)dt$이다.

15) ①
16) ②
17) 60
18) 17
19) ①
20) 93
21) ④
22) ①
23) ②
24) ③
25) ②
26) ④
27) ①
28) ④
29) ①
30) ③
31) 24
32) 16
33) ④
34) 127
35) 21
36) ④
37) ⑤
38) ⑤

$\int \frac{f'(x)}{F(x)}dx = \frac{f(x)}{F(x)} + \int \left\{\frac{f(x)}{F(x)}\right\}^2 dx$이므로 $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{e^x}{1+e^x} + C$이다.

조건에서 $C=0$, 양 변을 적분하면 $\ln F(x) = \ln(1+e^x) + D$이다. $F(x) = 2(1+e^x)$이다.