[P]

PatterN DriLL

수능 빈출 유형 분석

미분의 연산

5A ACADEMY

SOOHAN

[미분계수식의 변형]

▷ 한 번씩 나온다. 어렵게는 안 나오지만.

001. [2017학년도 6월 15번]

두 함수 $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=e^x$에 대하여

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}$ 의 값은?1)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ 1
④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

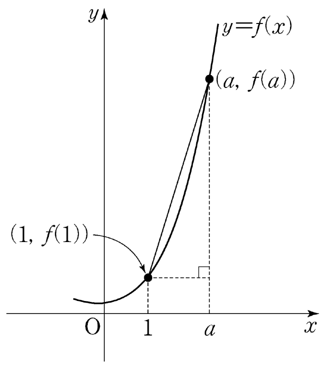
002. [2018학년도 6월 9번]

함수 $f(x)=\frac{1}{x+3}$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=2$를 만족시키는 실수 a의 값은?2)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

003. [2013학년도 6월 16번]

양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a에 대하여 점 $(1,\ f(1))$과 점 $(a,\ f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1일 때, $f'(1)$의 값은?3)



① 1 ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

[미분가능성(구간별로 정의된 함수)]

▷ 미분가능한 두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \le a) \\ h(x) & (x > a) \end{cases}$$

일 때, $g(a)=h(a)$, $g'(a)=h'(a)$이면

$f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

▷ $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재한다.

004. [2016학년도 9월 30번]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고 $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하여라.4)

005. [2015학년도 수능 30번]

함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하여라.5)

006. [한성은 AA9382번]

두 함수 $f(x)=e^{\frac{x+|x|}{2}}-a$, $g(x)=b|x|+c|x-2|$에 대하여, 함수

$$h(x)=|f(x)|-g(x)$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값은?6) (단, $bc\neq 0$이다.)

① $-\frac{1}{2}e^3$ ② $-e^3$ ③ $-\frac{3}{2}e^3$

④ $-\frac{1}{2}e^4$ ⑤ $-e^4$

[미분가능성(그래프)]

▷ 미분가능한 함수의 그래프 :
매끄럽게 연결되어야 한다.
⇒ 절댓값함수, 첨점에 대한 이해
⇒ 다항식의 제곱인수에 대한 이해
⇒ 다항식의 세제곱인수, 변곡접선에 대한 이해

007. [2011학년도 9월 16번]

함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\,(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x\le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은?7)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

008. [2013학년도 수능 21번]

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\,(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은?8)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$
④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

[미분가능성(영곱하기)]

▷ $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$가 존재할 때,
$(x-a)f(x)$는 연속, $(x-a)^2 f(x)$는 미분가능이다.

009. [2007학년도 수능 7번]

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & (x<0) \\ x^2-1 & (0\le x<1) \\ \frac{2}{3}(x^3-1) & (x\ge 1) \end{cases}$$

일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?9)

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄴ. $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

010. [한성은 VL7651번]

함수 $f(x)=|2\sin|x|-1|$에 대하여 함수

$$g(x)=(x-a)\{f(x)\}^2$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 값은?10)

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{1}{2}\pi$ ⑤ π

[여러가지 미분법]

▷ 합성함수, 음함수, 매개변수 미분법

011. [2020학년도 수능 4번]

곡선 $x^2-3xy+y^2=x$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는?11)

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

012. [2018학년도 6월 6번]

매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=t^2+2, \quad y=t^3+t-1$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?12)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

013. [2014학년도 9월 27번]

함수 $f(x)=\ln(\tan x)\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}$의 값을 구하여라.13)

014. [2022학년도 수능 미적분 24번]

실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x^3+x)=e^x$을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은?14)

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$
④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

[역함수의 미분법]

▷ 대응값 $f(a)=b$, $g(b)=a$ 먼저 확인,
그 다음에 기울기 $f'(a)g'(b)=1$ 관계.

▷ 역함수와의 합성을 이용한 풀이.

▷ 기하적 의미를 이용한 풀이.

015. [2009학년도 수능 29번]

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_a^x \{2+\sin(t^2)\}dt$$

라 하자. $f''(a)=\sqrt{3}a$일 때, $(f^{-1})'(0)$의 값은?[15)]
(단, a는 $0<a<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$인 상수이다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

016. [2016학년도 수능 21번]

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선

$$y=x^3+2x^2-15x+5$$

와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자.

$$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$$

라 할 때, $h'(5)$의 값은?[16)]

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$
④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

[합성함수의 미분법]

▷ 도식화 처리 연습

017. [2013학년도 6월 26번]

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 1이다. 함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $10(a+b)$의 값을 구하여라.17)

018. [2020학년도 수능 26번]

함수 $f(x)=(x^2+2)e^{-x}$에 대하여 함수 $g(x)$가 미분가능하고

$$g\left(\frac{x+8}{10}\right)=f^{-1}(x), \quad g(1)=0$$

을 만족시킬 때, $|g'(1)|$의 값을 구하여라.18)

019. [2012학년도 수능 28번]

함수 $f(x)=3(x-1)^2+5$에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$를 만족시킨다. $g'(2)=p$일 때, $30p$의 값을 구하여라.19)

[음함수의 기울기]

▷ 나름 최신 유형. 풀 때마다 헷갈린다.
① 관계식 ② ~일 때의 값 ③ 미분하여 대입

020. [2022학년도 6월 미적분 29번]

$t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.[20]
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

021. [2020학년도 6월 21번]

함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은?[21]

① $-\frac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{e}}{5}$
④ $-\frac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{e}}{7}$

[연습문제]

022. [한성은 QH7418번]

함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=\dfrac{1}{1+\sin(f(2x))}$이고,

함수 $g(x)$의 역함수를 $h(x)$라 하자. $f(1)=\dfrac{\pi}{6}$,

$f'(1)=2$일 때, $h'\left(\dfrac{2}{3}\right)$의 값은?22)

① $-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ ② $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

④ $-3\sqrt{3}$ ⑤ $-6\sqrt{3}$

023. [한성은 II8866번]

실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수를 가지는 함수 $f(x)$에 대하여

$$f^{-1}(x)=g(x),\quad (g\circ g)(x)=h(x)$$

라 할 때, $f(1)=f'(1)=2$, $h(3)=1$, $h'(3)=3$이다. 매개변수 $t(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

에서 $t=2$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은?23)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 6

024. [한성은 EM7044번]

실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(2g(x))$의 역함수를 $h(x)$라 하면

$$f(4)=4,\ f'(4)=3,$$
$$h(4)=a,\ h'(4)=\frac{1}{24}$$

이다. $g(a)+g'(a)$의 값을 구하여라.24) (단, a는 상수이다.)

025. [한성은 SQ2024번]

실수 전체의 집합에서 증가하며 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수는 $g(x)$이고 함수 $f(e^x)$의 역함수는 $h(x)$이다. $g(e)=eh(e)$이고 $g'(e)h'(e)=\dfrac{4}{e}$일 때, $f'(e)$의 값은?25)

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

026. [한성은 BY9255번]

함수 $y=x^3$의 그래프와 직선 $y=-x+t$의 교점의 x값을 $f(t)$, 함수 $y=x^3$의 그래프와 직선 $y=-2x+t$의 교점의 x값을 $g(t)$라 하자. $f(a)=g(b)$이고 $f'(a)=\frac{1}{7}$일 때, $g'(b)$의 값은?26)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

027. [한성은 GY2474번]

함수 $f(x)=x^3+x$의 역함수 $g(x)$가 두 실수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(a)-g(b)=2$
(나) $\frac{1}{g'(a)}-\frac{1}{g'(b)}=18$

$g(a)+g(b)$의 값은?27)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

028. [한성은 WR1396번]

$-1<t<1$인 실수 t에 대하여 곡선

$y=\cos x$(단, $-\pi<x<\pi$)

와 직선 $y=t$가 만나는 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 하자. $\lim_{t\to -\frac{1}{2}}\frac{3f(t)-4\pi}{t+\frac{1}{2}}$의 값은?28)

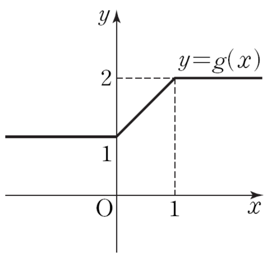
① $-4\sqrt{3}$ ② $-2\sqrt{3}$ ③ 0
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

029. [한성은 EQ2408번]

함수 $g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$$f(x)=(x-1)g(x)$$

로 정의한다. 다음 중 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[29)]



ㄱ. $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(-h)}{2h}$의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

030. [한성은 HX7949번]

자연수 n에 대하여 정의된 함수 $f_n(x)=|x^n+1|$가 있다.

$$g(x)=af_1(x)-\sum_{k=1}^{5}f_k(x)$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값을 구하여라.[30)]

031. [한성은 PI9314번]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=|e^{ax}-1|+b|x^2-cx|+\ln(x+|x-2|)$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?[31)] (단, a는 양수이다.)

① $\frac{5}{4}$ ② 12 ③ $\frac{7}{4}$
④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

032. [한성은 NU5636번]

함수 $f(x)=|\ln(x+|1-x|)-2|$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 있다. 함수 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능할 때, $g'(4)$의 값을 구하여라.32)

033. [한성은 ZD7780번]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=|e^x-e^3|+1$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하다.
(나) 함수 $f(x)\times g(x)$가 $g(a)\neq 0$인 임의의 실수 a에 대하여 $x=a$에서 두 번 미분가능하다.

$g(4)$의 값을 구하여라.33)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

034. [한성은 QP2112번]

함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x$와 실수 t에 대하여 $f(x)\geq t$를 만족시키는 가장 작은 실수 x의 값을 $g(t)$라 하자. $g'(0)+\lim_{h\to 0+}\frac{g(4+h)-4}{h}$의 값은?34)

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

035. [한성은 QV2884번]

곡선 $y=e^x$를 y축의 양의 방향으로 $t(t>0)$만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하고, 모든 실수 x에 대하여 $mx \le f(x)$를 만족시키는 m의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $g(a)=e^2$일 때, $g'(a)$의 값은?35)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ e

036. [한성은 VX9060번]

함수 $f(x)=xe^x$와 양의 실수 t에 대하여 점 P는 $(t,\ f(t))$이다. 두 점 O, P 사이의 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q 중 삼각형 OPQ의 넓이가 최대가 될 때 점 Q의 x좌표를 $g(t)$라 하자. $g(a)=1$일 때, $g'(a)$의 값은?36)
(단, 점 O는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

037. [한성은 IF8367번]

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=xe^x$와 직선 $y=x+t$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점의 x좌표를 $a(t)$라 하고, 곡선 $y=xe^x$과 x축 및 직선 $x=a(t)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. 양수 p가 $a(p)=2$를 만족시킬 때, $g'(p)$의 값은?37)

① $\frac{2e^2}{3e^2-1}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2e^2}{3e^2+1}$
④ $\frac{2e^2}{3e^2+2}$ ⑤ $\frac{2e^2}{3e^2+3}$

038. [2022학년도 6월 미적분 30번]

$t>\frac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.38)
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

1) ④
2) ①
3) ⑤
4) 48
5) 39
6) ④
7) ①
8) ⑤
9) ③
10) ①
11) ④
12) ④
13) 16
14) ④
15) ④
16) ④
17) 15
18) 5
19) 24
20) 17
21) ②
22) ①
23) ③
24) 6
25) ②
26) ⑤
27) ③
28) ①
29) ⑤
30) 9
31) ⑤
32) 64
33) ④
34) ④
35) ②
36) ②

점 Q는 직선 OP의 기울기로 접할 때의 접점이다.

$e^{t}=(g(t)+1)e^{g(t)}$

37) ①
38) 11