[P]

PatterN DriLL

수능 빈출 유형 분석

빈 칸

5A ACADEMY

SOOHAN

[빈 칸]

빈 칸 문제는 누구나 빡친다. 남의 풀이를 읽는 일이 원래 스트레스가 심하다. (논술 첨삭)
게다가 문항 번호가 객관식 후반이라 집중력이 고갈된 상태에서 풀어야 하는 경우가 많았다.

유형별로 분류해보면 다음과 같다.

가) 경우의 수 / 확률 문제의 풀이과정에 대한 문항 (80% 이상)
나) 이항정리, 이항계수(조합)의 성질에 대한 문항 (20% 정도)
다) 기타 미분활용(기울기, 최대최소) 문제의 풀이과정에 대한 문항 (설마)

가) 경우의 수 / 확률 문제의 풀이과정에 대한 문항 : 빈도가 높고, 난이도도 높은 편.

중요한 이슈는, 주어진 문제를 얼마나 이해해야 하냐는 것이다.
개인적으로 '문제와, 풀이과정 초반부의 접근까지 읽고 일단 혼자 풀어보는 편이 좋은 듯.'
이라고 말해왔는데, [2020학년도 9월 18번]같은 문항을 보면 그렇지만도 않다.

특별히 대비법이랄 것이 없다. 읽는 연습? 문제 풀이를 다양하게 하는 연습? 정도.

※ '확률변수의 기댓값을 구하는 과정'으로 자주 뜬다. 그냥 그렇다고.

나) 이항계수(조합)의 성질에 대한 문항 : 전개식에서 계수 찾는 문항들, 이항계수의 성질을 숙지하자.

1) 아래 등식을 증명, 설명해보자.

① ${}_{n}\mathrm{C}_{r} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

② ${}_{n}\mathrm{C}_{0} + {}_{n}\mathrm{C}_{1} + {}_{n}\mathrm{C}_{2} + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_{n} = 2^{n}$

③ ${}_{n}\mathrm{C}_{0} + {}_{n}\mathrm{C}_{2} + {}_{n}\mathrm{C}_{4} + \cdots = {}_{n}\mathrm{C}_{1} + {}_{n}\mathrm{C}_{3} + {}_{n}\mathrm{C}_{5} + \cdots = 2^{n-1}$

④ ${}_{k}\mathrm{C}_{k} + {}_{k+1}\mathrm{C}_{k} + {}_{k+2}\mathrm{C}_{k} + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_{k} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$

⑤ $k \cdot {}_{n}\mathrm{C}_{k} = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

2) 이항정리의 일반항/급수표현에도 익숙하자. : ${}_{n}\mathrm{C}_{k} a^{k} b^{n-k}$, $\sum_{k=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{k} a^{k} b^{n-k}$

다) 기타 : 가능성은 거의 없다.

그나마 뽑으라면, 미분활용(기울기, 최대최소)에 대한 문항.
딱히 대비법도 없다. 뇌 장착.

[2018학년도 9월 20번]

1. 다음은 n명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2개의 상자를 선택하여 각 상자에 공을 하나씩 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, n은 6의 배수이고 공은 구별하지 않는다.)

> 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 '(i) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우'에서 '(ii) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우'와 '(iii) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우'를 제외하면 된다.
>
> (i)의 경우 :
> n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (ii)의 경우 :
> 각 상자에 $\frac{2n}{3}$개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.
>
> (iii)의 경우 :
> 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\frac{n}{2}$개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
> 그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3C_2\times(\boxed{(나)}-1)$이다.
>
> 따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{f(30)}{g(30)}+h(30)$의 값은?[1)]

① 481 ② 491 ③ 501
④ 511 ⑤ 521

[2019학년도 수능 17번]

2. 다음은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$과 함수 $f: X\to X$에 대하여 합성함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 5인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

> 함수 f와 함수 $f\circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자.
> $n(A)=6$이면 함수 f는 일대일 대응이고,
> 함수 $f\circ f$도 일대일 대응이므로 $n(B)=6$이다.
> 또한 $n(A)\le 4$이면 $B\subset A$이므로 $n(B)\le 4$이다.
> 그러므로 $n(A)=5$, 즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다.
>
> (i) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (ii) (i)에서 선택한 집합 A에 대하여, X의 원소 중 A에 속하지 않는 원소를 k라 하자. $n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
>
> (iii) (i)에서 선택한 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$와 (ii)에서 선택한 $f(k)$에 대하여, $f(k)\in A$이며 $A=B$이므로
> $A=\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), f(a_5)\}$ ⋯ (∗)
> 이다. (∗)을 만족시키는 경우의 수는 집합 A에서 집합 A로의 일대일 대응의 개수와 같으므로 $\boxed{(다)}$이다.
>
> 따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{(가)}\times\boxed{(나)}\times\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?[2)]

① 131 ② 136 ③ 141
④ 146 ⑤ 151

[확률변수의 평균]

PATTERN DRILL 3

[2017학년도 수능]

3. 좌표평면 위의 한 점 $(x,\ y)$에서 세 점 $(x+1,\ y)$, $(x,\ y+1)$, $(x+1,\ y+1)$ 중 한 점으로 이동하는 것을 점프라 하자. 점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우 중에서, 임의로 한 경우를 선택할 때 나오는 점프의 횟수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, 각 경우가 선택되는 확률은 동일하다.)

> 점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 $k=\boxed{\text{(가)}}$이고, 가장 큰 값은 $k+3$이다.
>
> $$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{N}\times\frac{4!}{3!}=\frac{4}{N}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=k+1)=\frac{1}{N}\times\frac{5!}{2!2!}=\frac{30}{N}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=k+2)=\frac{1}{N}\times\boxed{\text{(나)}}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=k+3)=\frac{1}{N}\times\frac{7!}{3!4!}=\frac{35}{N}$$
>
> 이고
>
> $$\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=1$$
>
> 이므로 $N=\boxed{\text{(다)}}$이다.
>
> 따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=k}^{k+3}\{i\times\mathrm{P}(X=i)\}=\frac{257}{43}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은?[3)]

① 190 ② 193 ③ 196
④ 199 ⑤ 202

[한성은 QG6839번]

4. 다섯 쌍의 부부 10명 중에서 6명을 뽑을 때, 함께 포함되는 부부 쌍의 수를 확률변수 X라 하자.
다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

> 10명 중에서 6명을 뽑는 모든 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_6$이다.
>
> (ⅰ) $X=1$인 사건은
> 다섯 쌍의 부부 중 한 쌍의 부부를 선택하고 나머지 네 쌍의 부부 중에서는 각 부부마다 한 명씩을 선택해야 한다. 그러므로
>
> $$\mathrm{P}(X=1)=\frac{\boxed{\text{(가)}}}{210}$$
>
> (ⅱ) $X=2$인 사건은
> 다섯 쌍의 부부 중 두 쌍의 부부를 선택하고 나머지 세 쌍의 부부 중 어느 두 쌍의 부부에서 각 부부마다 한 명씩을 선택해야 한다. 그러므로
>
> $$\mathrm{P}(X=2)=\frac{\boxed{\text{(나)}}}{210}$$
>
> (ⅲ) $X=3$인 사건은
> 다섯 쌍의 부부 중 세 쌍의 부부를 선택해야 한다. 그러므로
>
> $$\mathrm{P}(X=3)=\frac{10}{210}$$
>
> 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.
>
> $$\sum_{i=1}^{3}\{i\times\mathrm{P}(X=i)\}=\boxed{\text{(다)}}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $\dfrac{b-a}{c}$의 값은?[4)]

① 12 ② 18 ③ 24
④ 30 ⑤ 36

[2017학년도 9월 17번]

5. 1부터 $n(n \geq 4)$까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 4장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

> 자연수 $k(4 \leq k \leq n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\boxed{(가)}}{{}_{n}\mathrm{C}_{4}}$$
>
> 이다. 자연수 $r(1 \leq r \leq k)$에 대하여
>
> $${}_{k}\mathrm{C}_{r}=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$$
>
> 이므로
>
> $$k\times\boxed{(가)}=4\times\boxed{(나)}$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\frac{1}{{}_{n}\mathrm{C}_{4}}\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{(가)}\right)\\&=\frac{4}{{}_{n}\mathrm{C}_{4}}\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}\end{aligned}$$
>
> 이다.
>
> $$\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}={}_{n+1}\mathrm{C}_{5}$$
>
> 이므로
>
> $$\mathrm{E}(X)=(n+1)\times\boxed{(다)}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times f(6)\times g(5)$의 값은?5)

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

[2018학년도 6월 19번]

6. 다음은 x에 대한 다항식 $(x+a^2)^n$과 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같게 되는 두 자연수 a와 $n(n \geq 4)$의 값을 구하는 과정의 일부이다.

> $(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 a^2n이다.
> $(x^2-2a)(x+a)^n=x^2(x+a)^n-2a(x+a)^n$에서
> $x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는
> $\boxed{(가)}\times a^3$이고, $2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $2a^2n$이다. 따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는
>
> $$\boxed{(가)}\times a^3-2a^2n$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$a^2n=\boxed{(가)}a^3-2a^2n$$
>
> 이고, 이 식을 정리하여 a를 n에 관한 식으로 나타내면
>
> $$a=\frac{18}{\boxed{(나)}}$$
>
> 이다. 여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로
>
> $$n=\boxed{(다)}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(k)+g(k)$의 값은?6)

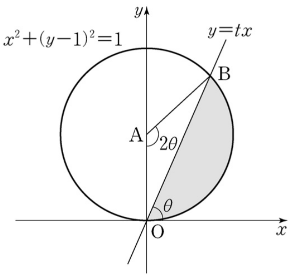
① 10 ② 16 ③ 22 ④ 28 ⑤ 34

[2015학년도 6월]

7. 양의 실수 t에 대하여 좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2 \le 1 \\ y \le tx \end{cases}$$

가 나타내는 영역의 넓이를 $f(t)$라 하자. 다음은 $f'(2)$의 값을 구하는 과정이다.



원 $C: x^2+(y-1)^2=1$의 중심을 A, 원 C와 직선 $l: y=tx$가 만나는 두 점을 각각 O, B라 하자.
직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle\mathrm{OAB}=2\theta$이다. 주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$라 하면

$g(\theta)=\theta-$ (가)

이다. $t=\tan\theta$이므로 $g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$이고, 합성함수의 미분법에 의하여

$g'(\theta)=f'(t)\times$ (나)

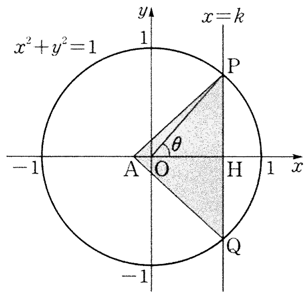
이다.
$t=2$일 때, $\tan\theta=2$이므로 $f'(2)=$ (다) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$라 하고 (다)에 알맞은 수를 a라 할 때,
$a\times h_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\times h_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?7)

① $\frac{8}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{12}{25}$
④ $\frac{14}{25}$ ⑤ $\frac{16}{25}$

[유사문항]

8. 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $x=k\,(0<k<1)$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 다음은 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{6},\ 0\right)$에 대하여 삼각형 PAQ의 넓이의 최댓값을 구하는 과정이다.



그림과 같이 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 H라 하고 $\angle\mathrm{POH}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AH}}=$ (가)

이때 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times($ (가) $)$

양변을 θ에 대하여 미분하면

$S'(\theta)=$ (나)

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{2}{3}$

$\cos\theta=\frac{2}{3}$인 θ의 값의 좌우에서 $S'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $S(\theta)$의 최댓값은 (다) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 하고 (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $\dfrac{a\times f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{g\left(\frac{\pi}{3}\right)}$의 값은?8)

① $-\frac{\sqrt{5}}{9}$ ② $-\frac{2\sqrt{5}}{9}$ ③ $-\frac{\sqrt{5}}{3}$
④ $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ ⑤ $-\frac{5\sqrt{5}}{9}$

[2019학년도 9월 18번]

9. 다음은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$의 치역 A가 $n(A)=4$이고, 집합 A의 모든 원소의 합이 홀수인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

(ⅰ) 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다.
따라서 집합 X의 원소 중에서 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.

(ⅱ) 정의역 X를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다.
따라서 집합 X를 네 개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.

(ⅲ) (ⅰ)과 (ⅱ)의 각 경우에 대하여 집합 X를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은?9)

① 498 ② 502 ③ 506
④ 510 ⑤ 514

[2020학년도 수능 14번]

10. 숫자 1이 적혀 있는 공 10개, 숫자 2가 적혀 있는 공 20개, 숫자 3이 적혀 있는 공 30개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 10번 반복하여 확인한 10개의 수의 합을 확률변수 Y라 하자. 다음은 확률변수 Y의 평균 $\mathrm{E}(Y)$와 분산 $\mathrm{V}(Y)$를 구하는 과정이다.

주머니에 들어 있는 60개의 공을 모집단으로 하자. 이 집단에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 이 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포, 즉 모집단의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

따라서 모평균 m과 모분산 σ^2은

$$m=\mathrm{E}(X)=\frac{7}{3},\quad \sigma^2=\mathrm{V}(X)=\boxed{\text{(가)}}$$

이다.

모집단에서 크기가 10인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{7}{3},\quad \mathrm{V}(\overline{X})=\boxed{\text{(나)}}$$

이다.

주머니에서 n번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 X_n이라 하면

$$Y=\sum_{n=1}^{10} X_n=10\overline{X}$$

이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{70}{3},\quad \mathrm{V}(Y)=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?10)

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{35}{6}$
④ $\frac{37}{6}$ ⑤ $\frac{13}{2}$

[2018학년도 수능 19번]

11. 무게가 1인 추 6개, 무게가 2인 추 3개와 비어 있는 주머니 1개가 있다. 주사위 한 개를 사용하여 다음의 시행을 한다. (단, 무게의 단위는 g이다.)

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 무게가 1인 추 1개를 주머니에 넣고, 눈의 수가 3 이상이면 무게가 2인 추 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 반복하여 주머니에 들어 있는 추의 총무게가 처음으로 6보다 크거나 같을 때, 주머니에 들어 있는 추의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)(x=3,\ 4,\ 5,\ 6)$을 구하는 과정이다.

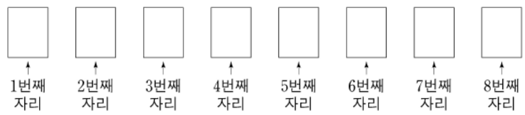
> (i) $X=3$인 사건은 주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로
>
> $\mathrm{P}(X=3)=$ (가)
>
> (ii) $X=4$인 사건은
> 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로
>
> $\mathrm{P}(X=4)=$ (나) $+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$
>
> (iii) $X=5$인 사건은
> 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로
>
> $\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+$ (다)
>
> (iv) $X=6$인 사건은 다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로
>
> $\mathrm{P}(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $\frac{ab}{c}$의 값은?11)

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{10}{9}$ ④ $\frac{13}{9}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

[2020학년도 6월 17번]

12. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 8개의 자리에 각각 한 장씩 임의로 놓을 때, 8 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 k 이하인 사건을 A_k라 하자.



다음은 두 자연수 m, $n(1\le m<n\le 8)$에 대하여 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하는 과정이다.

> A_k는 k번째 자리에 k 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $\mathrm{P}(A_k)=$ (가)
>
> 이다.
> $A_m\cap A_n\,(m<n)$은 m번째 자리에 m 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여있고, n번째 자리에 n 이하의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고, m번째와 n번째 자리를 제외한 6개의 자리에 나머지 6장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $\mathrm{P}(A_m\cap A_n)=$ (나)
>
> 이다.
> 한편, 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이기 위해서는
>
> $\mathrm{P}(A_m\cap A_n)=\mathrm{P}(A_m)\mathrm{P}(A_n)$
>
> 을 만족시켜야 한다.
> 따라서 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 (다) 이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $k=4$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $m=3$, $n=5$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은?12)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

[2020학년도 9월 18번]

13. 빨간색 공 6개, 파란색 공 3개, 노란색 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 하여, 다음 규칙에 따라 세 사람 A, B, C가 점수를 얻는다. (단, 한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

- 빨간색 공이 나오면
  A는 3점, B는 1점, C는 1점을 얻는다.
- 파란색 공이 나오면
  A는 2점, B는 6점, C는 2점을 얻는다.
- 노란색 공이 나오면
  A는 2점, B는 2점, C는 6점을 얻는다.

이 시행을 계속하여 얻은 점수의 합이 처음으로 24점 이상인 사람이 나오면 시행을 멈춘다. 다음은 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐일 확률을 구하는 과정이다.

꺼낸 빨간색 공의 개수를 x, 파란색 공의 개수를 y, 노란색 공의 개수를 z라 할 때, 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐이기 위해서는 x, y, z가 다음 조건을 만족시켜야 한다.

$x=6,\quad 0<y<3,\quad 0<z<3,\quad y+z\geq 3$

이 조건을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는

$(6,\ 1,\ 2),\quad (6,\ 2,\ 1),\quad (6,\ 2,\ 2)$

이다.

(i) $(x,\ y,\ z)=(6,\ 1,\ 2)$인 경우의 확률은 $\boxed{(가)}$이다.

(ii) $(x,\ y,\ z)=(6,\ 2,\ 1)$인 경우의 확률은 $\boxed{(가)}$이다.

(iii) $(x,\ y,\ z)=(6,\ 2,\ 2)$인 경우는 10번째 시행에서 빨간색 공이 나와야 하므로 그 확률은 $\boxed{(나)}$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은 $2\times\boxed{(가)}+\boxed{(나)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은?13)

① $\dfrac{13}{110}$ ② $\dfrac{27}{220}$ ③ $\dfrac{7}{55}$ ④ $\dfrac{29}{220}$ ⑤ $\dfrac{3}{22}$

[2019학년도 6월 20번]

14. 자연수 n에 대하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여 $c+d=2k$이어야 한다.
$c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 $k_1,\ k_2$에 대하여 $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 $k_3,\ k_4$에 대하여 $c=2k_3+1,\ d=2k_4+1$인 경우이다.

(1) $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우 :
$2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.

(2) $c=2k_3+1,\ d=2k_4+1$인 경우 :
$2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $\boxed{(나)}$이다.

(1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수 a_n은

$a_n=\boxed{(가)}+\boxed{(나)}$

이다. 자연수 m에 대하여

$\sum_{n=1}^{m}\boxed{(나)}={}_{m+3}\mathrm{C}_4$

이므로

$\sum_{n=1}^{8} a_n=\boxed{(다)}$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r이라 할 때, $f(6)+g(5)+r$의 값은?14)

① 893 ② 918 ③ 943 ④ 968 ⑤ 993

[한성은 UB6534번]

15. 다음은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$과 함수 $f: X \to X$에 대하여 함수 f의 치역의 원소의 개수가 4이며 $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$를 만족하는 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

> 세 등식 $f(1)=f(2)$, $f(2)=f(3)$, $f(3)=f(4)$ 중 성립하는 것이 몇 개 있는지에 따라서 생각하자.
>
> 세 등식이 모두 성립하면 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)$이다. 이 때는 함수 f의 치역의 원소의 개수가 최대 3이므로 조건을 만족할 수 없다.
>
> (i) 세 등식이 모두 성립하지 않는 경우 :
> $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$를 선택하고, $f(5)$와 $f(6)$은 네 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 중에서 선택할 수 있으므로 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (ii) 세 등식 중 하나가 성립하는 경우 :
> $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$를 선택하고,
> 남은 함수 f의 치역의 원소 a를 선택,
> $f(5)$와 $f(6)$은 하나 이상이 a가 되도록
> 선택해야 한다. 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
>
> (iii) 세 등식 중 두 개가 성립하는 경우 :
> $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$를 선택하고,
> 남은 함수 f의 치역의 원소 a, b를 선택,
> $f(5)$와 $f(6)$은 a와 b가 되도록
> 선택해야 한다. 경우의 수는 $\boxed{(다)}$이다.
>
> 따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{(가)}+\boxed{(나)}+\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $q-(p+r)$의 값은?15)

① 360 ② 400 ③ 440
④ 480 ⑤ 520

[2017학년도 6월(나형)]

16. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 다음은 이차함수 $f(x)=x^2-7x+12$에 대하여 $f(a)f(b)=0$이 성립할 확률을 구하는 과정이다.

> 첫 번째 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 a라 할 때 $f(a)=0$이 되는 사건을 A라 하고, 두 번째 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 b라 할 때 $f(b)=0$이 되는 사건을 B라 하자.
> 이차방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=3$ 또는 $x=4$이므로
> $\mathrm{P}(A)=\boxed{(가)}$, $\mathrm{P}(B)=\boxed{(가)}$
> 이다.
> 구하는 확률 $\mathrm{P}(A\cup B)$는
> $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
> 이고, 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로
> $\mathrm{P}(A\cap B)=\boxed{(나)}$
> 이다. 그러므로
> $\mathrm{P}(A\cup B)=\boxed{(다)}$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 m, n, k라 할 때, $m\times n\times k$의 값은?16)

① $\frac{1}{81}$ ② $\frac{5}{243}$ ③ $\frac{7}{243}$
④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{11}{243}$

[2005학년도 6월]

17. 자연수 n에 대하여 등식

$${}_{n}\mathrm{C}_{n}+{}_{n+1}\mathrm{C}_{n}+{}_{n+2}\mathrm{C}_{n}={}_{n+3}\mathrm{C}_{n+1}$$

이 성립함을 다음과 같이 증명하였다.

> ${}_{n+3}\mathrm{C}_{n+1}$은 집합 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+3\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수이다. 이것을 다른 방법으로 세어보자.
> (ⅰ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{(가)}$이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{n}$이다.
> (ⅱ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{(나)}$이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_{n+1}\mathrm{C}_{n}$이다.
> (ⅲ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{(다)}$이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_{n+2}\mathrm{C}_{n}$이다.
> (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 중에서 한 가지 경우만 일어날 수 있으므로 합의 법칙에 의하여
> $${}_{n}\mathrm{C}_{n}+{}_{n+1}\mathrm{C}_{n}+{}_{n+2}\mathrm{C}_{n}={}_{n+3}\mathrm{C}_{n+1}$$
> 이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?[17)]

	(가)	(나)	(다)
①	$n-1$	n	$n+1$
②	n	$n+1$	$n+2$
③	$n+1$	$n+2$	$n+3$
④	$n+2$	$n+1$	n
⑤	$n+3$	$n+2$	$n+1$

[2005학년도 6월]

18. 다음은 두 자연수 m과 $n(m<n)$에 대하여

$${}_{m}\mathrm{C}_{m}+{}_{m+1}\mathrm{C}_{m}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{m}$$

의 값을 이항정리를 이용하여 구하는 과정이다.

> x는 0이 아닌 실수라 하자.
> ${}_{m}\mathrm{C}_{m}$은 다항식 $(1+x)^{m}$에서 x^{m}의 계수이다.
> ${}_{m+1}\mathrm{C}_{m}$은 다항식 $(1+x)^{m+1}$에서 x^{m}의 계수이다.
> $\vdots$
> ${}_{n}\mathrm{C}_{m}$은 다항식 $(1+x)^{n}$에서 x^{m}의 계수이다.
> 따라서,
> $${}_{m}\mathrm{C}_{m}+{}_{m+1}\mathrm{C}_{m}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{m}$$
> 은 다항식 $\boxed{(가)}$에서 x^{m}의 계수이다.
> 그러므로
> $${}_{m}\mathrm{C}_{m}+{}_{m+1}\mathrm{C}_{m}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{m}=\boxed{(나)}$$
> 이다.

위의 과정에서 (가)와 (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?[18)]

	(가)	(나)
①	$\dfrac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^{m}}{x}$	${}_{n+1}\mathrm{C}_{m+1}$
②	$\dfrac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^{m}}{x}$	${}_{n+1}\mathrm{C}_{m}$
③	$(1+x)^{n+1}-(1+x)^{m}$	${}_{n+1}\mathrm{C}_{m}$
④	$\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{x}$	${}_{n+1}\mathrm{C}_{m+1}$
⑤	$\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{x}$	${}_{n+1}\mathrm{C}_{m}$

[2010학년도 6월]

19. 다음은 n이 2 이상의 자연수일 때 $\sum_{k=1}^{n} k({}_{n}\mathrm{C}_{k})^2$의 값을 구하는 과정이다.

> 두 다항식의 곱
> $(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$
> 에서 x^{n-1}의 계수는
> $a_0b_{n-1}+a_1b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_0 \cdots\cdots (*)$
> 이다. 등식
> $(1+x)^{2n-1}=(1+x)^{n-1}(1+x)^n$
> 의 좌변에서 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{(가)}$이고, $(*)$을 이용하여 우변에서 x^{n-1}의 계수를 구하면
> $\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{(나)})$
> 이다.
>
> 따라서 $\boxed{(가)}=\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{(나)})$이다.
> 한편 $1\le k\le n$일 때, $k\times{}_{n}\mathrm{C}_{k}=n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$이므로
> $\sum_{k=1}^{n}k({}_{n}\mathrm{C}_{k})^2=\sum_{k=1}^{n}(n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{(나)})$
> $=n\times\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{(나)})$
> $=\boxed{(다)}$
> 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[19)]

	(가)	(나)	(다)
①	${}_{2n}\mathrm{C}_{n}$	${}_{n}\mathrm{C}_{n-k+1}$	$\frac{n}{2}\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$
②	${}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$	${}_{n}\mathrm{C}_{n-k+1}$	$\frac{n}{2}\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n}$
③	${}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$	${}_{n}\mathrm{C}_{n-k}$	$\frac{n}{2}\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n}$
④	${}_{2n}\mathrm{C}_{n}$	${}_{n}\mathrm{C}_{n-k+1}$	$n\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$
⑤	${}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$	${}_{n}\mathrm{C}_{n-k}$	$\frac{n}{2}\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$

[한성은 PY7167번]

20. 다음은 x에 대한 다항식 $(1+x)^{19}$과 $(1+x)^9(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^9의 계수를 비교하여 $\sum_{k=1}^{10}k({}_{10}\mathrm{C}_{k})^2$의 값을 구하는 과정이다.

> $(1+x)^{19}$의 전개식에서 x^9의 계수는 ${}_{19}\mathrm{C}_{9}$이다.
>
> $1\le k\le 10$인 정수 k에 대하여 $(1+x)^9$의 전개식에서 x^{k-1}의 계수는 ${}_{9}\mathrm{C}_{k-1}$이고 $(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^{10-k}의 계수는 $\boxed{(가)}$이므로
>
> x에 대한 항등식
> $(1+x)^{19}=(1+x)^9(1+x)^{10}$
> 의 좌변과 우변에서 x^9의 계수를 비교하면
> $\sum_{k=1}^{10}\left\{{}_{9}\mathrm{C}_{k-1}\times\boxed{(가)}\right\}={}_{19}\mathrm{C}_{9}\cdots\ (*)$
> 이다.
>
> 자연수 $k(1\le k\le n)$에 대하여
> $k\times{}_{n}\mathrm{C}_{k}=n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-k}$
> 이므로 ${}_{9}\mathrm{C}_{k-1}=\boxed{(나)}\times{}_{10}\mathrm{C}_{k}$이다.
>
> $(*)$에 적용하면 $\sum_{k=1}^{10}\left\{\boxed{(나)}\times({}_{10}\mathrm{C}_{k})^2\right\}={}_{19}\mathrm{C}_{9}$이므로
> 구하는 값은 $\boxed{(다)}\times{}_{19}\mathrm{C}_{9}$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $f(2)\times g(4)\times a$의 값은?[20)]

① 120 ② 150 ③ 180 ④ 210 ⑤ 240

[유사문항]

21. 다음은 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 선택하는 방법의 수를 $f(n,\ r)$라 할 때, 등식

$$\sum_{k=1}^{n} f(n,\ k) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n+k}\mathrm{P}_{n-1}$$

이 항상 성립함을 보이는 과정이다.

> 우변에서 ${}_{n+k}\mathrm{P}_{n-1} = \dfrac{(n+k)!}{\boxed{(가)}}$이므로 주어진 등식에서
>
> $$\begin{aligned}(\text{우변}) &= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n+k}\mathrm{P}_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+k)!}{(n-1)!\,\boxed{(가)}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\boxed{(나)}\end{aligned}$$
>
> $f(n,\ k) = {}_n\mathrm{H}_k = {}_{n+k-1}\mathrm{C}_n$이므로 주어진 등식에서
>
> $$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= {}_n\mathrm{H}_1 + {}_n\mathrm{H}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{H}_n \\ &= {}_n\mathrm{C}_1 + {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{2n-1}\mathrm{C}_n\end{aligned}$$
>
> 따라서 주어진 등식이 항상 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $g(k)$, $h(n,\ k)$라 할 때, $g(3)+h(3,\ 2)$의 값은?[21)]

① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

[유사문항]

22. 매개변수 $t\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 나타내어진 함수

$$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$$

가 있다. 함수의 그래프 위의 임의의 점 P에서의 접선과 x축, y축과의 교점을 각각 A, B라 하자. 다음은 선분 AB의 길이가 일정함을 증명한 것이다.

> 매개변수로 나타낸 함수의 미분법에 의하여
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \boxed{(가)}$$
>
> 이다.
>
> 임의의 점 P의 좌표를 $(\cos^3 t,\ \sin^3 t)$라고 하면 접선의 방정식은
>
> $$y-\sin^3 t = \boxed{(가)}\times(x-\cos^3 t)$$
>
> 이다. 이 식에 $y=0$을 대입하면 교점 A의 좌표는 $(\boxed{(나)},\ 0)$이고, $x=0$을 대입하면 교점 B의 좌표는 $(0,\ \boxed{(다)})$이다. 따라서 선분 AB의 길이는 $\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$로 일정하다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식의 곱을 $f(t)$라 할 때, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$의 값은?[22)]

① $-\dfrac{3}{4}$ ② $-\dfrac{2}{3}$ ③ $-\dfrac{7}{12}$
④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{5}{12}$

1) ①
2) ①
3) ②
4) ③

(가) 80, (나) 120, (다) $\frac{5}{3}$

5) ①
6) ①
7) ①
8) ④
9) ⑤
10) ④
11) ①
12) ④
13) ②
14) ③
15) ④

(가)는 240이다.

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$를 선택하는 경우의 수 ${}_6\mathrm{C}_4$와 $f(5)$와 $f(6)$을 선택하는 경우의 수 4^2의 곱이다.

(나)는 1260이다.

어느 등식이 성립하는 지 선택하는 경우의 수 3과 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 되는 3개의 수를 선택하는 경우의 수 ${}_6\mathrm{C}_3$과 a를 선택하는 경우의 수 3과 $f(5)$와 $f(6)$을 선택하는 경우의 수 7의 곱이다.

(다)는 540이다.

어느 등식이 성립하는 지 선택하는 경우의 수 3과 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 되는 2개의 수를 선택하는 경우의 수 ${}_6\mathrm{C}_2$과 a, b를 선택하는 경우의 수 ${}_4\mathrm{C}_2$와 $f(5)$와 $f(6)$을 선택하는 경우의 수 2의 곱이다.

16) ②
17) ③
18) ①
19) ③
20) ③

$f(k) = {}_{10}\mathrm{C}_k$, $g(k) = \frac{k}{10}$, $a = 10$

21) ④
22) ①