수업이 곧 시작됩니다.

원순열 [기초강의]

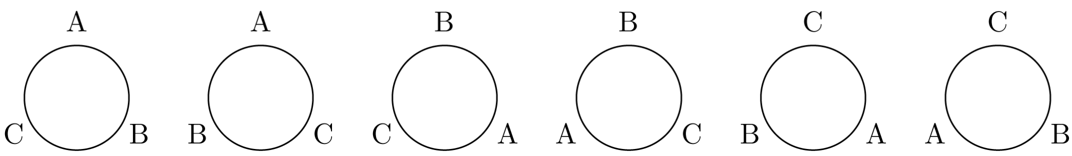
[학습목표]

1. 원순열을 이해하고 문제를 풀 수 있다.
2. 입체도형에 색칠하는 경우의 수를 이해한다.

01. 서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 방법의 수는 $(n-1)!$이다.

02. 원순열에서는 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.
⇒ 원순열의 수는 자리의 절대적인 방향은 무시하고 놓인 것들의 상대적 위치관계만을 고려한다.

03. 원순열에서는 배열들이 서로 같은 지, 그렇지 않은 지를 이해하는 것이 매우 중요하다.
A, B, C 세 명을 원탁에 앉히려 할 때, 아래의 배열들을 살펴보자.



[그림1] [그림2] [그림3] [그림4] [그림5] [그림6]

위의 그림 중 [그림1]과 [그림4]와 [그림5]는 서로 같은 배열이다.
[그림1]을 시계방향으로 120° 회전시키면 [그림5]를, 다시 120° 회전시키면 [그림4]를 얻을 수 있다.
[그림1]과 [그림4]와 [그림5]는 모두 A의 입장에서 봤을 때, 왼쪽으로 B, 오른쪽으로 C가 앉아 있다.
※ [그림1]과 [그림2]가 서로 다른 배열이라는 것을 A입장에서 확인해보자.
※ 원순열의 수는 A가 북쪽으로 앉아 있는지를 고려하지 않는다.

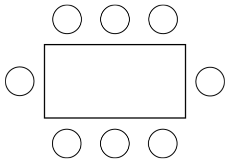
04. 따라서 3명이 원탁에 앉는 방법의 수는 2이다.
[03]의 [그림1], [그림4], [그림5]가 서로 같은 배열이고, [그림2], [그림3], [그림6]이 서로 같은 배열이다.

05. n명이 원탁에 앉는 방법의 수를 생각하자. n개의 자리에 n명이 앉을 수 있는 방법의 수는 $n!$인데,
어떤 배열과 그 배열을 $1/n$바퀴 회전했을 때 얻어지는 배열은 원순열로서 같은 배열이 된다.
따라서 n개의 배열이 원순열로는 1개가 되므로 $n!$을 n으로 나눠줘야 한다. $(n-1)!$이네.

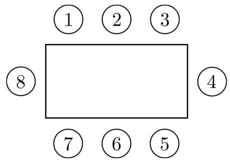
06. 다른 방법으로 해보자. n개의 자리가 있는 원탁에 A를 포함한 n명을 앉히려 한다.
n자리가 모두 비어있을 때, A를 앉히는 방법을 생각하면.. 생각할 필요가 없다.
A가 어디에 앉든 돌려돌려하면 어디로든 가져갈 수 있기 때문에 A가 앉을 때는 n자리가 모두 서로 같은 자리다.
그런데 A가 자리를 잡고 앉으면, 나머지 $(n-1)$자리는 A에 대한 상대적 위치가 서로 달라진다.
각각 A의 왼쪽 자리, 왼쪽으로 두 번째, 왼쪽으로 세 번째, …로서 특별해 지는 것이다.
A를 제외한 $(n-1)$명을 서로 다른 $(n-1)$자리에 앉히는 방법의 수는 $(n-1)!$이다.

07. [05]의 풀이를 같은 것의 개수로 나누는 풀이, [06]의 풀이를 하나를 고정하는 풀이라 하자.
대부분의 원순열 문제는 양쪽으로 풀이가 가능하니 최대한 양쪽으로 도전해보자.
어느 풀이든 배열이나 자리가 같은 것인 지 다른 것인 지를 판단하는 것이 중요하고 어려운 문제가 된다.
[05]나 [06]의 밑줄 친 부분이 이해하기 쉽지 않은 문장이다. 각자 곱씹어보도록 하자.

08. 아래의 [그림1]과 같은 직사각형 모양의 탁자에 8명을 앉히는 경우의 수를 생각하자. [그림2]의 번호는 임의로 붙인 것이다.

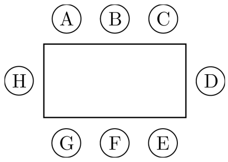


[그림1]

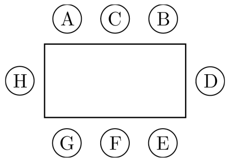


[그림2]

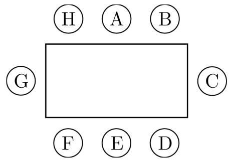
09. 8명을 A, B, C, …, H라 하고, 아래의 배열들을 째려보자.



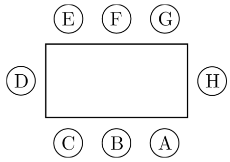
[그림3]



[그림4]



[그림5]



[그림6]

[그림3]과 [그림4]는 서로 다른 배열이다. 이건 당연하지? 자신이 A라고 생각해보자. 옆에 누가 앉아 있는지.

10. 원순열로서 [그림3]과 [그림6]은 서로 같은 배열이고 [그림3]과 [그림5]는 서로 다른 배열이라는 것을 이해해야 한다.
[그림3]을 180° 회전시키면 [그림6]이 된다. 그래서 같다.
[그림3]과 [그림5]는 동일하게 A, B, C, …, H가 시계방향으로 배열되어 있다.
하지만 [그림5]의 A는 [그림3]의 A보다 답답하다. 그걸 다른 것으로 보자는 거야.

11. 따라서 직순열로 생각했을 때 $8!$가지의 배열이 생기는데,
이 중 [그림3]과 같은 배열은 [그림6] 밖에 존재하지 않는다.
$8!$가지 중 두 가지씩이 서로 같은 배열이 되므로 구하는 경우의 수는 $(8!\div 2)$가 된다.

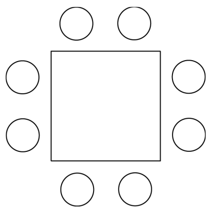
12. 8자리가 비어있을 때, A를 앉히는 방법을 생각하자. [08]의 [그림2]를 보자.
①과 ②가 서로 다른 자리인 것은 자명하지? ①과 ④도 서로 다른 자리 인정?
①과 ③도 서로 다른 자리다. 오른손잡이 기준으로 식탁에서 밥을 먹는다면 ①은 좋은 자리, ③은 나쁜 자리다.
식탁 가운데 놓인 맛있는 고기를 향해 젓가락질 하는 것을 이미지 해 보자. 난 식당 가면 이거 되게 신경쓰는데..

13. ①과 ⑤는 서로 같은 자리다. 180° 돌려보면 알겠지?
마찬가지로 ②와 ⑥이 서로 같은 자리, ③과 ⑦이 서로 같은 자리, ④와 ⑧이 서로 같은 자리가 된다.

14. 따라서 A가 자리를 잡고 앉는 경우의 수는 4가지가 된다.
일단 A가 앉으면 나머지 모든 자리는 서로 다른 자리가 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 $(4\times 7!)$이 된다.

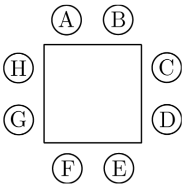
15. 같은 자리, 다른 자리의 개념을 이해하는 것은 매우 중요하다. [14]에 대해서 조금 더 설명해볼게.
모든 자리가 비어있을 때, ④와 ⑧은 서로 같은 자리이다.
그런데 A가 ①에 앉으면? ④와 ⑧은 서로 다른 자리가 된다. 하나는 가깝고 하나는 멀지?
A가 ②에 앉으면? 마찬가지로 ④와 ⑧은 서로 다른 자리가 된다. A가 봤을 때, 왼쪽과 오른쪽이니까.

16. 오른쪽 그림과 같은 정사각형모양의 탁자에 8명을 앉히는 방법의 수를 생각하자.

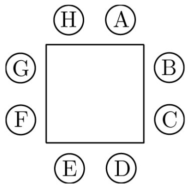


풀이1) 8명을 직순열로 배열하는 방법의 수가 $8!$이고,
어떤 배열을 90°를 회전했을 때 같은 배열을 얻을 수 있다.
네 가지 배열이 한 종류가 되므로 구하는 경우의 수는 $(8!\div 4)$다.
풀이2) 8명 중 첫 번째 사람을 앉힐 수 있는 경우의 수는 2다.
따라서 구하는 경우의 수는 $(2\times 7!)$이다.

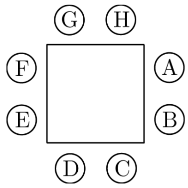
17. 조금 더 설명해볼게. 8명을 A, B, ⋯, H라 하자. [그림4]의 번호는 편의상 붙인 것이다.



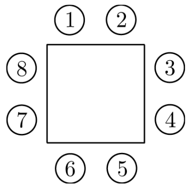
[그림1]



[그림2]



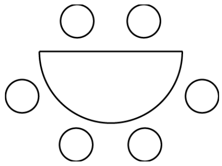
[그림3]



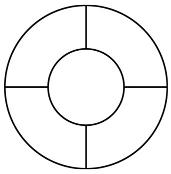
[그림4]

풀이1)을 이해하려면 [그림1]과 [그림3]은 서로 같은 배열이고, [그림1]과 [그림2]는 서로 다른 배열인 것을 이해해야 한다.
[그림2]의 A는 밥먹기 좋지만, [그림1]이나 [그림3]의 A는 밥먹기 빡친다.
풀이2)를 이해하려면 [그림4]의 8개의 빈 자리 중 ①, ③, ⑤, ⑦이 서로 같은 자리이고
②, ④, ⑥, ⑧이 서로 같은 자리라는 것을, ①과 ②는 서로 다른 자리라는 것을 이해해야 한다.
나하고 식당을 가면 내가 은근히 ②, ④, ⑥, ⑧ 자리에 앉으려고 노력하는 것을 확인할 수 있을 것이다.

18. 오른쪽 그림과 같은 반원모양의 탁자에 8명을 앉히는 방법의 수를 생각하자.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)
⇒ 답은 $6!$이다. 회전은 낚시고, 같은 자리는 존재하지 않는다.
⇒ 선대칭인 자리들이 서로 다른 것을 확인하자. 왼쪽, 오른쪽.



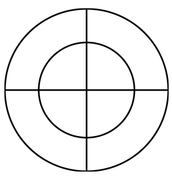
19. 아래와 같은 모양의 원판에 5가지 색을 모두 사용하여 색칠하는 방법의 수는?
(단, 한 칸에 하나의 색을 사용하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



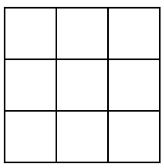
20. 세 가지 풀이를 해 보겠다.
풀이1) 직순열로 생각하면 $5!$가지의 경우가 가능하다. 4개씩이 같은 경우가 되므로 답은 $(5!\div4)$다.
풀이2) 가운데 어떤 색을 칠하는 지의 경우의 수가 5이다. 가운데를 칠하면 나머지는 원순열이므로 $3!$. 답은 $(5\times3!)$이다.
풀이3) 5가지 중 색 A가 있다고 하자. A를 칠할 수 있는 경우의 수는 Case1) 가운데, Case2) 가장자리의 두 가지이다.
Case1)은 나머지 4색을 원순열 배열이므로 $3!$가지, Case2)는 모두 다른 자리가 되므로 $4!$가지가 된다. 답은 $(3!+4!)$이다.

21. 풀이1)은 같은 것의 개수로 나누는 풀이고
풀이2)가 많이 쓰이는 풀이면서도 관점이 독특한데, 다른 자리부터 채우는 풀이랄까.
풀이3)이 하나를 고정하는 풀이에 대응된다. 좀 불편하지?

22. 오른쪽과 같은 모양의 원판에 8가지 색을 모두 사용하여 색칠하는 방법의 수는?
(단, 한 칸에 하나의 색을 사용하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)
풀이1) 직순열로 생각하면 $8!$가지의 경우가 가능하다.
4개씩이 같은 경우가 되므로 답은 $(8!\div4)$다.
풀이2) 가운데 4칸에 어떤 색을 칠하는 지의 고르는 경우의 수는 ${}_8C_4$이다.
얘들을 원순열 배열 $3!$, 안쪽을 칠하면 나머지는 그냥 순열이다. $4!$. 답은 $({}_8C_4\times3!\times4!)$이다.
풀이3) 8가지 중 색 A가 있다고 하자. A를 칠할 수 있는 경우의 수는 Case1) 안 쪽, Case2) 바깥 쪽의 두 가지이다.
Case1), Case2) 모두 A를 칠하면 남은 자리는 모두 서로 다른 자리가 되므로 $7!$가지가 된다. 답은 $(2\times7!)$이다.



23. 오른쪽과 같은 모양의 판에 9가지 색을 모두 사용하여 색칠하는 방법의 수는?
(단, 한 칸에 하나의 색을 사용하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)
풀이1) 4개씩 똑같네. $(9!\div4)$다.
풀이2) 중앙 칸이 다른 것이야 보일 것이고,
중앙 칸과 붙어 있는 4칸과, 모서리의 4칸이 서로 다른 것을 인지하자.
답은 $\{9\times({}_8C_4\times3!)\times4!\}$이다.
풀이3) 첫 번째 색을 칠할 수 있는 경우는 3가지. 답은 $\{(8!\div4)+8!+8!\}$이다.



24. 조건이 걸린 원순열 문제를 풀어보자. 같은 것의 개수로 나누는 풀이와 하나를 고정하는 풀이 중에 후자를 추천하게 된다.
조건에 따라서 몇 개씩이 서로 같은 지 헷갈리는 경우가 생긴다는 점과, 하나를 고정하면 경우의 수가 줄어든다는 점 때문이다.

25. 부모를 포함한 여섯 명의 가족이 원탁에 둘러앉을 때, 부모가 이웃하는 배열 방법의 수를 구하여라.
풀이1) 직순열로 봤을 때, 아버지가 앉을 수 있는 경우의 수는 6, 어머니가 앉을 수 있는 경우의 수는 2,
애들 깔아주는 경우의 수 4!, 여섯 개가 원순열로서 같은 배열을 만들기 때문에 6으로 나눠주면 된다.
풀이2) 아버지 그냥 아무자리나 앉으세요. 그 자리가 그 자리니까. 어머니 2에 애들 4!이니까 답은 $(2\times4!)$이다.

26. 부모를 포함한 여섯 명의 가족이 원탁에 둘러앉을 때, 부모가 마주보는 배열 방법의 수를 구하여라.
풀이1) 직순열로 봤을 때, 아버지가 앉을 수 있는 경우의 수는 6, 어머니가 앉을 수 있는 경우의 수는 1,
애들 깔아주는 경우의 수 4!, 여섯 개가 원순열로서 같은 배열을 만들기 때문에 6으로 나눠주면 된다.
풀이2) 아버지 그냥 아무자리나 앉으세요. 그 자리가 그 자리니까. 어머니 1에 애들 4!이니까 답은 4!이다.

27. 1, 2, 3학년 학생이 각각 2명씩 6명이 원탁에 둘러앉을 때, 같은 학년끼리는 이웃하도록 배열하는 방법의 수를 구하여라.
풀이1) 직순열로 봤을 때, 1학년이 2자리를 고르는 경우의 수는 6이다. 앉히는 경우의 수는 2!,
2학년의 2자리를 고르는 경우의 수는 2, 앉히는 경우의 수는 2!, 남은 3학년 2명을 앉히는 경우의 수 2!이다.
여섯 개가 원순열로서 같은 배열을 만들기 때문에 6으로 나눠주면 된다. 답은 16이다.
풀이2) 1학년 하나를 앉혀놓고 시작하자. 남은 1학년이 앉을 수 있는 경우의 수는 2,
2학년의 2자리를 고르는 경우의 수는 2, 앉히는 경우의 수는 2!, 남은 3학년 2명을 앉히는 경우의 수 2!이다.
※ 이 문제는 풀이2)에서 한 명을 고정하는 것이 헷갈리는 것을 방지해줄 뿐 아니라, 경우의 수를 줄여주는 효과가 생긴다.

28. 1, 2, 3학년 학생이 각각 2명씩 6명이 원탁에 둘러앉을 때, 같은 학년끼리는 마주보도록 배열하는 방법의 수를 구하여라.
풀이2)만 할래. 1학년 하나를 앉혀놓으면, 남은 1학년 자리는 고정이다. 2학년의 2자리를 고르는 경우의 수는 2,
앉히는 경우의 수는 2!, 남은 3학년 2명을 앉히는 경우의 수 2!이다. 답은 8이네.

29. 1, 2, 3학년 학생이 각각 2명씩 6명이 원탁에 둘러앉을 때, 1학년은 이웃하고,
⇒ 2학년은 이웃하지 않도록 배열하는 방법의 수를 구하여라.
1학년 하나를 앉혀놓으면, 남은 1학년 자리는 2가지가 가능하다.
<u>남은 네 자리 중 2학년이 앉을 두 자리를 고르는 경우의 수는 3이다.</u>
2학년 배열 2!과 3학년 배열 2!, 답은 $(2\times3\times2!\times2!)$이다.
※ 밑줄 친 부분은 개인적으로 원래 좋아하는 방법인데, 원순열에서 특히 자주 쓰인다.

30. 남자 4명, 여자 4명의 8명을 원탁에 앉을 때, 남녀가 교대로 앉는 방법의 수를 구하여라.
풀이1) 직순열로 봤을 때, 다시 말해, 여덟 자리가 다 다르다고 봤을 때,
남녀가 교대로 앉는 경우의 수는 $(2\times4!\times4!)$이다. 8로 나누면 되겠군.
풀이2) 남자A야, 일단 아무데나 앉아봐. 다 똑같은 자리거든?
남은 남자 3명을 배열하는 경우의 수는 3!, 여자 4명을 배열하는 경우의 수는 4!이다.

31. 입체도형을 색칠하는 방법의 수를 살펴보자. 목걸이 순열에 해당하므로 교과과정이 아니다.
하지만 원순열을 이해하는 핵심이 되는 내용, 같은 경우인지 아닌지를 판별하는 공부가 된다.

32. 정사각뿔의 각 면을 서로 다른 5가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.
⇒ 얘는 쉽다. 밑면을 칠하는 경우의 수 5에 나머지 원순열 3!이다.
직순열이라 치면 5!인데, 4개씩 똑같은 결과가 되겠지? $(5!\div4)$해도 되겠네.
※ [19]와 같은 문제다.

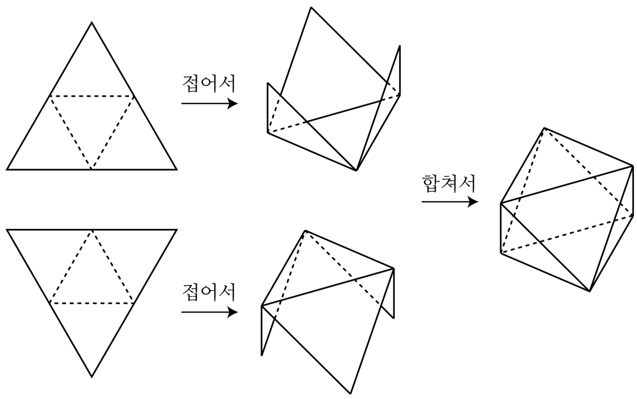
33. 정육면체를 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.
※ 얘는 [32]에 비해 매우 어려운 문제가 된다. [32]는 밑면이 독특해서 기준이 되어 줬던 것이거등.
⇒ 일단 첫 번째 색 A를 칠할 때, 고민 안해도 되겠지? 다 똑같은 면이야.
A가 칠해지면 마주보는 면에 뭐가 칠해지는 지에 따라 모두 다른 결과가 된다.
다시 말해, A를 칠하면 A가 칠해진 면의 마주보는 면은 독특해진다? 여기 칠하는 경우의 수가 5이고,
나머지는 4가지 색을 원순열 돌리는 것이다. 3!이네. 답은 $(5\times3!)$이다.

34. [33]을 직순열 배열 $6!$을 같은 것의 개수만큼으로 나눠서 풀어보자. 얼마로 나눌까?
답에 맞춰서 생각하면 24로 나눠야 되는데.. 이게 졸라 어렵다. 답은 [39]에 있다.

35. 개인적으로 [34]의 접근은 학생에게 추천하지 않는다. 머리가 과하게 나쁘지 않으면 [33]의 풀이는 될 것 같은데, [34]를 이해하려면 머리가 상당히 좋아야 한다는 느낌. 일단 [33]의 논법으로 몇 문제를 더 풀어보자.

36. 정사면체를 서로 다른 4가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.
⇒ 일단 첫 번째 색 A를 아무데나 칠해라. 남은 3가지 색을 원순열 돌리면 된다. $2!$이군.

37. 정팔면체를 서로 다른 8가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.
⇒ 먼저 아래와 같이 정팔면체를 만들 수 있다는 것을 이해하자.
이는 정팔면체를 정사각뿔 두 개를 붙인 것으로 이해하는 것보다 훌륭하다.



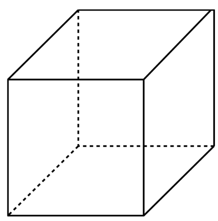
일단 첫 번째 색 A를 아무데나 칠해라. A가 칠해진 면과 마주보는 면에 칠하는 경우의 수는 7이다.
A가 칠해진 면과 붙은 세 개의 면에 세 가지 색을 골라서 칠해야 한다. 원순열이여, ${}_6C_3 \times 2!$이다.
남은 세 개의 면에 남은 세 가지 색을 칠하는 경우의 수는 $3!$이다. 답은 $7 \times {}_6C_3 \times 2! \times 3!$이다.

38. 정십이면체를 서로 다른 12가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.
⇒ 정십이면체의 한 면에는 5개의 오각형이 붙어 있다. 윗 문제 째려보면 $11 \times {}_{10}C_5 \times 4! \times 5!$ 되겠죵.

39. 정다면체를 칠하는 경우의 수는 $\dfrac{n!}{n \times (\text{한 면의 모서리의 수})}$가 된다.
이게.. 왜냐면.. 한 면 뜯어내고 남은 $(n-1)$면의 전개도를 펼쳐봐라. 모서리의 수로 나누는 이유가 보일 것이다.
그냥 나는 알고 있다고 보여준 거야. [33]이나 [37], [38] 풀던 방법으로 풀어.

40. 가로, 세로, 높이가 모두 다른 직육면체를 6가지 색을 모두 사용하여 색칠하는 방법의 수를 구하여라.
⇒ 첫 번째 색 A를 칠할 수 있는 경우의 수는 3이다. 마주보는 면에 칠하는 경우의 수는 5,
나머지는 직사각형 탁자 배열이라 $2 \times 3!$이다. 각자 짱구를 굴려보자.

41. 정육면체를 서로 다른 4가지의 색을 모두 이용하여 칠하려고 한다.
이웃하는 면은 같은 색으로 칠하지 않는다고 할 때, 칠하는 방법의 수를 구하여라.
⇒ 한 가지 색을 3번 쓸 수 없다. $2+2+1+1$로 칠해야 하는군.
2번 쓰는 색은 어차피 마주보는 면에 칠해야 한다. 2번 쓰는 색 2가지를 정하자.
이 2번 쓰는 색 2가지로 네 개의 면을 칠하는 경우는 모두 같은 경우가 된다.
나머지 2가지 색도 아무렇게나 칠해도 같은 경우 되네. 답은 ${}_4C_2$다.



※ 같은 경우인지 아닌지가 헷갈릴 수 있다. 많이 고민해보자.
※ 목걸이 순열에다가 같은 것이 있는 원순열이니까 교과과정 더블 위반이다.

수업이 곧 시작됩니다.

중복조합 [기초강의]

[학습목표]

1. 중복조합의 뜻과 계산방법을 안다.
2. 부정방정식과 중복조합의 관계를 이해하고 문제를 풀 수 있다.
3. 감소하지 않는 함수의 개수와 중복조합의 관계를 이해한다.

01. 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 경우의 수를 중복조합이라 하고 ${}_n\mathrm{H}_r$로 나타낸다.

⇒ 계속해서 이야기하겠지만 중복조합은 적용하는 방법이 매우 헷갈린다.
따라서 개인적으로는 이 중복조합의 정의를 거의 사용하지 않는다.
그래도 의미는 이해해야 하니까 몇 개 나열해보자.

02. 네 개의 문자 A, B, C, D 중 중복을 허락하여 2개를 고르는 방법의 수를 구하여라.

⇒ 나열해보자. AA, BB, CC, DD, AB, AC, AD, BC, BD, CD의 10가지다. ${}_4\mathrm{H}_2=10$이군.

03. 네 개의 문자 A, B, C, D 중 중복을 허락하여 3개를 고르는 방법의 수를 구하여라.

⇒ 막 나열하려고 보니까 좀 귀찮네. Case1) XYZ, Case2) XYY, Case3) XXX 인정?
Case1) ${}_4\mathrm{C}_3=4$, Case2) $4\times3=12$, Case3) 4
이므로 ${}_4\mathrm{H}_3=20$이다.

04. 두 개의 문자 A, B 중 중복을 허락하여 5개를 고르는 방법의 수를 구하여라.

⇒ AAAAA, AAAAB, AAABB, AABBB, ABBBB, BBBBB의 여섯 가지다. ${}_2\mathrm{H}_5=6$이다.
※ 중복 허락이다 보니 ${}_2\mathrm{H}_5$ 같은 것이 가능하다. ${}_2\mathrm{C}_5$는 0이다.

05. 아래와 같은 표를 만들 수 있다.

	중복불가	중복허용
순서 O	순열 ${}_n\mathrm{P}_r$	중복순열 ${}_n\Pi_r$
순서 X	조합 ${}_n\mathrm{C}_r$	중복조합 ${}_n\mathrm{H}_r$

순열이나 중복순열은 곱의 법칙의 차원에서 이해할 수 있으므로 거의 쓸 일이 없고,
중복조합은 활용도는 높지만 대부분의 문제를 부정방정식으로 돌려서 풀기 때문에 정의로서 인식하지 않는다.
조합은 당연히 개익숙해야 한다. 그러니 실제로 위의 표가 활용되는 일은 없다. 그냥 그렇다고.

06. ${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이다.

⇒ 중복조합을 계산하는 방법이다. [02], [03], [04]에 적용해서 확인해보자.
[02] ${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$, [03] ${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$, [04] ${}_2\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{C}_5=6$
※ 수능에 중복조합 1문항이 거의 고정이기에, 어떤 의미에서는 수능수학에서 가장 중요한 공식이라 할 수 있다.
증명이 매우 독특하다. 증명의 발상이 어려운 정도가 공식의 가치라는 점에서도 매우 중요한 공식이라 할 수 있다.
확실하게 암기해라. 나 암기하라는 말 거의 안 해. 나중에 헷갈리고 이러면 인간 아니다.

07. 증명은 일반적으로 칸막이 논법을 이용한다.

※ 개인적으로 매우 싫어하는 방식이다. 연결고리를 잡는 방법이 삘이 잘 안 온다.
이는 중복조합이 적용하기 어렵다는 점과 상통한다.
※ 중복조합 초심자라면 그냥 넘어가자. 나중에 부정방정식과의 관계에서 증명하면 된다. [19] 참고.

08. [04]를 예로 들어보자. 두 개의 문자 A, B 중 중복을 허락하여 5개를 고르는 방법의 수는 A와 B라는 두 개의 상자에 서로 구별할 수 없는 다섯 개의 공을 집어넣는 경우의 수와 같고, 이는 다섯 개의 공을 일렬로 세워놓고 하나의 칸막이를 설치하여 둘로 구별하는 경우의 수와 같다.

중복조합에서	[A상자][B상자]	공과 칸막이
AAAAA	[○○○○○][]	○○○○○∨
AAAAB	[○○○○][○]	○○○○∨○
AAABB	[○○○][○○]	○○○∨○○
AABBB	[○○][○○○]	○○∨○○○
ABBBB	[○][○○○○]	○∨○○○○
BBBBB	[][○○○○○]	∨○○○○○

따라서 구하는 경우의 수는 다섯 개의 공 ○와 하나의 칸막이 ∨를 일렬로 배열하는 경우의 수 ${}_6C_5$과 같다.

09. [03]을 예로 들어보자. 네 개의 문자 A, B, C, D 중 중복을 허락하여 3개를 고르는 방법의 수는 공 3개와 칸막이 3개를 일렬로 배열하는 경우의 수 ${}_6C_5$과 같다.
※ 오른쪽 표는 몇 개의 대응관계를 예로 든 것이다.
※ 너만 헷갈리는 것은 아니니까 안심하자.
정 헷갈리면 스트레스 받지 말고 집어 치우세요.

중복조합에서	[A][B][C][D]	공과 칸막이
AAA	[○○○][][][]	○○○∨∨∨
AAB	[○○][○][][]	○○∨○∨∨
BBC	[][○○][○][]	∨○○∨○∨
ACD	[○][][○][○]	○∨∨○∨○
BCD	[][○][○][○]	∨○∨○∨○

10. 일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_nH_r$은 택하는 개수인 r개의 공을 서로 다른 n개의 상자에 집어 넣는 경우의 수로 이해할 수 있고, 이는 공 r개와 칸막이 $n-1$개를 일렬로 나열하는 경우의 수로 이해할 수 있다.
$(n+r-1)$개의 자리 중에서 공 r개의 자리를 정해주면 되겠지? ${}_{n+r-1}C_r$과 같다.

11. $a+b+c+\cdots+n=r$의 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_nH_r$이다. (사실 a, b, c, $\cdots$, n은 n개가 아니다. 그냥 알아들어.)
※ 정의보다 적용하기 쉬우므로 이쪽을 정의처럼 기억해두도록 하자.
※ 이쪽을 외워라. 음이 아닌 정수(0 이상 정수), n이 뭔지, r이 뭔지.

12. 설명 전에 적용부터 해보자. 다음을 구하여라.
(1) 과일가게에서 사과, 배, 감, 망고를 합쳐서 10개를 구입하는 경우의 수
⇒ 이 문제를 네 개 중 10개를 뽑는 중복조합의 수 ${}_4H_{10}$로 읽을 수 있겠니?
별 것 아닌 것 같다가도 한 번씩 어렵다. 중복조합의 적용은 뭔가 intangible하다.
[사과]를 세 개 뽑는다는 것이 실제 사과가 아니라 사과의 표상?이랄까.
부정방정식으로 돌리자. 사과를 x개, 배를 y개, 감을 z개, 망고를 w개 산다고 할 때,
$x+y+z+w=10$의 음이 아닌 정수해의 개수를 찾는 문제로 읽으라는 것이다.
⇒ 여기서부터 ${}_4H_{10}$라서 ${}_{13}C_{10}$이 되는 것은 자동으로 나와야 돼.
(2) 서로 같은 7개의 음료수를 3명에게 나눠주는 경우의 수
풀이1) 음료수는 서로 구별할 수 없으므로 세 명이 각각 몇 개씩 받는지만 신경 쓰면 된다.
각각 a개, b개, c개를 받았다고 하면 $a+b+c=7$이군. ${}_3H_7={}_9C_7=36$이다.
풀이2) 음료수가 아니라 사람을 뽑아야 한다. 3명 중에서 중복을 허용해서 7개를 뽑아보자.
세 사람 A, B, C가 각각 2번, 4번, 1번 뽑힌다면 음료수를 2개, 4개, 1개 나눠주는 것과 대응시킬 수 있다.
※ 사람이 뽑는 것이 아니고 뽑혀야 한다. 게다가 중복을 허락하여. 역시 풀이2)는 어렵다. 관념적이랄까?
위의 밑줄 친 7개를 7개로 쓸지 7명으로 쓸지 고민했다. 뭐가 뭔지 모르겠다는 뜻이야.
(3) 5명의 후보에게 20명의 유권자가 무기명 투표하는 경우의 수
⇒ 무기명 투표라는 것은 누가 투표했는지는 고려하지 않고 표의 개수만을 생각하겠다는 것이다.
5명의 후보가 각각 받은 표의 수를 a, b, c, d, e라 하면, $a+b+c+d+e=20$이다. ${}_5H_{20}={}_{24}C_{20}$이다.
(4) $(a+b+c)^7$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수
풀이1) 개인적으로 이 문제는 서로 다른 3개 중 7개를 뽑는다는 것이 좀 받아들여지는데?
딱 표현을 못하겠지만 중복조합이란 것이 뭔가 형이상학적인 느낌이라 그런 듯.
풀이2) 전개했을 때 나오는 항들은 모두 $a^xb^yc^z$의 형태이다. $x+y+z=7$이므로 ${}_3H_7={}_9C_7=36$이다.
이 문제는 풀이2)가 오히려 살짝 억지부리는 느낌이다.

13. [11]을 이해해보자. ${}_3\mathrm{H}_7$로 예를 들어서 할게.

x, y, z 중 중복을 허락하여 7개를 뽑는 경우는 $x+y+z=7$의 음이 아닌 정수해와 일대일 대응된다.

예를 들면 $xxxxxxx$는 $(7,\ 0,\ 0)$으로 $xxxyyyz$는 $(3,\ 3,\ 1)$로 $yyyzzzz$는 $(0,\ 3,\ 4)$로 대응된다.

※ [08]이나 [09]에서 사용한 방식으로 이해해도 좋다. x상자, y상자, z상자에 7개의 공을 넣는다로.

14. 서로 구별할 수 없는 공 8개를 서로 다른 상자 3개에 넣는 경우의 수를 구하여라. (단, 빈 상자가 있을 수 있다.)

⇒ 각각의 상자에 들어가는 공의 개수를 a, b, c라 하자. 공을 서로 구별할 수 없기에 개수만의 문제가 된다.
방정식 $a+b+c=8$의 음이 아닌 정수해의 개수이므로 ${}_3\mathrm{H}_8$이다.

※ 빈 상자가 있을 수 없다면 방정식 $a+b+c=8$의 자연수 해의 개수가 된다.

※ 공을 서로 구별할 수 있다면 개수만의 문제가 아니다. 중복순열이 된다. 딱 봐도 3^8 맞지?

※ 나머지 베리에이션은 나중에 합시당.

15. 얼마 이상의 조건이 걸린 부정방정식을 풀어보자.

<u>음이 아닌 정수(0 이상 정수)</u>로 맞춰준다고 생각하면 된다.

16. 방정식 $a+b+c=10$에 대하여, 다음을 구하여라.

(1) 0 이상 정수해의 쌍 : 얘는 ${}_3\mathrm{H}_{10}$ 외워라. 제일 좋아하는 문제다.

(2) 자연수 해의 쌍 : 자연수는 1 이상의 정수다. 각각 1씩 빼줘서 0 이상 정수로 만들어주자.
⇒ $(a-1)+(b-1)+(c-1)=7$에서 합이 7인 세 0 이상 정수 $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$를 정해주는 경우의 수다.
따라서 ${}_3\mathrm{H}_7$이다. $a-1=a'$, $b-1=b'$, $c-1=c'$으로 치환해서 봐도 좋은데.. 필요한가?

(3) $a\geq 2$, $b\geq 1$, $c\geq 2$인 정수해의 쌍 : $(a-2)+(b-1)+(c-2)=5$에서 ${}_3\mathrm{H}_5$다.

17. 서로 구별할 수 없는 7개의 음료수를 A를 포함한 세 명에게 나눠줄 때,

(1) 세 명 모두 적어도 하나씩은 받도록 나눠주는 방법의 수를 구하여라.
풀이1) $a+b+c=7$인데, $a\geq 1$, $b\geq 1$, $c\geq 1$이다. 0 이상 정수로 맞춰. $(a-1)+(b-1)+(c-1)=4$니까 ${}_3\mathrm{H}_4$다.
풀이2) 어차피 구별도 안 되는 음료수들인데, 하나씩 미리 줘. 남은 4개를 세 명에게 주면 되니까 $x+y+z=4$에서.

(2) A가 2개 이상 받도록 나눠주는 방법의 수를 구하여라.
⇒ $a+b+c=7$인데, $a\geq 2$이다. b, c는 음이 아닌 정수. $(a-2)+b+c=5$니까 ${}_3\mathrm{H}_5$다.

18. $(a+b+c)^6$의 전개식의 항들 중에서 a를 포함한 항의 개수는 몇 개인지 구하여라.

⇒ 전개식의 항들은 $a^x b^y c^z$로 나타난다. $x+y+z=6$이고, $x\geq 1$이군. 이제 딱 보면 ${}_3\mathrm{H}_5$ 되겠지?

19. 부정방정식을 이용하여 중복조합을 조합으로 돌리는 증명.

귀찮으니까 예를 들어서 하자. $a+b+c=10$의 자연수해의 개수를 생각하자.
방법1) 위에서 다루었듯이 $(a-1)+(b-1)+(c-1)=7$로 돌리면 ${}_3\mathrm{H}_7$이다.
방법2) 자연수해는 $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=10$에서 더하기 2개를 선택하는 방법과 일대일대응이다.
예를 들어 3번째와 8번째 더하기를 선택하면 $(1+1+1)+(1+1+1+1+1)+(1+1)$로 해 $(3,\ 5,\ 2)$에 대응된다.
예를 들어 1번째와 2번째 더하기를 선택하면 $(1)+(1)+(1+1+1+1+1+1+1+1)$로 해 $(1,\ 1,\ 8)$에 대응된다.

위의 두 가지 방법을 비교하면 ${}_3\mathrm{H}_7$은 9개의 더하기 중 2개를 선택하는 ${}_9\mathrm{C}_2$와 같다는 것을 알 수 있다.

※ 방법2)의 발상은 재미있지만, 쓰지 말고 봉인하자. 방법1)이 개중요해서, 괜히 방법2)로 푼다고 지랄하다가 헷갈리면 안 돼.

20. $n(X)=r$, $n(Y)=n$일 때,

① $f: X\to Y$인 함수 f의 개수는 ${}_n\Pi_r$이다.

② $f: X\to Y$인 일대일함수 f의 개수는 ${}_n\mathrm{P}_r$이다.

③ $f: X\to Y$, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$인 함수 f의 개수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이다.

④ $f: X\to Y$, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\leq f(x_2)$인 함수 f의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다.

21. 그냥 다 써봤다. ①과 ②는 매우 당연하지? 안 당연하면 당연히 자살.

중복조합에서 배워야 하는 것은 ④인데, ③을 이해하면 저절로 이해가 될 것이다.

⇒ ③은 공역에서 치역(함숫값들의 집합)을 r개 선택해주면 화살표가 알아서 가는 것이다.
순서가 정해진 순열을 같은 것이 있는 순열을 이용해서 푸는 것과 같은 원리다.

⇒ 그럼 ④는 알겠지? 공역 n개 중 함숫값들을 r개 고르는데, 중복을 허락해서 고를 수 있는 것이다.

22. 다른 방법으로 생각할 수 있다. 공역의 원소가 a, b, c, $\cdots$, n이라 하자.

정의역에서 대응시키는 화살표 r개를 쏘는데, 이를 공역의 원소들이 나눠받아야 한다.

순서는 정해져 있으므로 몇 개씩 들어가는지만을 생각하면 된다.

$\Rightarrow$ $a+b+c+\cdots+n=r$의 0 이상 정수해의 개수다. ${}_n\mathrm{H}_r$이군.

※ 부정방정식으로 돌리는 발상이 다소 특이하다는 점과

감소하지 않는 함수의 개수는 나름 중요하다는 점에서 [19]의 ③을 외워라 그냥.

23. 다음을 구하여라.

(1) $1 \le a < b < c \le 7$인 정수 $(a,\ b,\ c)$ 쌍의 개수

$\Rightarrow$ 1, 2, 3, $\cdots$, 7 중에서 3개를 고르면 되겠지? 알아서 순서대로 a, b, c가 되는 것이다. ${}_7\mathrm{C}_3$이다.

(2) $1 \le a \le b \le c \le 7$인 정수 $(a,\ b,\ c)$ 쌍의 개수

$\Rightarrow$ 1, 2, 3, $\cdots$, 7 중에서 중복을 허락해서 3개를 고르면 되겠지? 알아서 a, b, c가 되는 것이다. ${}_7\mathrm{H}_3$이다.

※ 정의역이 $\{a,\ b,\ c\}$, 공역이 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7\}$인 함수로 생각해보자.

24. $1 \le a < b \le c < d \le 8$을 만족하는 정수 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 쌍의 개수를 구하여라.

풀이1) Case1) $1 \le a < b < c < d \le 8$, Case2) $1 \le a < b = c < d \le 8$

로 나누면 되겠다. Case1)은 ${}_8\mathrm{C}_4 = 70$, Case2)는 ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$이므로 답은 126이다.

풀이2) $1 \le a < b \le c < d \le 8$의 뒤쪽 세 변에 1씩을 더해보자. $b \le c$이니까 $b < (c+1)$이겠지?

$1 \le a < b < (c+1) < (d+1) \le 9$이 된다. 1, 2, 3, $\cdots$, 9 중에서 네 개 고르면 되겠네. ${}_9\mathrm{C}_4$다.

※ 결과가 간단해서 자꾸 쓰게 되지만, 이 풀이가 성립하는 것인지를 이해하는 것은 쉽지 않다.

$1 \le a < b \le c < d \le 8$의 정수해쌍과 $1 \le a < b < (c+1) < (d+1) \le 9$의 정수해쌍이 일대일대응되는지를 확인해야 한다.

※ 뒤의 네 변에서 1을 빼보자. $a < b$니까 $a \le (b-1)$이겠지? $1 \le a \le (b-1) \le (c-1) < (d-1) \le 7$가 된다.

다시 뒤의 두 변에서 1을 빼보자. $1 \le a \le (b-1) \le (c-1) \le (d-2) \le 6$다. ${}_6\mathrm{H}_4$가 되겠군.

우왕, ${}_9\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{H}_4$를 얻었다. 중복조합을 조합으로 돌리는 증명법을 하나 더 얻었다.

25. $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$일 때, 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하여라.

(가) $f(2) = 4$

(나) $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

$\Rightarrow$ (나)를 보고 화살표가 꼬일 수 없는 것을 확인하자.

$f(1)$은 1, 2, 3, 4 중에서, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$는 4, 5, 6, 7 중에서 선택해야 한다. 답은 $4 \times {}_4\mathrm{H}_3$이다.

26. $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$일 때, 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하여라.

(가) $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

(나) 치역의 최솟값은 2, 최댓값은 6이다.

$\Rightarrow$ (가)를 보고 화살표가 꼬일 수 없는 것을 확인하자. $f(1) = 2$, $f(5) = 6$ 고정이네.

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 선택해야 한다. 답은 ${}_5\mathrm{H}_3$이다. ${}_5\mathrm{H}_5$로 틀리는 애들 나오겠지?

27. $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$일 때, 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하여라.

(가) $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

(나) 치역의 원소의 개수가 3개다.

$\Rightarrow$ 일단 ${}_7\mathrm{C}_3$으로 치역 3개를 고르자. 그리고 ${}_3\mathrm{H}_5$ 치면 안 되겠지? 치역이 2개 이하가 돼버릴 수도 있으니까.

치역 1개짜리와 치역 2개짜리를 빼 줘야겠군. 치역 1개짜리는 3개고 (멍청하다면 $3 \times {}_1\mathrm{H}_5$로 생각해도 좋다.)

치역 2개짜리는 ${}_3\mathrm{C}_2 \times ({}_2\mathrm{H}_5 - 2)$다. 치역 2개 고르고, (가)를 만족하는 함수에서 치역 1개짜리 빼주고.

그래서 답은 ${}_7\mathrm{C}_3 \times ({}_3\mathrm{H}_5 - 3 - {}_3\mathrm{C}_2 \times ({}_2\mathrm{H}_5 - 2))$다. 계산하면 210이네.

※ 이 풀이가 이해가 되지 않는다면, 치역과 공역이 같은 함수의 개수를 공부할 필요가 있다고 알고 있자.

$\Rightarrow$ [22]를 째려보자. 치역 $\{a,\ b,\ c\}$를 고르고 a, b, c가 받는 화살표의 개수를 x, y, z라 하면

방정식 $x+y+z=5$의 $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$인 정수해의 개수 문제가 된다. 답은 ${}_7\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{H}_2$다.

수업이 곧 시작됩니다.

이항정리 [기초강의]

[학습목표]

1. 이항정리의 뜻을 안다.
2. 전개식에서 특정항의 계수를 구할 수 있다.
3. 이항계수의 성질을 알고 문제를 풀 수 있다.

01. $(a+b)^2$는 $a^2+2ab+b^2$이다.

$(a+b)^3$는 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$이다.

$(a+b)^4$는 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$이다.

$\vdots$

이처럼 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 이항정리라 한다.

02. $(a+b)^5$을 전개해보자. 직접 전개하면 나오겠지만 [01]의 식들을 째려보고 찍어봐.

$a^5+(\cdots)+b^5$은 당연하지?

$a^5+5a^4b+(\cdots)+5ab^4+b^5$ 이겠지?

$a^5+5a^4b+\square a^3b^2+\square a^2b^3+5ab^4+b^5$ 되겠지?

03. 직접 전개해보면 $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$이 나온다.

① 항들이 a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5이 나오는 것 확인하고

② 계수가 왜 1, 5, 10, 10, 5, 1이 나오는 지만 알면 되겠네.

04. $(a+b)^2$을 전개해보자. $(a+b)(a+b)$를 동류항 계산 없이 전개하면 $a^2+ab+ba+b^2$이다.

$(a+b)^3$을 전개해보자. $(a+b)(a+b)(a+b)$를 전개하면 $aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb$이다.

⇒ 동류항 정리를 하면 $\square a^3+\square a^2b+\square ab^2+\square b^3$가 될 것인데, 계수가 왜 1, 3, 3, 1일까?

$(a+b)(a+b)(a+b)$에서 a^3은 세 괄호에서 모두 a를 선택하는 경우의 수만큼 나온다.

$(a+b)(a+b)(a+b)$에서 a^2b는 세 괄호 중에서 b가 나오는 것을 하나 선택하는 경우의 수만큼 나온다.

05. [03]의 계수들은 차례로 ${}_5\mathrm{C}_0$, ${}_5\mathrm{C}_1$, ${}_5\mathrm{C}_2$, ${}_5\mathrm{C}_3$, ${}_5\mathrm{C}_4$, ${}_5\mathrm{C}_5$이다. 왜인지 살펴보자.

식 $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$를 동류항 계산 없이 쫙 전개하면 2^5개의 항이 나온다.

그 중 a^5은 1개다. a^4b는 몇 개일까? 다섯 개의 괄호 중 b가 나오는 괄호를 하나 선택하면 되므로 5개다.

a^3b^2은 다섯 개의 괄호 중에서 b가 나오는 괄호를 두 개 선택하는 경우의 수인 ${}_5\mathrm{C}_2=10$개가 나온다.

06. $(a+b)^6$을 전개하면 $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$이다.

① 일단 $\square a^6+\square a^5b+\square a^4b^2+\square a^3b^3+\square a^2b^4+\square ab^5+\square b^6$을 써 놓고

② 계수로 ${}_6\mathrm{C}_0$, ${}_6\mathrm{C}_1$, ${}_6\mathrm{C}_2$, ${}_6\mathrm{C}_3$, ${}_6\mathrm{C}_4$, ${}_6\mathrm{C}_5$, ${}_6\mathrm{C}_6$을 걸어주면 되겠네.

※ 항의 개수가 7개인 것도 체크하자.

07. 이항정리를 식으로 나타내면 $\underline{(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_ka^{n-k}b^k}$이다.

① 항들이 a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $\cdots$, b^n이다. 계수의 합은 항상 n인 것 확인.

② 계수들은 ${}_n\mathrm{C}_0$, ${}_n\mathrm{C}_1$, ${}_n\mathrm{C}_2$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_n$이다.

※ ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$이므로 순서를 모두 뒤집어 줘도 좋다.

⇒ $(a+b)^9$에서 a^3b^6의 계수는? ${}_9\mathrm{C}_3$이나 ${}_9\mathrm{C}_6$이나..

08. $(1+x)^n$도 전개해보자. [07]에다 $a=1$, $b=x$ 넣으면 되겠군.

$\underline{(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^k}$이다. 나중에 쓸 식이라서.

※ 계수를 뒤집어 달아도 좋다. ${}_n\mathrm{C}_n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x+{}_n\mathrm{C}_{n-2}x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_0x^n$로.

09. 이제 전개, 전개를 해보자.

(1) $(a+b)^5$: 앞에서 했다. [02], [03], [04]의 순서대로.

(2) $(x^2-2)^4$: $(x^2)^4+4(x^2)^3(-2)+6(x^2)^2(-2)^2+4(x^2)(-2)^3+(-2)^4$이다.

$\Rightarrow$ 정리하면 $x^8-8x^6+24x^4-32x^2+16$이다.

(3) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^4$: $(x^2)^4+4(x^2)^3\left(\dfrac{1}{x}\right)+6(x^2)^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+4(x^2)\left(\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(\dfrac{1}{x}\right)^4$이다.

$\Rightarrow$ 정리하면 $x^8+4x^5+6x^2+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^4}$이다. 항들의 차수가 3씩 낮아지는 이유를 확인해보자.

전개식의 항들을 째려보면 x^2과 $\dfrac{1}{x}$을 합해서 4번 곱해야 한다. x^2이 하나 줄면 $\dfrac{1}{x}$이 하나 느니까.

10. 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sum_{k=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_k2^k3^{10-k}$: 지금은 $(2+3)^{10}$인 것 보이지? 나중에 시키면 안 보일거야. 그때 한심해하자.

(2) $\sum_{k=0}^{12}{}_{12}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^{12-k}$: $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\right)^{12}$이라 1이다. 이항분포하고 다시 와서 보면서 한심해하자.

(3) $\sum_{k=0}^{8}{}_8\mathrm{C}_k2^k$: 1^{8-k}가 숨어 있달까. $(2+1)^8$이다. 이항계수의 성질 하다가 다시 와서 보면서 한심해하자.

11. $(a+b)^n$의 전개식에서 a^kb^{n-k}의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_k$이다.

$\Rightarrow$ ${}_n\mathrm{C}_{n-k}$라든가.

$\Rightarrow$ 전개식에서 특정 항의 계수를 물어본다.

12. 다음을 구하여라.

(1) $(2x-3)^5$의 전개식에서 x^2의 계수 : x^2이 나오는 항은 ${}_5\mathrm{C}_2(2x)^2(-3)^3$이다. 답은 -1080이다.

(2) $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수 : x^4이 나오려면 x^2이 두 번 곱해져야겠군. ${}_6\mathrm{C}_2(x^2)^2(2)^4$에서 답은 240이다.

(3) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수 :

x^3이 나오려면 x^2과 $\dfrac{1}{x}$을 각각 몇 번씩 곱해야 할까? 합해서 여섯 번 곱해야 하는데..

짱구를 굴려보면 x^2을 세 번, $\dfrac{1}{x}$을 세 번 곱해야 하는 것을 알 수 있다. ${}_6\mathrm{C}_3(x^2)^3\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$에서 답은 20이다.

※ 전개식은 $k=0$부터 $k=6$까지 ${}_6\mathrm{C}_k(x^2)^k\left(\dfrac{1}{x}\right)^{6-k}$의 합이다. ${}_6\mathrm{C}_k(x^2)^k\left(\dfrac{1}{x}\right)^{6-k}$를 정리하면 ${}_6\mathrm{C}_kx^{3k-6}$이므로,

$3k-6=3$에서 $k=3$을 얻어 풀 수 있다. 일반항이라 하는데, 별로 필요 없다. 그냥 대충 찍어서 풀어라.

(4) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항 : 상수항이 만들어지려면 x를 세 번, $\dfrac{2}{x}$를 세 번 곱해야겠죵? 답은 ${}_6\mathrm{C}_32^3$이다.

(5) $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^7$의 전개식에서 x^6의 계수 : x^3 몇 번에 $\dfrac{2}{x^2}$ 몇 번? 다섯 번, 두 번 해볼까? 어이쿠 아니네.

그럼 네 번, 세 번으로. 각이네. ${}_7\mathrm{C}_4(x^3)^4\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3$에서 $280x^6$이 나온다.

※ 일반항 ${}_7\mathrm{C}_k(x^3)^k\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^{7-k}$는 ${}_7\mathrm{C}_k2^{7-k}x^{5k-14}$이다. $5k-14=6$에서 $k=4$다. 계수 ${}_7\mathrm{C}_k2^{7-k}$에 넣어봐.

※ 항들이 차수 5개 간격으로 나오겠지? 일반항에서도 확인해봐.

예를 들어서 x^3의 계수를 물어보면? x^3항이 나오지 않는다. 0이라고 대답하나?

13. 다음을 구하여라.

(1) $(x+1)^5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$의 전개식에서 x^2의 계수 : 일단 다 전개해볼까? 확인하면 다음부터는 하지 않게 될거야.

준 식은 $(x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$이다. x^2은 $\left(10x^2\times\dfrac{1}{x}\right)$와 $(5x\times x)$로 나오겠네. 답은 15다.

(2) $(x+1)^5(x^2+1)$의 전개식에서 x^5의 계수 : 머리에 뇌 대신 우동사리가 들어 있다면 다 전개해라.

$(x+1)^5$에서 x^5항과 x^3항만 꺼내면 된다는 것을 알 수 있겠다. $(x^5+\cdots+10x^3+\cdots)(x^2+1)$에서 답은 11이다.

(3) $(x+1)^5(x+2)^4$의 전개식에서 x^2의 계수 : 앞부분 전개해야겠네. 해보자.

$(1+5x+10x^2+\cdots)(16+32x+24x^2+\cdots)$에서, 답은 $24+160+160=344$다.

(4) $(x+1)^4(x^2+x)^4$의 전개식에서 x^8의 계수 : 나름 함정 문제. 심심할까봐 시켜봤다.

호호. x^8이 어떻게 나오지? 식을 다시 째려보면 와 시바 $x^4(x+1)^8$이네. 답은 ${}_8\mathrm{C}_4$다.

14. $x=1$, $x=-1$, $x=i$ 같은 거 넣어서 계수들의 합을 구하는 문제가 있다.

⇒ 고1때 나오는 내용인데, 지금 전개되는 것과 헷갈릴까봐 써 놓는다.

15. $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 계수의 합이 3^6일 때, a의 값을 구하여라.

⇒ 이항정리 배웠다고 전개하면 우울해진다.

계수의 합은 $x=1$일 때 식의 값이야. $(a-1)^3=3^6$에서 $a=10$이다.

16. $(1-x+x^2)^n$의 전개식에서 x^k의 계수를 a_k라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$의 값을 n에 대한 식으로 나타내어라.

⇒ $x=1$을 대입하면 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$을 구할 수 있다.

$x=-1$을 대입하면 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}$을 구할 수 있다.

답은 $x=1$ 대입한 값에서 $x=-1$ 대입한 것 빼고 반 나눠주면 되겠네. $\dfrac{1-3^n}{2}$이다.

17. $(a+b+c)^n$의 전개식에서 $a^pb^qc^r$의 계수는 $\dfrac{n!}{p!q!r!}$이다.

※ 다항정리라고 할까. 은근히 자주 보이는 문제이다.

18. $(a+b+c)^7$의 전개식에서 다음 항의 계수를 구하여라.

(1) $a^2b^3c^2$: $(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$에서

a가 나오는 괄호 2개, b가 나오는 괄호 3개, c가 나오는 괄호 2개 고르면 되겠네.

${}_7\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_3$인데, 얘가 $\dfrac{7!}{2!5!}\times\dfrac{5!}{3!2!}$이고 $\dfrac{7!}{2!3!2!}$이 된다.

(2) a^3bc^3 : ${}_7\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_1=\dfrac{7!}{3!4!}\times\dfrac{4!}{1!3!}=\dfrac{7!}{3!1!3!}$

(3) b^4c^3 : ${}_7\mathrm{C}_0\times{}_7\mathrm{C}_4\times{}_3\mathrm{C}_3$..? 그냥 ${}_7\mathrm{C}_4$다.

(4) a^7 : 1이죵.. $\dfrac{7!}{7!0!0!}$이라고 써볼까?

19. 다음을 구하여라.

(1) $(2a-b+c)^5$의 a^2bc^2의 계수 : $(2a)^2(-b)(c)^2$의 계수는 $\dfrac{5!}{2!1!2!}$이다. 답은 -120이다.

(2) $(x^2+x+1)^5$의 x^4의 계수 : x^4은 $(x^2)^2(1)^3$과 $(x^2)(x)^2(1)^2$과 $(x)^4(1)$의 세 가지 방법으로 나온다.

각각의 계수는 $\dfrac{5!}{2!3!}=10$과 $\dfrac{5!}{1!2!2!}=30$과 $\dfrac{5!}{4!1!}=5$이다. 답은 45.

(3) $\left(x^2+1+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 상수항 : 상수항은 $(x^2)(1)\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$과 1^4으로 얻어진다. 답은 13이다.

20. $(a+b+c)^{10}$의 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

⇒ 계수들은 같은 것이 있는 순열이 된다. 항의 개수는?

⇒ 중복조합에서 다뤘지? ${}_3\mathrm{H}_{10}$이다.

21. 조합이 같은 것이 있는 순열이 되는 것을 느낀 적 있니? 같은 것이 있는 순열이 원래 조합을 포함하는 개념이야.

서로 다른 7개를 늘어놓고, ○, ○, ○, ×, ×, ×, ×를 일렬로 배열하는 방법의 수가 ${}_7\mathrm{C}_3$이다.

반대로, A, A, A, B, B, B, B를 나열하는 방법의 수는 7자리 중 A의 자리 3개를 선택하면 되므로 ${}_7\mathrm{C}_3$이다.

22. 서로 다른 7개의 공을 A에게 2개, B에게 2개, C에게 3개를 나눠주는 방법의 수를 구하여라.

⇒ A가 가져갈 것 2개를 고르고, 남은 5개 중에서 B가 가져갈 것 2개를 고르면 된다. ${}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2$이다.

⇒ 계산하면 ${}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{7!}{2!5!} \times \frac{5!}{2!3!} = \frac{7!}{2!2!3!}$이다. 같은 것이 있는 순열이 되는 이유는,

공 7개를 늘어놓고, A, A, B, B, C, C, C를 일렬로 배열해서 대응시키면 되기 때문이다.

23. 서로 다른 7개의 공을 2개, 2개, 3개의 세 묶음으로 나누어 3명에게 나눠주는 방법의 수를 구하여라.

⇒ 이 문제하고 헷갈리면 안 돼. 이 문제는 분할, 분배하는 문제다. $\left({}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times \frac{1}{2!}\right) \times 3!$이다.

24. 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$은 이항계수라고도 부른다. 그냥 그렇게 부르더라고.

이항계수의 성질을 공부하자. 아래 쓴 식들 정도는 외워줘야 한다.

① ${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$

② ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$

③ ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

④ ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$

⑤ ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_5 + \cdots = 2^{n-1}$

⑥ 하키스틱

증명은 ${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$을 이용해 수식으로도 해보고 조합의 의미로도 해 보자.

25. [24]의 ① ${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$의 증명

수식으로) $\frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$

조합론적으로) 서로 다른 n개 중 선택하지 않거나, n개를 모두 선택하는 경우의 수는 1이다.

26. [24]의 ② ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$의 증명

수식으로) $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

조합론적으로) 서로 다른 n개 중 r개를 선택하는 경우의 수는 선택되지 않는 $(n-r)$개를 고르는 경우의 수와 같다.

※ 조금 어렵게 말하면, r개를 선택하는 경우들과 $(n-r)$개를 선택하는 경우들 사이에 일대일대응을 만들 수 있다.

방법은 r개를 선택하는 경우 하나를 선택된 r개를 제외한 $(n-r)$개를 선택하는 경우로 대응시키면 된다.

27. [24]의 ③ ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$의 증명

수식으로) ${}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \frac{(n-r)\times(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r\times(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$

조합론적으로) A를 포함한 서로 다른 n개 중 r개를 선택하는 경우의 수를 생각하자.

이 경우의 수는 Case1) A가 선택되는 경우, Case2) A가 선택되지 않는 경우로 나눌 수 있다.

Case1)은 남은 $(n-1)$개 중 $(r-1)$개를 선택하면 되고, Case2)는 남은 $(n-1)$개 중 r개를 선택하면 된다.

여기서부터는 [08]의 $\underline{(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n}$를 쓴다.

28. [24]의 ④ ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$의 증명

증명1) $(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$에 $x=1$을 대입한다.

증명2) 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$의 부분집합의 개수는 2^n이다. 부분집합 X들을 원소의 개수에 의해 분할하자.

Case1) $n(X)=0$인 것 ${}_n\mathrm{C}_0$개, Case2) $n(X)=1$인 것 ${}_n\mathrm{C}_1$개, Case3) $n(X)=2$인 것 ${}_n\mathrm{C}_2$개, $\cdots$

Case$n$) $n(X)=n-1$인 것 ${}_n\mathrm{C}_{n-1}$개, Case$(n+1)$) $n(X)=n$인 것 ${}_n\mathrm{C}_n$개다.

29. [24]의 ⑤ ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$의 증명

증명) $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$에 $x=-1$을 대입한다.

$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n$이다. ${}_nC_{(짝)}$들은 더하고 ${}_nC_{(홀)}$들은 빼는 모양이네.

${}_nC_{(홀)}$들을 이항하면 $\sum {}_nC_{(홀)}$과 $\sum {}_nC_{(짝)}$이 서로 같음을 알 수 있다.

참고1) ②에 의해 n이 홀수일 때는 당연한 식이 된다. ${}_5C_0={}_5C_5$, ${}_5C_2={}_5C_3$, ${}_5C_4={}_5C_1$이므로

참고2) ③과 ④를 이용해 보일 수 있다. 예를 들면 아래와 같다.

${}_6C_1+{}_6C_3+{}_6C_4=({}_5C_0+{}_5C_1)+({}_5C_2+{}_5C_3)+({}_5C_4+{}_5C_5)$

${}_6C_0+{}_6C_2+{}_6C_4+{}_6C_6={}_5C_0+({}_5C_1+{}_5C_2)+({}_5C_3+{}_5C_4)+{}_5C_5$

30. [24]의 ⑥ 하키스틱 : 식으로 나타내면,

㉠ $\underline{{}_kC_k+{}_{k+1}C_k+{}_{k+2}C_k+\cdots+{}_nC_k={}_{n+1}C_{k+1}}$ 또는 ㉡ $\underline{{}_kC_0+{}_{k+1}C_1+{}_{k+2}C_2+\cdots+{}_nC_{n-k}={}_{n+1}C_{n-k}}$

이다. 둘 중 하나에 역하키스틱이라는 표현도 쓰는데, 써놓고 보면 당연히 같은 식이지?

증명) 하나를 바꿔주고 ③을 반복적용하면 된다. ${}_kC_k+{}_{k+1}C_k+{}_{k+2}C_k+{}_{k+3}C_k+\cdots+{}_nC_k$에서 ${}_kC_k={}_{k+1}C_{k+1}$이므로

$${}_kC_k+{}_{k+1}C_k+{}_{k+2}C_k+{}_{k+3}C_k+\cdots+{}_nC_k=({}_{k+1}C_{k+1}+{}_{k+1}C_k)+{}_{k+2}C_k+{}_{k+3}C_k+\cdots+{}_nC_k$$

$$=({}_{k+2}C_{k+1}+{}_{k+2}C_k)+{}_{k+3}C_k+\cdots+{}_nC_k={}_{k+3}C_{k+1}+{}_{k+3}C_k+\cdots+{}_nC_k=\cdots={}_nC_{k+1}+{}_nC_k={}_{n+1}C_{k+1}$$

※ ㉠이든 ㉡이든 식으로 적용하는 것을 헷갈린다. 파스칼의 삼각형에서 찾을 수 있으면 된다.

31. 아래의 [그림1]을 파스칼의 삼각형이라 한다. 수학 귀신 읽어 봤냐?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
⋮

[그림1]

양 옆으로 1들을 깔아놓고 빈 자리에 윗 줄의 두 개 더한 것을 쓴 거야.

32. 나오는 숫자들이 어째 익숙하지? [그림2]이기 때문이다. ${}_0C_0$은 그냥 분위기상 1이라 하자.

${}_0C_0$
${}_1C_0$ ${}_1C_1$
${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$
${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$
${}_4C_0$ ${}_4C_1$ ${}_4C_2$ ${}_4C_3$ ${}_4C_4$
${}_5C_0$ ${}_5C_1$ ${}_5C_2$ ${}_5C_3$ ${}_5C_4$ ${}_5C_4$
${}_6C_0$ ${}_6C_1$ ${}_6C_2$ ${}_6C_3$ ${}_6C_4$ ${}_6C_5$ ${}_6C_6$
⋮

[그림2]

${}_0C_0$
${}_1C_0$ ${}_1C_1$
${}_2C_0$ ${}_2C_2$
${}_3C_0$ ${}_3C_3$
${}_4C_0$ ${}_4C_4$
${}_5C_0$ ${}_5C_4$
${}_6C_0$ ${}_6C_6$
⋮

[그림3]

[24]의 ①에 의해 [그림3]의 숫자들은 모두 1이다.

[24]의 ③에 의해 [그림2]가 설명된다. 확인하자.

33. 파스칼의 삼각형에서 다음을 확인하자.

[24]의 ② : 당연하네.

[24]의 ④ : [27]의 [그림1]에서 각 줄을 옆으로 다 더해봐. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ⋯으로 확인 된다.

[24]의 ⑤ : 6번째 줄에서는 홀수 번째 것들의 합 $1+10+5$와 짝수 번째 것들의 합 $5+10+1$이 서로 같은 것이 당연하다.

7번째 줄에서는 $1+15+15+1$과 $6+20+6$이 서로 같은 것은 좀 신기하다. 아래 그림을 째려보면 이해할 수 있다.

1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

34. [24]의 ⑥은 식을 기억하는 것보다 파스칼의 삼각형에서 찾는 것을 연습해주자. 예 몇 개 들면 되겠지?

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad \underline{1} \\ 1 \quad \underline{2} \quad 1 \\ 1 \quad \underline{3} \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad \underline{4} \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad \underline{5} \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad \boxed{15} \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ \vdots \end{array}$$

$${}_{1}\mathrm{C}_{1}+{}_{2}\mathrm{C}_{1}+{}_{3}\mathrm{C}_{1}+{}_{4}\mathrm{C}_{1}+{}_{5}\mathrm{C}_{1}={}_{6}\mathrm{C}_{2}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ \underline{1} \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad \underline{3} \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad \underline{6} \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad \underline{10} \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad \boxed{20} \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ \vdots \end{array}$$

$${}_{2}\mathrm{C}_{0}+{}_{3}\mathrm{C}_{1}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{6}\mathrm{C}_{3}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad \underline{1} \\ 1 \quad 3 \quad \underline{3} \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad \underline{6} \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad \underline{10} \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad \underline{15} \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad \boxed{35} \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \end{array}$$

$${}_{2}\mathrm{C}_{2}+{}_{3}\mathrm{C}_{2}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+{}_{6}\mathrm{C}_{2}={}_{7}\mathrm{C}_{3}$$

밑줄 친 숫자들의 합이 네모 안에 나타난다. 대각선으로 쭉 따라서 더한 값이 마지막에 샥 꺾은 자리에 있다.
하키스틱이란 이름도 파스칼의 삼각형에서 나온 것이다.

35. 다음을 구하여라.

(1) ${}_{19}\mathrm{C}_{0}+{}_{19}\mathrm{C}_{1}+{}_{19}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_{19}$: [24]의 ④에 의해 2^{19}이다.

(2) ${}_{19}\mathrm{C}_{1}+{}_{19}\mathrm{C}_{3}+{}_{19}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_{19}$: [24]의 ⑤에 의해 2^{18}이다. 2^{19}의 절반으로 기억하자.

(3) ${}_{19}\mathrm{C}_{0}+{}_{19}\mathrm{C}_{1}+{}_{19}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_{9}$: [24]의 ④와 ②에 의해 절반이다. 2^{18}이다.

※ ${}_{18}\mathrm{C}_{0}+{}_{18}\mathrm{C}_{1}+{}_{18}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{18}\mathrm{C}_{9}$은? 예쁘게는 안 된다. $\dfrac{2^{18}+{}_{18}\mathrm{C}_{9}}{2}$이다.

(4) ${}_{2}\mathrm{C}_{2}+{}_{3}\mathrm{C}_{2}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{2}$: 하키스틱으로 ${}_{11}\mathrm{C}_{3}$이다. 파스칼의 삼각형에서 표시해보자.

(5) ${}_{2}\mathrm{C}_{0}+{}_{3}\mathrm{C}_{1}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{8}$: 하키스틱으로 ${}_{11}\mathrm{C}_{8}$이다. 파스칼의 삼각형에서 표시해보자.

36. 별로 안 중요한데, 가끔 보이는 공식들이다. 외울 것 까지는 없지만, 유도는 한 번씩 해 보자.

⑦ ${}_{n}\mathrm{C}_{1}+2{}_{n}\mathrm{C}_{2}+3{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+n{}_{n}\mathrm{C}_{n}=n\cdot 2^{n-1}$

⑧ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{1}}{2}+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}{3}+\cdots+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{n}}{n+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

⑨ $(1+x)^n$에 $x=i$를 대입해서 나오는 식들

증명은 [08]의 $\underline{㉠\ (1+x)^n={}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}x+{}_{n}\mathrm{C}_{2}x^2+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}x^n}$에서 시작한다.

37. [36]의 ⑦ ${}_{n}\mathrm{C}_{1}+2{}_{n}\mathrm{C}_{2}+3{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+n{}_{n}\mathrm{C}_{n}=n\cdot 2^{n-1}$의 증명

증명) ㉠의 양변을 미분하자. $n(1+x)^{n-1}={}_{n}\mathrm{C}_{1}+2{}_{n}\mathrm{C}_{2}x+3{}_{n}\mathrm{C}_{3}x^2+4{}_{n}\mathrm{C}_{4}x^3+n{}_{n}\mathrm{C}_{n}x^{n-1}$이다.

$x=1$을 대입하면 ⑦을 얻을 수 있다.

※ 다른 증명 [41]을 이용할 수 있다. [42]에 있다.

※ 이항분포의 평균과 관련있다. 나중에 다시 와서 확인하자.

38. [36]의 ⑧ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{1}}{2}+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}{3}+\cdots+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{n}}{n+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$의 증명

증명) ㉠의 양변을 적분하자. $\dfrac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}={}_{n}\mathrm{C}_{0}x+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{1}}{2}x^2+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}{3}x^3+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{3}}{4}x^4+\cdots+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{n}}{n+1}x^{n+1}+C$이다.

$x=0$을 대입하면 $C=\dfrac{1}{n+1}$을 얻을 수 있다. $x=1$을 대입하면 ⑧을 얻을 수 있다.

39. [36]의 ⑨ $(1+x)^n$에 $x=i$를 대입해서 나오는 식들

※ $x=-1$을 대입하여 $\sum{}_{n}\mathrm{C}_{(홀)}$과 $\sum{}_{n}\mathrm{C}_{(짝)}$을 구할 수 있었듯이, $x=i$를 대입하면
$\sum{}_{n}\mathrm{C}_{(4k+1)}$, $\sum{}_{n}\mathrm{C}_{(4k+2)}$, $\sum{}_{n}\mathrm{C}_{(4k+3)}$, $\sum{}_{n}\mathrm{C}_{(4k)}$를 구할 수 있다.

※ $(1+i)^2=2i$임을 이용하여 $(1+i)^n$를 계산할 수 있다는 것이 포인트다.
우변은 (실수)+(실수)i로 정리해야 한다. 문제를 통해서 보자.

40. 다음을 구하여라.

(1) ${}_{10}\mathrm{C}_1+2{}_{10}\mathrm{C}_2+3{}_{10}\mathrm{C}_3+\cdots+10{}_{10}\mathrm{C}_{10}$: [36]의 ⑦에 의해 10×2^9이다.

※ 외울 수 있겠냐? $(1+x)^{10}$의 전개식 양변을 미분해서 찾아갈 수 있도록 연습해두자.

(2) $2{}_{10}\mathrm{C}_1+2^2{}_{10}\mathrm{C}_2+2^3{}_{10}\mathrm{C}_3+\cdots+2^{10}{}_{10}\mathrm{C}_{10}$: 얘는 $(1+2)^{10}-{}_{10}\mathrm{C}_0$이다. [10]의 (3) 봐봐.

(3) $\sum_{k=0}^{8}(k-2){}_8\mathrm{C}_k$: $\sum_{k=0}^{8}k{}_8\mathrm{C}_k-2\sum_{k=0}^{8}{}_8\mathrm{C}_k=8\times2^7-2\times2^8$이다.

(4) ${}_{16}\mathrm{C}_0-{}_{16}\mathrm{C}_2+{}_{16}\mathrm{C}_4-{}_{16}\mathrm{C}_6+\cdots+{}_{16}\mathrm{C}_{16}$: $(1+x)^{16}={}_{16}\mathrm{C}_0+{}_{16}\mathrm{C}_1x+{}_{16}\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_{16}\mathrm{C}_{16}x^{16}$에 $x=i$를 대입하자.

좌변은 $(1+i)^2=2i$에서 2^8이다. 우변은 실수부분과 허수부분으로 정리하자.

$({}_{16}\mathrm{C}_0-{}_{16}\mathrm{C}_2+{}_{16}\mathrm{C}_4-\cdots+{}_{16}\mathrm{C}_{16})+({}_{16}\mathrm{C}_1-{}_{16}\mathrm{C}_3+{}_{16}\mathrm{C}_5-\cdots-{}_{16}\mathrm{C}_{15})i$이다. 답은 2^8이다.

※ ${}_{16}\mathrm{C}_1-{}_{16}\mathrm{C}_3+{}_{16}\mathrm{C}_5-\cdots-{}_{16}\mathrm{C}_{15}$의 값은 0이다.

※ ${}_{16}\mathrm{C}_0+{}_{16}\mathrm{C}_2+{}_{16}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{16}\mathrm{C}_{16}=2^{15}$이다. (4)와 더해서 반으로 나누면 ${}_{16}\mathrm{C}_0+{}_{16}\mathrm{C}_4+{}_{16}\mathrm{C}_8+{}_{16}\mathrm{C}_{12}+{}_{16}\mathrm{C}_{16}=2^{14}+2^7$다.

$\Rightarrow$ ${}_{16}\mathrm{C}_2+{}_{16}\mathrm{C}_6+{}_{16}\mathrm{C}_{10}+{}_{16}\mathrm{C}_4=2^{14}-2^7$이다. 말하자면 4로 나눈 나머지가 같은 것들의 합을 구할 수 있다.

(5) ${}_{21}\mathrm{C}_0-{}_{21}\mathrm{C}_2+{}_{21}\mathrm{C}_4-{}_{21}\mathrm{C}_6+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{20}$

$(1+x)^{21}$에 $x=i$를 대입하자. 좌변은 $(2i)^{10}(1+i)=-2^{10}-2^{10}i$이다.

우변은 $({}_{21}\mathrm{C}_0-{}_{21}\mathrm{C}_2+{}_{21}\mathrm{C}_4-\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{20})+({}_{21}\mathrm{C}_1+{}_{21}\mathrm{C}_3+{}_{21}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{21})i$이다. 답은 -2^{10}이다.

(6) ${}_{21}\mathrm{C}_1-{}_{21}\mathrm{C}_3+{}_{21}\mathrm{C}_5-{}_{21}\mathrm{C}_7+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{21}$

(5)를 째려보자. 답은 -2^{10}이다.

41. 수능에는 안 나오지만 원래 중요한 공식 : $\underline{k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}$

증명1) $k{}_n\mathrm{C}_k=k\times\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n\times\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

증명2) 서로 다른 n명 중 k명을 뽑고 그 중 대표 한명을 뽑는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_k\times k$이다.

이는 대표 한 명을 먼저 뽑고, 대표 $(k-1)$명을 뽑는 경우의 수 $n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$과 같다.

42. 다음을 구하여라.

(1) ${}_{10}\mathrm{C}_1+2{}_{10}\mathrm{C}_2+3{}_{10}\mathrm{C}_3+\cdots+10{}_{10}\mathrm{C}_{10}$: [40]의 (1)에서 풀었던 문제다. 확인해봐.

※ 시그마로 쓰면 $\sum_{k=1}^{10}k{}_{10}\mathrm{C}_k$다. [41]의 공식을 사용하면 $\sum_{k=1}^{10}10{}_9\mathrm{C}_{k-1}$이군 $10\sum_{k=1}^{10}{}_9\mathrm{C}_{k-1}=10\times2^9$이다.

시그마 밖으로 k를 빼기 위해서 [41]의 공식을 사용하였다. 확인하자.

(2) ${}_{10}\mathrm{C}_1+2^2{}_{10}\mathrm{C}_2+3^2{}_{10}\mathrm{C}_3+\cdots+10^2{}_{10}\mathrm{C}_{10}$: 살짝 어려워서 굳이 다룰 필요가 있을까 싶은 문제. 넘어가도 좋다.

$k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$과 마찬가지로 $k(k-1){}_n\mathrm{C}_k=n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$인 것을 알 수 있다.

이에 따라 $\sum_{k=2}^{n}k(k-1){}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=2}^{n}n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}=n(n-1)2^{n-2}$이다.

또 $\sum_{k=2}^{n}k(k-1){}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n}k(k-1){}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n}k^2{}_n\mathrm{C}_k-\sum_{k=1}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k$이며 $\sum_{k=1}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot2^{n-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{n}k^2{}_n\mathrm{C}_k=n(n-1)2^{n-2}+n\cdot2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}$이다. 답은 110×2^8이다.

※ 이 문제에서 시그마가 0부터냐, 1부터냐 2부터냐는 원래 헷갈린다. 0되는 값이 있어서 그러니, 꼼꼼하게 살펴 보자.

※ 이항분포의 $\mathrm{E}(X^2)$이나 분산과 관련한다. 이항분포를 공부했다면 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$를 이용해서 구해보자.

$X\sim\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$일 때, $\mathrm{E}(X)=\dfrac{n}{2}=\sum_{k=0}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$이므로 $\sum_{k=0}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot2^{n-1}$이다.

$\mathrm{V}(X)=\dfrac{n}{4}$은 $\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\sum_{k=0}^{n}k^2{}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{n}{2}\right)^2$이므로 $\sum_{k=0}^{n}k^2{}_n\mathrm{C}_k=n(n+1)2^{n-2}$이다.

수업이 곧 시작됩니다.

확률 [기초강의]

[학습목표]

1. 확률의 정의를 안다.
2. 조건부 확률의 뜻을 알고 문제를 풀 수 있다.
3. 독립과 종속의 뜻을 알고, 독립시행 문제를 풀 수 있다.

01. 시행과 사건의 뜻.

① 시행 : 어떤 일을 하는 것

② 표본공간 : 시행의 가능한 모든 결과들의 집합

$\Rightarrow$ 근원사건 : 표본공간의 원소

③ 사건 : 표본공간의 부분집합

02. 사건은 집합이므로, 벤다이어그램으로 나타낼 수 있고, 여집합, 합집합, 교집합 등의 집합 연산이 가능하다.

① 전사건 S : 반드시 일어나는 사건 (표본공간)

② 공사건 $\varnothing$: 절대로 일어나지 않는 사건

③ A의 여사건 A^c : A가 일어나지 않는 사건

④ A와 B의 합사건 $A\cup B$: A 또는 B가 일어나는 사건

⑤ A와 B의 곱사건 $A\cap B$: A와 B가 동시에 일어나는 사건

⑥ A와 B가 서로 배반사건이다. : $A\cap B=\varnothing$

03. 주사위를 던지는 시행에 대하여 다음 사건을 정의하여라.

(1) 사건 A : 짝수가 나온다. $\Rightarrow$ $A=\{2,\ 4,\ 6\}$

(2) 사건 B : 3 이하가 나온다. $\Rightarrow$ $B=\{1,\ 2,\ 3\}$

(3) 사건 A^c $\Rightarrow$ $A^c=\{1,\ 3,\ 5\}$

(4) 사건 $A\cap B$ $\Rightarrow$ $A\cap B=\{2\}$

04. 사건의 확률의 뜻.

① 확률 : 근원사건들이 가지고 있는 각각이 일어날 가능성

② 사건의 확률 : 사건 내의 근원사건들이 가지는 확률의 합

$\Rightarrow$ 사건 A의 확률을 $\mathrm{P}(A)$로 나타낸다.

※ 사실 가능성이라는 말이 좀 비겁하다. 순환정의라는 느낌. 상식적인 판단이 중요하다.
주사위를 던졌을 때 주사위가 깨질 확률은 상식적으로 0으로 본다.

05. 흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공 3개를 꺼낼 때,

(1) 표본공간을 구하고, 근원사건들의 확률을 각각 구하여라.

$\Rightarrow$ 표본공간은 {흰 공 3개, 흰 공 2개와 검은 공 1개, 흰 공 1개와 검은 공 2개, 검은 공 3개}이다.

순서대로 $\{www,\ wwb,\ wbb,\ bbb\}$로 나타내자. 확률은 순서대로 $\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}$, $\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}$, $\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}$, $\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}$이다.

(2) 흰 공이 2개 이하가 나오는 사건을 A라 할 때, $\mathrm{P}(A)$를 구하여라.

$\Rightarrow$ $A=\{wwb,\ wbb,\ bbb\}$이다. $\mathrm{P}(A)=\frac{18}{35}+\frac{12}{35}+\frac{1}{35}$이다.

(3) 사건 A^c을 설명하고, $\mathrm{P}(A^c)$을 구하여라.

$\Rightarrow$ 흰 공이 3개 이상이 나오는 사건이다. $A^c=\{www\}$이고 $\mathrm{P}(A^c)=\frac{4}{35}$이다.

(4) 모두 같은 색의 공이 나오는 사건을 B라 할 때, 사건 $A\cap B$를 설명하고, $\mathrm{P}(A\cap B)$을 구하여라.

$\Rightarrow$ 모두 검은 공이 나오는 사건이다. $A\cap B=\{bbb\}$이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{35}$이다.

06. 확률의 성질 : 당연하다는 것 확인.

① $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

② $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

③ $\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)$

④ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

※ $\mathrm{P}(A)$가 가지는 성질, 연산법칙 등은 $n(A)$와 매우 유사하다.

07. 표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 결과가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때,

사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$이다.

※ 복잡한 이야기가 약간 전개되지만, 결국 많은 확률문제를 $\dfrac{(\text{사건의 경우의 수})}{(\text{전체 경우의 수})}$로 풀 수 있다.

08. 여기서 같은 정도로 기대될 때라는 말이 많은 내용을 함의한다.

흰 공 2개와 검은 공 1개가 들어 있는 주머니에서 공 1개를 꺼내는 시행을 생각하자.

표본공간은 흰 공이 나오는 사건과 검은 공이 나오는 사건의 두 가지지만, 확률은 각각 $\dfrac{2}{3}$와 $\dfrac{1}{3}$이다.

몇 가지 방법으로 설명할 수 있지만, 결국은 상식적으로, 당연한 감각에 의해 판단하라고 말하게 된다.

09. 주사위 두 개를 던지는 시행에서 두 눈이 모두 1이 나올 확률을 구하여라.

⇒ 두 개의 주사위가 서로 구별되지 않는다면, 전체 경우의 수는 21가지가 되고,
이에 의해서는 올바르게 확률을 부여할 수 없다.

⇒ 두 개의 주사위가 서로 구별된다면, 전체 경우의 수는 36가지가 되고,
이 중 $(1,\ 1)$이 나오는 사건은 1가지다. 문제의 답은 $\dfrac{1}{36}$이다.

※ 주사위 두 개를 던지는 시행에서 두 눈의 합이 3이 나올 확률은 $\dfrac{2}{36}$이다.

※ 확률문제에서 던져지는 주사위는 모두 서로 구별되는 것으로, 즉, 다른 것으로 취급해야 한다.

※ 깊게 파고 들어가면 각각의 주사위가 던져지는 시행이 독립이라든가 이런 이야기가 들어와야 할 것이다.
그렇게까지는 생각할 필요는 없다. 그저 상식적으로..

10. 동전 2개를 던져서 하나는 앞면, 하나는 뒷면이 나올 확률을 구하여라.

⇒ 두 개의 동전은 서로 다른 것으로 봐야한다. 전체 앞앞, 앞뒤, 뒤앞, 뒤뒤 중 두 경우, 답은 $\dfrac{1}{2}$이다.

※ 서로 구별할 수 없는 동전 2개를 던진 결과 중 하나를 선택했을 때, 하나는 앞면, 하나는 뒷면인 결과를 선택할 확률은?

⇒ 이 문제의 답은 $\dfrac{1}{3}$이다. 암묵적인 약속이라고 할지, 뉘앙스라고 할지.. 알아서 스스로 납득해야 하는 부분이 있다.

11. 주머니에서 공을 뽑는 시행의 확률문제에서는, 주머니에 들어 있는 공을 모두 서로 다른 것으로 봐야 한다.

※ 일반적으로 문제에 모든 공이 뽑힐 확률이 같다는 말을 준다.

※ 흰 공 2개와 검은 공 1개가 들어 있는 주머니에서 공 1개를 꺼내는 시행을 생각하자.
흰 공 A, 흰 공 B, 검은 공 C로 보면 편안하게 문제를 풀 수 있다.

12. 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 공 2개를 꺼낼 때, 흰 공이 2개 나올 확률을 구하여라.

서로 다른 여섯 개의 공 중 두 개를 선택하는 것이다. 전체 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2$, 사건의 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$이다.

13. [12]의 문제를 학생들에게 풀게 하면 다음과 같은 풀이를 볼 수 있다.

① $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}$: 문제의 발문에 가장 부합하는 풀이. 추천.

② $\dfrac{4\cdot 3}{6\cdot 5}$: 순서대로 하나씩 뽑았다고 봐도 무방하다. 하지만 문제에 따라 귀찮을 수 있다.

③ $\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{5}$: 조건부 확률과 곱셈정리를 이용한 풀이. 근데 지가 뭘 했는지도 모를 거야.

⇒ 다음 문제에 이 세 가지 풀이를 적용하고 왜 ①을 추천하는지 생각해보자.

14. 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 공 2개를 꺼낼 때, 흰 공이 1개, 검은 공이 1개가 나올 확률을 구하여라.

① $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}$: 좋아. 아주 안정적이야. 분자는 흰 공 A, B, C, D에 검은 공 a, b의 조합의 수라고 생각하면 되겠지?

② $\dfrac{4 \cdot 2 + 2 \cdot 4}{6 \cdot 5}$: 분모에 순서가 있으니, 분자에도 순서를 줘야 한다. 검→흰과 흰→검이 가능하다.

③ $\dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{4}{5}$: ②와 마찬가지인데, 두 개의 시행으로 나눠서 이해한 것이다.

※ 공을 4개 뽑았을 때, 흰 공 2개, 검은 공 2개 나올 확률 같은 문제를 풀면 ②나 ③은 돌아버릴 것.

15. 다섯 사람 a, b, c, d, e를 일렬로 나열할 때,

(1) a와 b가 이웃하지 않을 확률을 구하여라.

(2) a와 b가 이웃하거나 c와 d가 이웃할 확률을 구하여라.

(3) a와 b가 이웃하거나 b와 c가 이웃할 확률을 구하여라.

⇒ 별 말이 없으면 $\dfrac{(\text{사건의 경우의 수})}{(\text{전체 경우의 수})}$로 풀면 된다. 보통 임의로 나열한다는 말을 준다.

a가 관종이라 맨 앞에 서기 좋아하는 성향이 있다든가.. 하지 않는 것으로.

전체 경우의 수는 5!, (1)의 경우의 수는 72, (2)의 경우의 수는 72, (3)의 경우의 수는 84다.

16. 주머니에 1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률을 구하여라.

⇒ 복잡한 이야기가 숨어 있는데, 쉬운 내용만 보자. 5개의 공을 모두 다른 것으로 봐야 한다. 두 1을 1A, 1B로 보자.

⇒ 전체 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_4 \times 4!$이고, 사건의 경우는 $1\mathrm{A} \le 1\mathrm{B} \le 2 \le 3$, $1\mathrm{B} \le 1\mathrm{A} \le 2 \le 3$, ⋯ 등의 8가지다.

17. 주머니에 a, a, a, b, b, c의 문자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열할 때, 같은 문자끼리는 이웃하지 않게 배열될 확률을 구하여라.

⇒ 모두 서로 다른 것으로 봐야 한다. $a1$, $a2$, $a3$, $b1$, $b2$, c로 보고, 분모는 ${}_6\mathrm{C}_4 \times 4!$이다.

사건의 경우는 조합이 $aabb$인 것 24가지, 조합이 $aabc$인 것 72가지, 조합이 $abbc$인 것 36가지다.

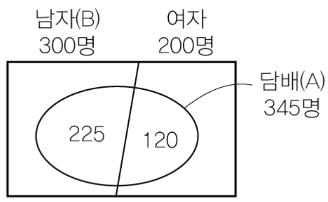
18. 조건부 확률 $\mathrm{P}(B|A)$의 뜻 : 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률

※ 조건부 확률 표현의 |(바)는 조건제시법에서 봤지? 조건을 나타내는 기호이다.

다시 말해, $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A라는 조건에서 사건 B가 일어날 확률

※ 자연스러운 정의라 별 다른 내용을 공부하지 않아도 문제를 다룰 수 있다.

19. 오른쪽 벤다이어그램과 같은 구성을 가지는 학생 500명을 자루에 넣고 잘 섞은 다음 한 명을 뽑았다. 다음 식의 의미를 표현하고 구하여라.



(1) $\mathrm{P}(A|B)$: 남자일 때 담배를 피울 확률이다. $\dfrac{225}{300}$이다.

(2) $\mathrm{P}(A \cap B)$: 남자이면서 담배를 피울 확률이다. $\dfrac{225}{500}$이다.

(3) $\mathrm{P}(B|A)$: 담배를 피울 때 남자일 확률이다. $\dfrac{225}{345}$이다.

(4) $\mathrm{P}(A^c|B)$: 남자일 때 담배를 피우지 않을 확률이다. $\dfrac{75}{300}$이다.

(5) $\mathrm{P}(A|B^c)$: 여자일 때 담배를 피울 확률이다. $\dfrac{120}{200}$이다.

(6) $\mathrm{P}(A \cap B^c)$: 여자이면서 담배를 피울 확률이다. $\dfrac{120}{500}$이다.

20. 한 개의 주사위를 던져서 2 이하가 나오는 사건을 A, 소수가 나오는 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(B|A)$의 값을 구하여라.

⇒ $\mathrm{P}(A)$는 $\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A|B)$는 소수 2, 3, 5 중 2 이하인 것이 1개이므로 $\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B|A)$는 1, 2 중 소수는 1개이므로 $\dfrac{1}{2}$다.

※ $\mathrm{P}(A|B)$를 구할 때는 사건 B가 표본공간인 것처럼, $\mathrm{P}(B|A)$를 구할 때는 사건 A가 표본공간인 것처럼 다루면 된다.

21. 조건부 확률의 정의 : $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

정의에 의해 당연하다. 사건 A를 표본공간으로 하고, A에 속하는 B만을 사건으로 보는 것이다.

※ $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$로 다루는 경우가 많다. [07], [19] 참고.

22. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)$: 확률의 곱셈정리

※ 식의 의미는 (A가 일어날 확률)×(A가 일어났을 때, B가 일어날 확률)이다.

⇒ 결과가 두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률 나오는 것이 당연하지?

※ 반대로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$도 성립한다.

23. 3개의 당첨 제비를 포함한 12개의 제비가 있다. 갑, 을의 순서로 서로 1개씩 제비를 뽑을 때, 갑은 당첨 제비를 뽑지 못하고 을만 당첨 제비를 뽑을 확률을 구하여라. (단, 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

⇒ 유치원생에게 풀게 해도 $\dfrac{9}{12}\times\dfrac{3}{11}$으로 푼다. 그런데 생각해보면 여기서 $\dfrac{3}{11}$이 조건부 확률이다.

갑이 당첨제비를 뽑지 못했을 때, 을이 당첨제비를 뽑을 확률이다.

⇒ 갑이 당첨인 사건을 갑, 을이 당첨인 사건을 을이라 하면, $\mathrm{P}(\text{갑}^c)=\dfrac{9}{12}$, $\mathrm{P}(\text{을}|\text{갑}^c)=\dfrac{3}{11}$이고

구하는 확률 $\mathrm{P}(\text{갑}^c\cap\text{을})$을 $\mathrm{P}(\text{갑}^c)\times\mathrm{P}(\text{을}|\text{갑}^c)$로 구한 것이다.

※ 조건부 확률의 정의가 자연스럽기 때문. 어떤 의미에서는 안 배워도 된다니까?

24. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(B|A)=0.5$, $\mathrm{P}(B|A^c)=0.3$일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값을 구하여라.

⇒ 수능에 출제가 강력하게 예상되는 유형이다. 틀리면 자살해야 하는 킬러문항.

풀이1) 정의대로 가보자. $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=0.5$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=0.2$이고,

$\mathrm{P}(B|A^c)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap A^c)}{\mathrm{P}(A^c)}=0.3$에서 $\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)=0.6$이므로 $\mathrm{P}(B\cap A^c)=0.18$이다.

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B\cap A)+\mathrm{P}(B\cap A^c)=0.38$이다.

풀이2) 벤다이어그램을 그려서 의미를 통해 적당히 구해보자.

사건 B는 사건 A에 포함되는 부분과 포함되지 않는 부분이 있다.

포함되는 부분은 $\mathrm{P}(A)$의 0.5배이므로 0.2, 포함되지 않는 부분은 $\mathrm{P}(A^c)$의 0.3배이므로 0.18이다.

※ 그 풀이가 그 풀이지만 풀이1)과 같이 딱딱하게 가지 않고, 풀이2)와 같이 의미적인 이해로 간다는 설명이다.

25. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A|B)=0.2$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0.6$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구하여라.

⇒ $\mathrm{P}(A\cap B)=x$라 하자. $\mathrm{P}(A\cup B)=0.6$, $\mathrm{P}(A)=0.4$에서 $\mathrm{P}(B)=x+0.2$이고,

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=0.2$에서 $\dfrac{x}{x+0.2}=0.2$, $x=0.05$이다.

26. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)$에서

⇒ $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A|B^c)\mathrm{P}(B^c)$

※ 베이즈 법칙이라 한다. 사건 A를 사건 B와 겹쳐진 부분과 사건 B와 겹쳐지지 않는 부분으로 나누고, 각각을 두 사건 B, B^c의 확률과 그에 따른 사건 A의 확률의 곱을 이용하여 구할 수 있다는 것이다.

27. 어떤 야구팀은 날씨에 따라 경기에서 이길 확률이 다르다. 날씨가 맑은 날의 경기에서 이길 확률은 0.6이고, 맑지 않은 날의 경기에서 이길 확률은 0.5이다. 내일 날씨가 맑을 확률이 0.4일 때, 이 팀이 경기에서 이길 확률을 구하여라.

⇒ 의미적으로) 내일 날씨가 맑고 경기에서 이길 확률은 $0.4\times0.6=0.24$이다.

내일 날씨가 맑지 않고 경기에서 이길 확률은 $0.6\times0.5=0.3$이다. 내일 이길 확률은 둘의 합 0.54이다.

⇒ 조건부 확률로 서술) 내일 경기를 이길 사건을 A, 내일 날씨가 맑을 사건을 B라 하자.

주어진 정보를 식으로 옮기면, $\mathrm{P}(A|B)=0.6$, $\mathrm{P}(A|B^c)=0.5$, $\mathrm{P}(B)=0.4$일 때, $\mathrm{P}(A)$를 구하는 것이다.

베이즈에 의해 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A|B^c)\mathrm{P}(B^c)=0.6\times0.4+0.5\times0.6$이다.

28. 이중분할표 : 가로로 A와 A^c을, 세로로 B와 B^c을 써서 만들어지는 4칸을 문제에 주어진 조건에 따라 잘 채워 넣어본다.
※ 숙지해두는 것이 좋다. 문제를 통해 살펴보자.

29. 남녀 공학인 어느 고등학교 학생 중 40%는 남학생이고, 남학생의 40%는 동생이 있다. 그리고 전체 학생 중 동생이 있는 학생은 절반이다. 이 고등학교의 여학생 중 한 명을 뽑을 때, 그 여학생이 동생이 없을 확률을 구하여라.
⇒ 아래와 같이 표를 구성하고 채워 넣자. 16%는 40%의 40%로 얻은 거야.

	남학생	여학생	전체
동생 있음	16%		50%
동생 없음			
전체	40%		100%

⇒

	남학생	여학생	전체
동생 있음	16%	34%	50%
동생 없음	24%	26%	50%
전체	40%	60%	100%

그리고 머리가 만두가 아니라면 답이 $\frac{26\%}{60\%}$인 것을 알 수 있다.

30. 암환자를 암이라고 진단할 확률이 95%이고, 암환자가 아닌 사람을 암으로 진단할 확률이 10%인 검사가 있다고 하자. 어떤 사람이 이 검사에서 암이라고 진단을 받았을 때, 그 사람이 실제로 암환자일 확률을 구하여라. (단, 전체 인구 중 10%가 암환자이다.)
⇒ 가운데 네 칸은 곱사건의 칸이다. 조건부 확률인 95%나 10% 쓰면 안 돼.

	암	암 아님	전체
암 진단			
암X 진단			
전체	10%	90%	100%

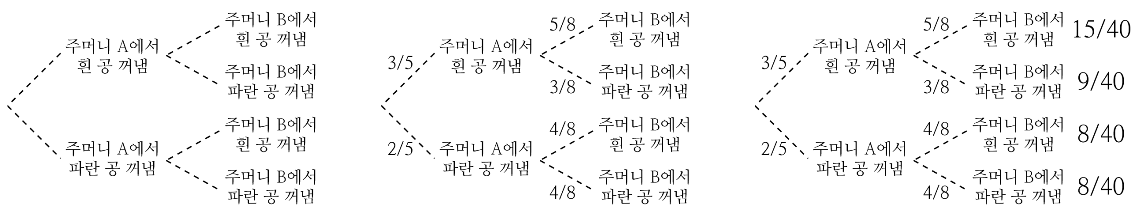
⇒

	암	암 아님	전체
암 진단	9.5%	9%	18.5%
암X 진단	0.5%	81%	81.5%
전체	10%	90%	100%

그리고 머리가 만두가 아니라면 답이 $\frac{9.5\%}{18.5\%}$인 것을 알 수 있다.
※ 극악의 이해력을 보여주는 학생들을 위해 전체 인구를 1000명이라고 하자는 풀이가 있다.
※ 0.5%와 9%는 진단이 오류를 일으킨 것이다. 암 진단이 떠도 반쯤은 오류에서 비롯된 것이다.
진짜 불쌍한 애들은 0.5%에 해당하는 애들이다. 곧 죽는다.

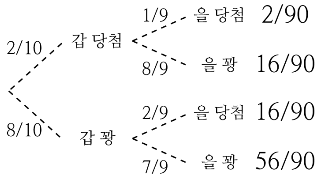
31. 확률수형도 : 선행–후행사건에 따른 경우의 수를 수형도로 그린 후 각각의 가지마다 가지는 확률값을 조사한다.
※ 주로 통계삘 문제는 이중분할표가 편하고 선행–후행이 확실하게 갈리는 시행의 문제는 확률수형도가 편하다.
※ 두 가지 시행의 전개에 대한 직관적인 이해를 돕기 때문에 자주 그려보는 것을 추천한다.

32. 주머니 A에는 흰 공 3개와 파란 공 2개가, 주머니 B에는 흰 공 4개와 파란 공 3개가 들어 있다.
A에서 1개의 공을 꺼내 B에 넣고 섞은 뒤 B에서 임의로 1개의 공을 꺼냈을 때, 파란 공일 확률을 구하여라.
⇒ 두 시행의 선후관계가 확실하다. 이럴 때는 확률수형도각이다.



첫 번째 그림은 가능한 모든 결과를 수형도로 나타낸 것. 두 번째 그림은 가지를 탈 확률을 표시한 것.
세 번째 그림은 확률의 곱셈법칙에 의해 결과의 확률들을 표시한 것이다. 답은 17/40이다.
※ 베이즈로 풀어보자. 주머니 A에서 파란 공이 나오는 사건을 A, 주머니 B에서 파란 공이 나오는 사건을 B라 하자.
문제의 상황에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^c)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{8}$, $\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{3}{8}$이고, 구하는 것은 $\mathrm{P}(B)$이다.
$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B\cap A)+\mathrm{P}(B\cap A^c)$에서 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B|A^c)\mathrm{P}(A^c)$이다.
※ 시행이 복잡하게 느껴져도 막상 확률수형도를 그려보면 한눈에 이해되는 경우가 자주 나온다. 그러니까 그려 버릇해.

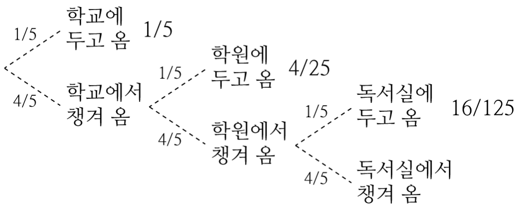
33. 어느 상자에 당첨제비 2개를 포함한 10개의 제비가 들어 있다.
이 상자에서 갑과 을이 순서대로 제비를 뽑을 때, 을이 당첨될 확률을 구하여라.
⇒ 확률수형도와 이중분할표로 풀어볼게.



	갑 당첨	갑 꽝	전체
을 당첨	2/90	16/90	18/90
을 꽝			
전체	2/10	8/10	1

답은 당연히 18/90이다. 개인적으로는 이중분할표는 느낌이 오지 않는다.
※ 결과를 확인해보자. 먼저 뽑든 나중에 뽑든 당첨될 확률은 변하지 않는다. 신기하지?

34. 아침에만 비가 온 어느 날, 학교, 학원, 독서실을 차례로 거쳐 집으로 돌아온 민수는 우산을 어딘가에 두고 왔다는 것을 알았다. 민수가 평균 5번에 1번 꼴로 우산을 두고 온다고 할 때, 우산을 학원에 있을 확률은?



위의 그림에서 구하는 확률은 $\dfrac{(\text{학원에 두고 옴})}{(\text{어딘가에 두고 옴})}$이므로 $\dfrac{4/25}{1/5+4/25+16/125}$이다.

35. 독립의 뜻 : 두 사건 A와 B가 서로 독립이다. ⇔ 두 사건은 서로 무관하다.
① $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$
② $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
※ $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$ 나 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 중 어느 쪽을 정의라 해도 무방하다. [39] 참고.
※ 두 사건 A와 B가 서로 독립이 아니면 서로 종속이라 한다.

36. 독립의 의미1) $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$: 사건 A가 일어날 확률은 사건 B의 영향을 받지 않는다.
사건 A가 일어날 확률은 사건 B가 일어날 때를 생각해도 변하지 않는다는 뜻이다.
바로 [39]에서 다루겠지만 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$이면 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B^c)$임을 유도할 수 있다.
사건 B가 일어나든, 사건 B가 일어나지 않든, 사건 A가 일어날 확률은 일정하다는 뜻이기도 하다.

37. 사건 A와 B가 서로 독립이면 사건 B와 사건 A는 서로 독립이다.
의미로서 삘은 오지? 식으로도 확인해보자.
① $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$에서 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$이므로 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$이다.
② $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$에서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$이다.

38. 사건 A와 사건 B가 서로 독립이면 A와 B^c도 서로 독립이다. 식으로도 확인해보자.
$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$에서 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$이다.
$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cap B^c)$이므로
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^c)}{\mathrm{P}(B^c)}=\mathrm{P}(A|B^c)$이다. 등호 하나하나 따져보자.
⇒ $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^c)$이고 비슷한 방법으로 $\mathrm{P}(A^c)=\mathrm{P}(A^c|B)=\mathrm{P}(A^c|B^c)$을 확인할 수 있다.

39. 두 사건 A와 B가 서로 독립이면, 사건 A와 사건 B^c도 서로 독립이고, 사건 A^c와 사건 B도 서로 독립이고, 사건 A^c과 사건 B^c도 서로 독립이다. 그리고 등식 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$와도 서로 같은 의미이다.
※ $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$는 , $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$, $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)$, $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B^c)$, $\mathrm{P}(A^c)=\mathrm{P}(A^c|B)$ 등과 서로 동치다.
※ 부등식의 경우도 서로 동치다. 다시 말해, $\mathrm{P}(A)\neq\mathrm{P}(A|B)$이면 $\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(B|A)$, $\mathrm{P}(A^c)\neq\mathrm{P}(A^c|B)$ 등을 얻을 수 있다.

40. 독립의 의미2) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$: 두 사건 A, B는 적당히 겹친다.

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A\cap B)$이 너무 크지도 않고, 너무 작지도 않고 딱 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.

⇒ $\mathrm{P}(A\cap B)<\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면 사건 A와 사건 B가 서로를 조장한다.

$\mathrm{P}(A\cap B)>\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면 사건 A와 사건 B가 서로를 방해한다.

확률이 아니라 통계로 이야기하면, 양의 상관관계도 아니고, 음의 상관관계도 아닌 경우가 독립이다.

※ 동전과 주사위를 던져서, 동전은 앞면이 나오고 주사위는 1이 나올 확률은?

두 사건이 동시에 일어날 확률을 구할 때 두 사건의 확률을 그냥 곱한 것은, 서로 독립임을 가정했던 것이다.

※ 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이다. $\mathrm{P}(A\cap B)$가 적당하지 못하고 아주 작다.

배반은 종속 중에서도 상종속인데, 독립으로 착각을 많이 한다. 단어가 주는 이미지가 비슷해서?

41. 주사위 하나를 던져 눈이 짝수가 나오는 사건을 A, 눈이 6의 약수가 나오는 사건을 B,

눈이 3 이하가 나오는 사건을 C라 할 때, 다음을 보여라.

(1) $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^c)$: $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{n(\{2,\ 6\})}{n(\{1,\ 2,\ 3,\ 6\})}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A|B^c)=\dfrac{n(\{4\})}{n(\{4,\ 5\})}=\dfrac{1}{2}$이다.

(2) $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^c)$: $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{n(\{2,\ 6\})}{n(\{2,\ 4,\ 6\})}=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A^c)=\dfrac{n(\{1,\ 3\})}{n(\{1,\ 3,\ 5\})}=\dfrac{2}{3}$이다.

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$: 사건 $A\cap B$는 $\{2,\ 6\}$이다. $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$로서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$와 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$의 곱과 같다.

※ (1), (2), (3)은 모두 두 사건 A, B가 서로 독립임을 나타내는 식이다. 어느 식을 확인해도 좋다.

7개의 등식 중 하나를 보이면 나머지 6개는 자동으로 성립한다. 굳이 고르라면 덜 헷갈리는 (3)으로.

(4) $\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$: $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{2}$이고, 사건 $A\cap C$는 $\{2\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{6}$이다.

(4)에 의해 두 사건 A, C는 서로 종속이다. 해보나마나 $\mathrm{P}(A)\neq\mathrm{P}(A|C)$, $\mathrm{P}(A^c)\neq\mathrm{P}(A^c|C)$ 등을 알 수 있다.

42. 서로 독립인 두 사건 A, B의 이중분할표가 다음과 같다고 하자.

	B	B^c	전체
A	a	b	$\mathrm{P}(A)$
A^c	c	d	$\mathrm{P}(A^c)$
전체	$\mathrm{P}(B)$	$\mathrm{P}(B^c)$	1

이중분할표의 작성요령에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=a$, $\mathrm{P}(A\cap B^c)=b$, $\mathrm{P}(A^c\cap B)=c$, $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=d$이다.

⇒ 독립을 식으로 쓰면 $\dfrac{a}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{b}{\mathrm{P}(B^c)}=\mathrm{P}(A)$이다. 다시 째려보면 $a:b$가 $\mathrm{P}(B):\mathrm{P}(B^c)$와 같다는 것을 알 수 있다.

⇒ 같은 방법으로 $a:b=c:d=\mathrm{P}(B):\mathrm{P}(B^c)$이고, $a:c=b:d=\mathrm{P}(A):\mathrm{P}(A^c)$이다. $ad-bc=0$ 같은 것도 어디서 봤지?

독립인 두 사건의 이중분할표에서는 나타나 있는 숫자들의 비로 해석하는 것이 각이다.

43. 어떤 학교의 학생 중 담배를 피우는 학생과 담배를 피우지 않는 학생의 수가 오른쪽 표와 같다. 이 학교의 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 남학생일 사건과 담배를 피우는 학생일 사건이 서로 독립일 때, x의 값은?

(단위 : 명)

	남학생	여학생
담배	60	30
댐배X	40	x

⇒ (담배를 피우는) : (담배를 피우지 않는)을 조사해서 $60:40=30:x$를 보든가,

(남학생) : (여학생)의 비를 조사해서 $60:30=40:x$를 보든가 $x=20$이다.

※ $\mathrm{P}(\text{남학생})=\dfrac{2}{3}$나 $\mathrm{P}(\text{담배})=\dfrac{3}{5}$라는 숫자를 띄우지 않고 풀 수 있다.

44. 두 사건 A와 B가 서로 독립이고, $\mathrm{P}(A|B)=0.6$, $\mathrm{P}(B|A^c)=0.4$일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값을 구하여라.

⇒ 독립이므로 서로의 조건부가 무의미하다. $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(B|A^c)=\mathrm{P}(B)=0.4$이다.

곱사건의 확률은 두 확률의 곱이다. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.24$, 합사건의 확률은 0.76이다.

45. 두 사람 A, B가 과녁에 화살을 쏠 때, 화살이 과녁에 명중할 확률은 각각 0.6, 0.5이다.

A, B가 동시에 과녁에 화살을 쏠 때, 두 사람의 화살이 모두 과녁에 명중할 확률을 구하여라.

⇒ 세빈이에게 풀게 시켜도 $0.6\times0.5=0.3$이라고 대답한다. 왜 곱했지? 독립이라는 인식이 있기 때문이다.

B가 명중시키든, 명중시키지 못하든, A의 화살이 과녁에 명중할 확률은 0.6으로 변하지 않는다.

B가 명중시키든, 명중시키지 못하든, A의 화살이 과녁에 명중하지 않을 확률은 0.4로 변하지 않는다.

독립이 아닐 수도 있지. 서로 멘탈리티에 영향을 준다든가. 그래서 동시에라는 표현을 준 것이겠지?

46. 서로 독립인 두 사건 A, B의 이중분할표를 잘 째려보면 [38], [39]의 내용을 가비의 리에 의해 이해할 수 있다.

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$이면 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B^c)$인 것을 식으로 쓰면 $\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$이면 $\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{n(A\cap B^c)}{n(B^c)}$이다.

$\dfrac{n(A\cap B^c)}{n(B^c)}=\dfrac{n(A)-n(A\cap B)}{n(S)-n(B)}$이므로 가비 치면 된다. 다른 것들도 비슷하게 되겠지?

47. 번갈아가며 주사위를 한 번씩 던져서 1이 먼저 나오면 이기는 게임에서 먼저 던지는 쪽이 게임을 이길 확률을 구하여라.

1이 나오는 것을 성공이라 하자. 시작하자마자 이길 확률이 $\dfrac{1}{6}$이다. 실패하고, 상대가 실패하고, 성공할 확률이 $\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\dfrac{1}{6}$이다.

실패–실패–실패–실패–성공할 확률은 $\left(\dfrac{5}{6}\right)^4\dfrac{1}{6}$이다. 평생 할 수도 있겠지? 이런 무한급수가 되겠네. 답은 $\dfrac{6}{11}$이다.

48. 독립시행의 확률 : 성공확률이 p인 시행을 n번 반복할 때, k번 성공할 확률은 ${}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}$이다.

증명) 성공 k번, 실패 $n-k$번을 순서대로 할 확률은 $p^k(1-p)^{n-k}$이다.

여기에 성공 실패의 순서를 섞어주는 경우의 수 $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$을 곱해준 것이다.

※ 동일한 시행을 n번 반복할 때, 성공/실패의 순서와 무관하게 성공 횟수에 대한 확률을 구하는 방법이다.

49. 다음 물음에 답하여라.

(1) 주사위를 4개 던졌을 때, 1이 두 개 나올 확률

: 차례로 (1, 1, 1아님, 1아님)이 나올 확률은 $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$이다. (1, 1아님, 1, 1아님) 등의 확률도 같겠지?

여기에 OOXX를 일렬로 배열하는 방법의 수 ${}_4\mathrm{C}_2$를 곱해주면 되겠군.

(2) 30% 타율의 타자가 5타석에서 2안타를 칠 확률

: 안타를 두 번 칠 확률 $(0.3)^2$, 안타를 세 번 못 칠 확률 $(0.7)^3$, 경우의 수 ${}_5\mathrm{C}_2$를 곱해준다.

(3) 동전 4개를 던졌을 때, 앞면이 3개 나올 확률 : ${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)$

(4) 5지선다 4문제를 찍어서 3문제 이상 맞을 확률

: 세 문제 맞을 확률과 네 문제 맞을 확률을 더해주면 되겠네. ${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\left(\dfrac{4}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}\right)^4$다.

네 문제 맞을 확률 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^4$를 독립시행의 틀에 맞춰 ${}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{5}\right)^4\left(\dfrac{4}{5}\right)^0$이라 써도 좋다. 니네 너무 무시하나?

50. 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P는 동전을 던져서 동전이 앞면이면 $+2$만큼, 동전이 뒷면이면 -1만큼 움직인다. 이 시행을 다섯 번 반복할 때, 점의 좌표가 양수일 확률을 구하여라.

⇒ 적당히 생각해도 앞면이 2번 이상 나와야겠군. 앞면 나온 횟수를 x라 하면 $2x-(5-x)>0$이니까?

⇒ 여사건이 낫겠네. 전체에서 앞면이 1번 이하 나오는 경우를 빼주자. $1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5-{}_5\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$이다.

51. 5번의 경기 중 3번을 먼저 이기면 우승하는 결승전에서 첫 번째 경기를 이긴 쪽이 우승할 확률을 구하여라.

(단, 각각의 경기에서 각각이 이길 확률은 $\dfrac{1}{2}$이다.)

⇒ 첫 번째 경기를 이긴 쪽이 우승하는 경우는 다음과 같이 분류할 수 있다.

Case1) 두 경기 더 함. $\mathrm{P}(\text{승승})=\dfrac{1}{4}$이다. Case2) 세 경기 더 함. $\mathrm{P}(\text{승패승 or 패승승})=2\times\dfrac{1}{8}$이다.

Case3) 네 경기 더 함. $\mathrm{P}(\text{승패패승 or 패승패승 or 패패승승})=3\times\dfrac{1}{16}$이다.

52. 주사위를 여섯 번 던졌을 때, 눈의 수가 $1\sim3$이 두 번, $4\sim5$가 세 번, 6이 한 번 나올 확률을 구하여라.

⇒ 눈이 $1\sim3$이 나오는 사건을 a, 눈이 $4\sim5$가 나오는 사건을 b, 눈이 6이 나오는 사건을 c라 하자.

주사위를 여섯 번 던졌을 때, 사건 a, a, b, b, b, c가 순서대로 나올 확률은 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{6}\right)$이다.

여기에다 a, a, b, b, b, c를 일렬로 배열하는 방법의 수 $\dfrac{6!}{2!3!1!}$을 곱해주면 된당.

※ 같은 것이 있는 순열이 조합의 일반화다. 조합 ${}_n\mathrm{C}_k$는 k개의 O와 $n-k$개의 X를 나열하는 경우의 수라 할 수 있다.

수업이 곧 시작됩니다.

통계 내용 정리 [기초강의(1/3)]

[학습목표]

1. 이산확률변수 내용정리

01. 이산확률변수란 시행마다 정해진 확률에 따라 그 값이 변하는 변수이다.
예를 들어서 주사위를 던질 때 나오는 눈을 X라 하면 X는 다음과 같은 분포를 가진다.

X	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

02. 예를 들어서 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때,
나오는 흰 공의 개수를 X라 하면

X	0	1	2
$\mathrm{P}(X=x)$	1/10	6/10	3/10

이다. $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{6}{10}$, $\mathrm{P}(X\geq 1)=\dfrac{9}{10}$ 등으로 표현한다.

03. X가 가지는 값 x_i와 그 확률 p_i의 대응관계를 확률분포라 하고,
이 대응 관계를 나타내는 함수 $\mathrm{P}(X=x)$를 X의 확률질량함수라 한다.

04. 문제에 이산확률변수가 뜨면 위의 예제들처럼 확률분포표를 그리자.

05. X가 1, 2, 3, 4 중 하나의 값을 가지며 $\mathrm{P}(X=i)=ai(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$를 만족할 때,
X의 확률분포표를 구하여라.

$\Rightarrow$

X	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$2a$	$3a$	$4a$

$\Rightarrow$ 확률의 합은 1이므로 $a=\dfrac{1}{10}$이다.

06. 의미 분석도 좋지만 일단 정의이다. 계산방법부터 확인하자.

① X의 기댓값(평균) $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

② X의 분산 $\mathrm{V}(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$ (단, m은 평균)

③ X의 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

07. 통계의 평균과 비교해서 기댓값의 의미를 이해하자.
예를 들어서 시험을 쳤을 때 1/3의 확률로 100점, 2/3의 확률로 70점을 받는 학생이 있다고 하면,
이 학생의 평균점수는 결국 $100\times\dfrac{1}{3}+70\times\dfrac{2}{3}=80$점으로 수렴하게 될 것이다.

08. 분산과 표준편차가 평균에서 떨어진 정도를 나타낸다는 것을 이해하자.

① $(x_i-m)^2$을 보자. 평균과의 차이가 크면 값이 더 커진다.

② 분산 구할 때 제곱을 한 번 했으니까 기분상 루트를 한 번 씌워준다.

$\Rightarrow$ 분산보다 표준편차가 많이 쓰이는 이유 : 단위(스케일)가 맞아서.

※ 절댓값을 이용한 절대편차라는 것도 있다. 모종의 이유로 고등학교에서는 쓰지 않는다.

09. 확률변수 X가 0, 1, 2의 값을 가지고 확률질량함수가 $f(x)=a^{|x-1|+1}$일 때, X의 분산을 구하여라.

⇒ 확률분포표부터 그리자.

X	0	1	2
$\mathrm{P}(X=x)$	a^2	a	a^2

⇒ 확률의 합이 1이므로 $a=\frac{1}{2}$이다.

X	0	1	2
$\mathrm{P}(X=x)$	1/4	1/2	1/4

⇒ 세로로 긁어서 더한 것이 평균이다. $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

⇒ 평균과의 차이를 제곱한 것의 평균이 분산이다. $\mathrm{V}(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{4}+(1-1)^2\times\frac{1}{2}+(2-1)^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

10. <u>연산된 확률변수의 평균과 분산</u> : 일단 외우세영.

① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

② $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

④ $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

11. 의미를 이해하자. 어떤 시험에서 반의 평균이 30점일 때,

① 각각의 점수를 10점씩 올리면 평균은 10점이 오른다. → $\mathrm{E}(X+10)=\mathrm{E}(X)+10$

② 각각의 점수를 두 배로 올리면 평균은 두 배가 된다. → $\mathrm{E}(2X)=2\mathrm{E}(X)$

③ 각각의 점수를 10점씩 올리더라도 분산은 변하지 않는다. (평균도 10점이 오르므로) → $\mathrm{V}(X+10)=\mathrm{V}(X)$

④ 각각의 점수를 두 배로 올리면 분산은 네 배가 된다. (평균과의 간격이 두 배가 되므로) → $\mathrm{V}(2X)=4\mathrm{V}(X)$

12. 사실 약간 엉터리 설명이다. 통계자료와 확률변수는 서로 다르기 때문이다.

①을 제대로 증명해보자. 확률변수 $aX+b$의 확률분포는 다음과 같다.

$aX+b$	ax_1+b	ax_2+b	$\cdots$	ax_n+b
$\mathrm{P}(aX+b=ax+b)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

따라서, $\mathrm{E}(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=a\mathrm{E}(X)+b$

13. 분산은 각자 해보자. ④를 해줄게.

$$\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m^2+m^2=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

14. 두 확률변수 X, Y에 대하여 $X=2Y+3$이고, $\mathrm{E}(Y)=3$, $\mathrm{E}(Y^2)=14$일 때, $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하여라.

15. 일어날 확률이 p인 시행을 n번 반복할 때, X번 일어난다고 하자.

확률변수 X가 시행횟수 n, 성공확률 p인 <u>이항분포</u>를 따른다고 하고 $X\sim\mathrm{B}(n,\ p)$라 나타낸다.

16. $X\sim\mathrm{B}(n,\ p)$이면 $\mathrm{P}(X=i)={}_n\mathrm{C}_i p^i(1-p)^{n-i}(0\le i\le n$인 정수)

⇒ 뭔지 모르겠으면 독립시행 복습해.

17. 주사위 3개를 던져서 6의 약수인 눈이 나오는 것의 개수를 X라 하자.

X	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X=x)$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2$	${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$

⇒ 이런 경우를 $X\sim\mathrm{B}\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$라 나타낸다. 평균과 분산도 구해보자.

18. <u>이항분포의 평균과 분산</u> : $X\sim\mathrm{B}(n,\ p)$이면

① $\mathrm{E}(X)=np$

② $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$

이다. 증명은 귀찮고 안 나오니까 그냥 알려져 있다고 하자. 논술 준비라면 해둘 것.

평균이 np인 것은 삘이 오긴 한다. → 주사위 600개를 던지면 1이 몇 개 나올까? 평균적으로 100개.

수업이 곧 시작됩니다.

통계 내용 정리 [기초강의(2/3)]

[학습목표]

1. 연속확률변수 내용 정리

01. 연속확률변수 X : 확률변수가 연속적인 값을 가질 때.

eg) 길이, 시간 등등

→ 이산확률변수처럼 칸으로 나눌 수 없다.

→ 연속확률변수는 범위에서 확률을 가진다.

→ $\mathrm{P}(X=k)=0$, $\mathrm{P}(a<X<b)=\mathrm{P}(a \le X \le b)$

02. 연속확률변수 X에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\mathrm{P}(a \le X \le b)=\int_a^b f(x)dx$$

를 만족시키면 $f(x)$를 X의 확률밀도함수라 한다. 이를 $X \sim f(x)$라 나타낸다.

03. 어떤 연속확률변수의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음을 만족시켜야 한다.

(가) $f(x) \ge 0$

(나) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

※ $f(x) \le 1$일 필요는 없다. 함숫값이 아니라 넓이가 확률이다. 가로를 좁히면 함숫값은 1을 넘을 수 있다.

04. $X \sim f(x)=ax(0 \le x \le 2)$일 때 다음을 구하여라.

(1) a

(2) $\mathrm{P}(X \le 1)$

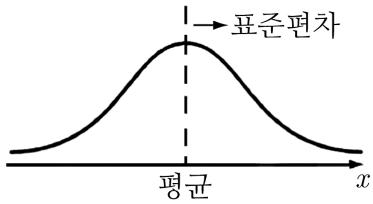
05. 정규분포는 여러 종류의 측정값이 가지는 매우 자연스러운 분포이다.

① 오른쪽 그림과 같이 평균을 중심으로 좌우 대칭의 종모양이다.

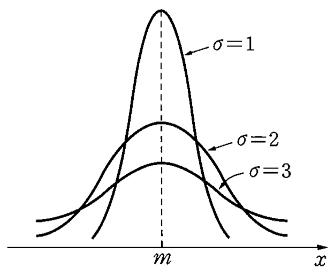
→ 확률밀도함수가 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 인데, 어차피 이해 못하니까..

② 연속확률변수 X가 평균 m, 표준편차 σ인 정규분포를 따를 때,

$X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$으로 나타낸다.



06. 표준편차가 커질수록 옆으로 퍼진다.



07. $X \sim \mathrm{N}(m_1,\ \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(m_2,\ \sigma_2^2)$이면 임의의 실수 k에 대하여

$\mathrm{P}(m_1 \le X \le m_1+k\sigma_1)=\mathrm{P}(m_2 \le Y \le m_2+k\sigma_2)$이다.

→ 평균에서부터 편차로 몇 칸 떨어졌는지로 확률을 구한다.

08. 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 표준정규분포라 한다.

① 표준정규분포를 따르는 확률변수를 일반적으로 Z로 나타낸다.

② 표준정규분포의 확률값은 문제에서 주어진다.

③ $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)=0.34$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.48$ 정도는 예의상 익혀두자.

09. 어느 집단 구성원의 IQ는 $\mathrm{N}(100,\ 10^2)$을 따른다고 한다. 다음을 구하여라.

(단, 확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.34$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.48$이다.)

(1) $\mathrm{P}(\mathrm{IQ} \ge 100)$　　(2) $\mathrm{P}(\mathrm{IQ} \le 120)$

(3) $\mathrm{P}(\mathrm{IQ} \ge 110)$　　(4) $\mathrm{P}(90 < \mathrm{IQ} < 110)$

(5) $\mathrm{P}(80 \le \mathrm{IQ} \le 110)$　　(6) $\mathrm{P}(80 \le \mathrm{IQ} \le 90)$

10. 어떤 시험 성적의 분포가 $\mathrm{N}(50,\ 8^2)$일 때, 수험생 500명 중에서 상위 10등 이내에 들기 위해서는 몇 점 이상이어야 하는지 구하여라. (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.48$)

11. 확률변수 X에 대하여 평균을 빼고 편차로 나누는 것을 <u>표준화</u>라 한다.

→ $X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$일 때, 표준화 친 $\dfrac{X-m}{\sigma}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

적용법 ① $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$의 k와 대응되는 표준정규분포에서의 값은 $\dfrac{k-m}{\sigma}$이다.

적용법 ② $X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$일 때, $\mathrm{P}(a \le X \le b) = \mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{\sigma} \le Z \le \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$이다.

12. 어느 고등학교에서 학생 몸무게의 분포는 평균이 53kg, 표준편차가 6kg인 정규분포를 따른다. 이 학교 학생 중 몸무게가 50kg 이상 65kg 이하인 학생은 전체의 몇 %인지 구하여라.
(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5) = 0.19$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.48$)

13. 어느 제과점에서 만든 빵 한 개의 무게는 평균 200g, 표준편차 8g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제과점에서 만든 빵 한 개의 무게가 210g 이상일 확률을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.25) = 0.4$)

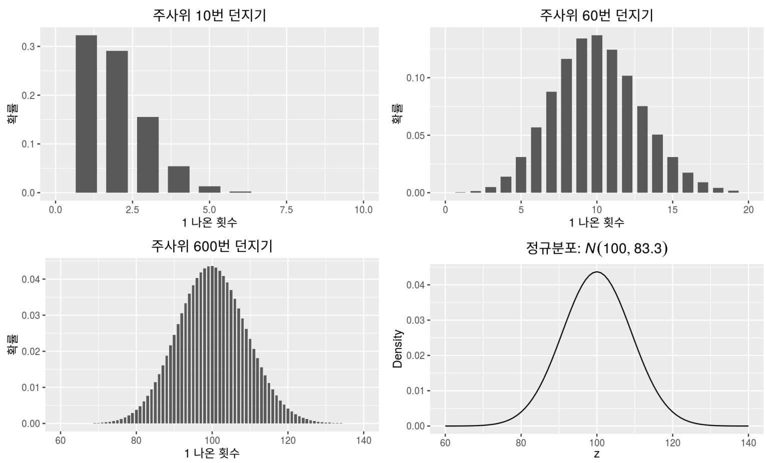
14. 어떤 시험 성적의 분포가 평균이 75점, 표준편차가 9인 정규분포를 따른다고 한다. 수험생중 상위 10 %에 들기 위해서는 적어도 몇 점 이상을 받아야 하는지 구하여라. (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28) = 0.4$)

15. <u>이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$는 n이 충분히 크면 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$로 근사된다.</u> (단, $q = 1-p$)

그냥 믿자. 정규분포의 정의라고 착각하는 정도가 좋다. 그러면 정규분포가 자연스럽다는 것도 약간 설명되고..

※ 보통 $np \ge 15$이면 근사시키기 충분하다. 표준정규분포표가 주어지면 근사하기 충분하다고 판단할 수 있다.

※ 이항분포가 나왔을 때, 무조건 근사시키다가 망하는 수가 있다.



16. 5지선다 100문제의 답을 모두 임의로 찍었을 때, 다음을 구하여라.

(1) 20문제의 정답을 맞힐 확률　　(2) 100문제의 정답을 맞힐 확률

(3) $20 \sim 24$문제의 정답을 맞힐 확률　　(4) 28문제 이상 정답을 맞힐 확률

⇒ 맞힌 문제의 수 X는 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{5}\right)$를 따른다. 확률분포표도 대충 잡아보자.

(1)은 ${}_{100}\mathrm{C}_{20}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{20}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{80}$, (2)는 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{100}$이다. 둘 다 거의 0에 가까운 값. 연속확률변수로 근사된다는 개념에서도..

(3), (4)는 시그마로 표현할 수는 있다. 분포를 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$으로 근사시킬 수 있으니 여기서 구해보자.

수업이 곧 시작됩니다.

통계 내용 정리 [기초강의(3/3)]

[학습목표]

1. 통계적 추정 내용 정리

01. 표본평균 $\overline{X}$은 X를 몇 개 뽑아서 평균 낸 것이다.

확률변수 X가 다음과 같은 분포를 가진다면, 두 개를 뽑아서 평균 낸 $\overline{X}$의 분포는 오른쪽과 같다. 생각해봐.

X	1	7
$\mathrm{P}(X=x)$	1/3	2/3

$\Rightarrow$

$\overline{X}$	1	4	7
$\mathrm{P}(\overline{X}=x)$	1/9	4/9	4/9

02. 위의 예에서 세 개를 뽑아서 평균 낸 $\overline{X}$의 분포는 다음과 같다. 각자 확인.

$\overline{X}$	1	3	5	7
$\mathrm{P}(\overline{X}=x)$	1/27	6/27	12/27	8/27

03. 표본평균의 평균과 분산 : $\overline{X}$는 다음을 만족한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$ ② $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}$ ③ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

04. 증명은 제대로는 안 되니까 받아들여야 한다.

→ ①은 살짝 당연하다. 어차피 X를 뽑은 것이니까..?

→ ②, ③에 대해서는 일단 n이 커지면 분산이나 표준편차가 작아진다는 것을 감각적으로 느껴보자.

→ 여러 개를 뽑아서 평균 내면, 값이 좀 안정된다. 많이 뽑을수록. 이건 동의할 수 있지?

05. 모평균 m, 모표준편차 σ인 모집단에서 추출하면,

① $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 모집단이 정규분포이면 $\overline{X}$는 정규분포를 따른다.

③ 모집단과 관계없이 n이 충분히 크면 $\overline{X}$는 정규분포를 따른다.

$\Rightarrow$ 알려져 있다. 아멘.

06. 어느 공장에서 제품 한 개를 생산하는 데 걸리는 시간은 평균이 200분, 표준편차가 16분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 제품 중 임의로 추출한 4개 제품의 생산 시간의 평균이 196분 이상일 확률을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.19$)

07. 어느 회사에서 생산하는 볼펜의 무게는 평균이 20g, 표준편차가 2g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산되는 볼펜을 4개씩 묶어서 세트 상품을 만들 때, 세트 상품의 무게의 합 S에 대하여 $\mathrm{P}(78\le S\le 84)$을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.19$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.34$)

08. $X\sim\mathrm{N}(20,\ 2^2)$이면 네 개를 뽑은 것의 합 $X_1+X_2+X_3+X_4$는 $4\overline{X}$이므로 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$를 따르고 하나를 뽑아서 네 배한 $4X$는 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따른다. (식 $\mathrm{E}(aX)=a\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(aX)=a^2\mathrm{V}(X)$에서)

09. 모평균의 추정관련 용어 정리

(1) 모집단 : 조사 대상이 되는 집단 → 모평균 m, 모분산 σ^2, 모표준편차 σ

(2) 표본 : 조사를 위해 추출한 모집단의 일부 → 표본의 크기 n, 표본평균 $\overline{X}$, 표본분산 S^2, 표본표준편차 S

(3) 추정, 신뢰도, 신뢰구간 : 표본평균 $\overline{x}$을 중심으로 모평균 m의 값을 추정한다.

신뢰도 몇%로 모평균은 구간 $[\alpha,\ \beta]$에 존재한다고 추정할 때, 구간 $[\alpha,\ \beta]$를 신뢰구간이라 한다.

10. 예시 : 우리나라 사람들 전체의 IQ 평균을 알고 싶다.

→ 모집단 : 우리나라 사람들.

→ 모평균 m : 우리나라 사람들 전체의 IQ 평균

임의로 10명을 뽑아서 IQ를 조사했더니 평균이 105, 편차가 10이었다.

→ 표본의 크기 n : 10

→ 표본평균 $\overline{x}$: 105

→ 표본표준편차 s : 10 (이 값은 모표준편차 σ 대신 사용할 수 있다.)

① 우리나라 사람들 전체의 IQ 평균은 105일꺼야! → 미친놈.

② 우리나라 사람들 전체의 IQ 평균은 103에서 107 사이에 있을꺼야! → 너무 용감한데?

③ 우리나라 사람들 전체의 IQ 평균은 95에서 115 사이에 있을꺼야! → 아마도? 믿을만한데?

④ 우리나라 사람들 전체의 IQ 평균은 0에서 210 사이에 있을꺼야! → 100% 신뢰할 수 있군.

→ 신뢰도를 높이려면 신뢰구간을 넓혀야 한다.

11. 모집단이 1, 2, 3, 4, 5일 때, 크기 3인 표본을 복원추출/비복원추출하는 경우의 수를 각각 구하여라.

① 복원추출 : 추출할 때마다 모집단을 원 상태로 복원 : $5\times5\times5$

② 비복원추출 : 한 개씩 추출함 : $5\times4\times3$

→ 모분포에서의 추출은 모두 복원추출이다.

→ 모집단이 충분히 크면 비복원추출도 거의 복원추출 취급할 수 있다.

→ 특별한 언급이 없을 때는 복원추출만 고려한다.

12. 표본표준편차는 모표준편차 대신 사용할 수 있다. 그냥 그러려니 하자.

보통 문제에서는 모표준편차가 주어진다. 하지만 일반적으로, 실제로 모표준편차를 알 수는 없다.

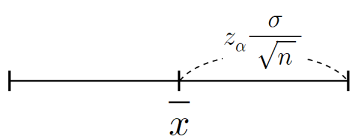
※ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$와 헷갈리면 안 된다. $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$는 표본평균들 사이의 표준편차이다.

13. 신뢰도 α%로 모평균 m을 추정한 신뢰구간은 아래와 같다.

$$\underline{\overline{x}-z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

※ 신뢰계수 z_α : 일단 95%일 때는 1.96, 99%일 때는 2.58 정도를 눈치껏 쓰자.

모평균 m의 신뢰도 α% 신뢰구간

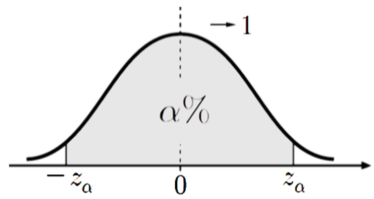


14. 어느 과수원에서 생산되는 사과 81개를 조사하였더니 무게의 평균이 120g,

표준편차가 36g이었다. 전체 평균을 신뢰도 99%로 추정하여라. (단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.6)=0.4950$)

⇒ $n=81$, $\overline{x}=120$, $s=36(=\sigma)$, $z_\alpha=2.6$이다.

$\overline{x}-z_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+z_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$에 대입하면 신뢰구간은 $[109.6,\ 130.4]$이다.



15. 추정 식의 z_α값(신뢰계수)은 신뢰도 α에 대하여 $\mathrm{P}(-z_\alpha\le Z\le z_\alpha)=\alpha\%$가 되는 값이다.

⇒ 95%일 때는 1.96 이나 2쯤 쓰면 된다.

⇒ 99%일 때는 2.58 이나 2.6 이나 3쯤 쓰면 된다.

16. 신뢰구간의 길이는 $2z_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다. 신뢰구간의 길이는 좁히고 싶다.

① n을 키우면 신뢰구간은 짧아진다. (좋지만 조사하는 표본을 키우려면 돈이 든다.)

② σ가 크면 신뢰구간은 길어진다. (모집단이 들쭉날쭉하면 추정이 잘 되지 않는다.)

③ α(신뢰도)가 크면 신뢰구간은 길어진다. (신뢰도를 확보하려다 보니 보수적으로 말해야 한다.)

※ 오차의 한계 : $z_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

17. 모표준편차가 3인 모집단의 모평균에 대한 추정을 하려 한다. 신뢰도 99%인 신뢰구간의 길이를

3 이하가 되게 하는 표본의 크기 n의 최솟값을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.6)=0.4950$)

⇒ $\sigma=3$, $z_\alpha=2.6$이다. 신뢰구간의 길이 $2z_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=5.2\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}$이 3 이하가 되어야 한다.