원포인트 개념주입 C

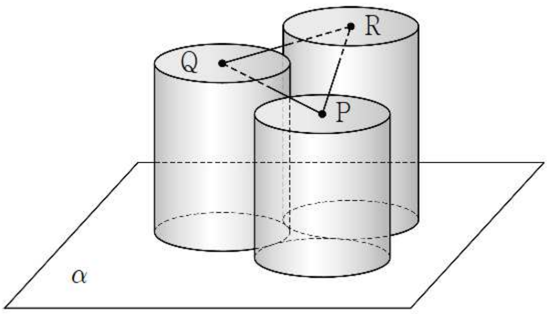
공간도형

개념1

✔ 공간에 기울어진 삼각형
① 세 변의 길이와 높이 차를 포함한 직각 삼각형
② 교선의 위치

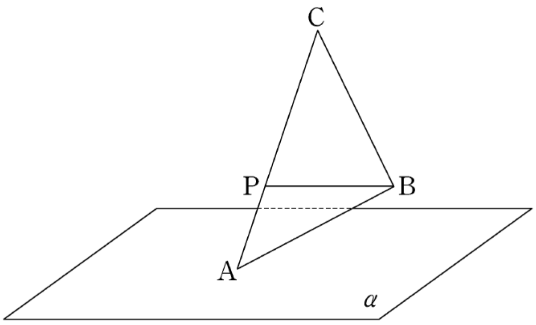
001.

그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 60°이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.[1] (단, $8<a<b$)



002.

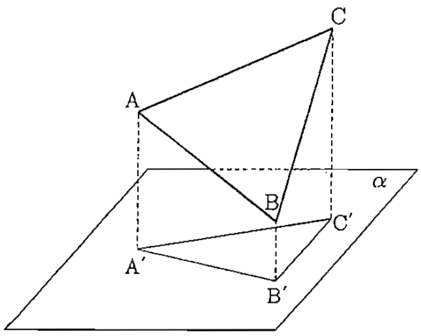
그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고, α로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}=4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하여라.[2]



003.

삼각형 ABC를 그림과 같이 평면 α에 정사영시킨 도형을 삼각형 A′B′C′이라 하자. 이때, 삼각형 ABC와 삼각형 A′B′C′이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC는 정삼각형이다.
(나) 삼각형 A′B′C′은 $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{A'C'}}=2$, $\overline{\mathrm{B'C'}}=1$인 이등변삼각형이다.



평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각 θ에 대하여 $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$의 값을 구하여라.[3]

✔ 구가 외접하는 문제 : 중심하고 잇는당.

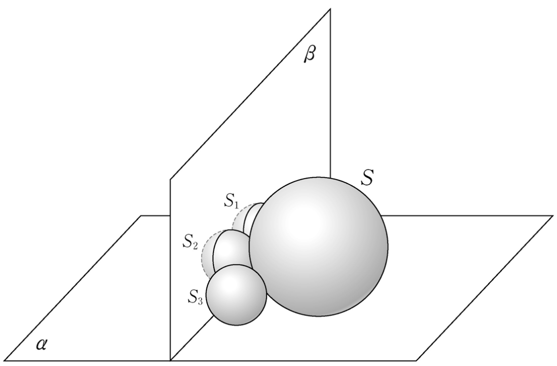
개념2

004.

그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3이 다음 조건을 만족시킨다.

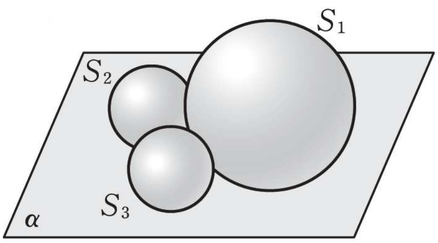
(가) S의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3의 반지름의 길이는 1이다.
(나) S_1, S_2, S_3는 모두 S에 접한다.
(다) S_1은 S_2와 접하고, S_2는 S_3과 접한다.

S_1, S_2, S_3의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 두 점 O_1, O_2를 지나고 평면 α에 수직인 평면을 β, 두 점 O_2, O_3를 지나고 평면 α에 수직인 평면이 S_3과 만나서 생기는 단면을 D라 하자. 단면 D의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하여라.[4] (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



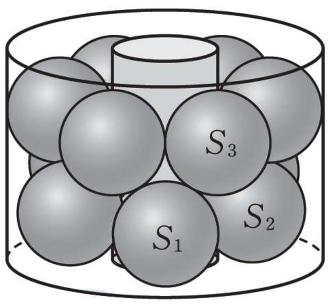
005.

그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S_1과 반지름의 길이가 1인 두 구 S_2, S_3이 서로 외접하면서 모두 평면 α에 접하고 있다. 세 구 S_1, S_2, S_3의 중심을 각각 A, B, C라 하고 선분 BC의 중점을 M이라고 하자. 직선 AM과 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.5) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



006.

그림과 같이 중심이 같고 반지름의 길이가 1, 3인 두 원을 각각 밑면으로 하는 두 원기둥의 사이에 반지름의 길이가 1인 구 12개가 서로 외접하면서 들어 있다. 아래쪽에 있는 6개의 구 중에서 서로 외접하는 두 구를 S_1, S_2라 하고 위쪽에 있는 구 중에서 구 S_1, S_2에 모두 접하는 구를 S_3이라고 하자. 세 구 S_1, S_2, S_3의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3이라고 할 때, 평면 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$과 원기둥의 밑면이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하자. $\cos\theta$의 값은?6) (단, 아래쪽에 있는 6개의 구는 반지름의 길이가 3인 원을 밑면으로 하는 원기둥의 밑면에 모두 접하고, 위쪽에 있는 구는 모두 아래쪽에 있는 구 2개와 각각 외접하며, 두 원기둥의 높이는 모두 3 이상이다.)



① $\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$ ② $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$

④ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}-2}{3}$

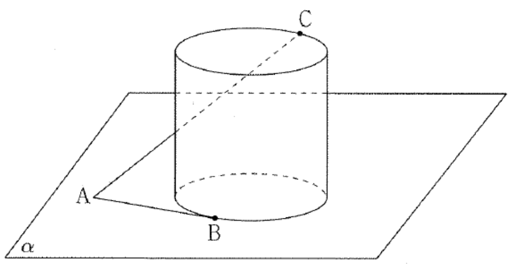
개념3

✔ 삼수선 : 평면을 경유해서 수선을 내린다.

007.

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2, 높이가 4인 원기둥의 아래쪽 밑면이 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α 위의 두 점 A, B를 지나는 직선을 l이라 할 때, 직선 l과 평면 α 위에 있지 않은 원기둥의 밑면 위의 점 C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=2\sqrt{3}$
(나) 직선 l과 원기둥의 아래쪽 밑면은 점 B에서 접한다.
(다) 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각을 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$이다.

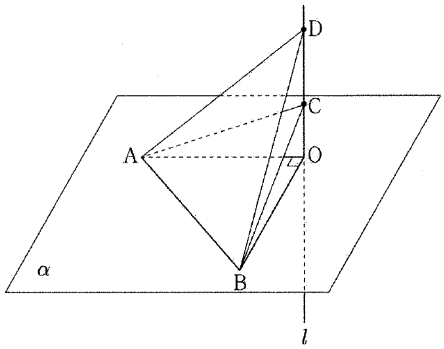


선분 AC의 길이는?[7] (단, $\overline{AC}>6$이다.)

① $2\sqrt{10}$　② $2\sqrt{11}$　③ $4\sqrt{3}$
④ $2\sqrt{13}$　⑤ $2\sqrt{14}$

008.

평면 α 위에 $\overline{OA}=\overline{OB}=4$, $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 OAB와 점 O를 지나고 평면 α와 수직인 직선 l 위에 길이가 3인 선분 CD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이가 $4\sqrt{6}$일 때, 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{DH}$의 길이는?8)

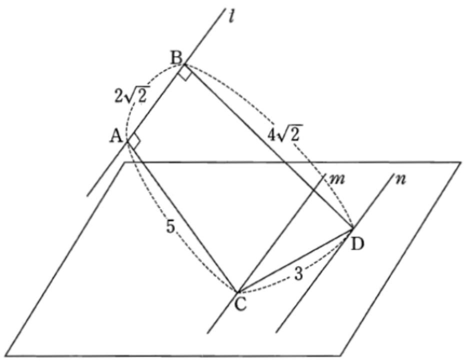


① 5　② $\sqrt{30}$　③ $\sqrt{33}$
④ 6　⑤ $\sqrt{40}$

009.

같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=3$
(나) $\overline{AC}\perp l$, $\overline{AC}=5$
(다) $\overline{BD}\perp l$, $\overline{BD}=4\sqrt{2}$



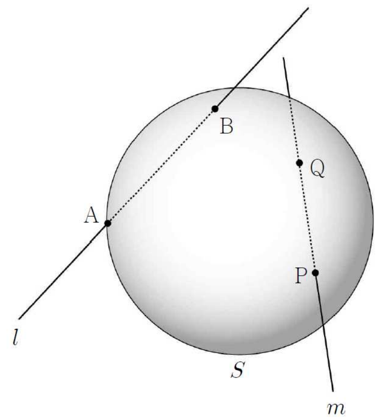
두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하여라.9) $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

개념4

✔ 공간 상에서 점 P에서 직선 l에 수선의 발을 내릴 때는
① 점 P에서 직선을 품는 '알기 쉬운' 평면 α에 내린 수선의 발 H을 찾는다.
② 점 H에서 직선 l에 수선의 발을 내린다.

010.

그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S와 서로 다른 두 직선 l, m이 있다. 구 S와 직선 l이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B, 구 S와 직선 m이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\angle \mathrm{ABQ}=\frac{\pi}{2}$일 때 평면 APB와 평면 APQ가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $100\cos^2\theta$의 값을 구하여라.10)

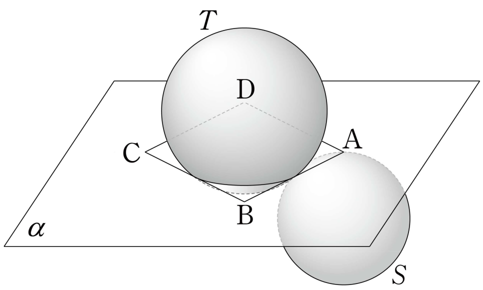


011.

좌표공간에 점 $\mathrm{A}(9,\ 0,\ 5)$가 있고, xy평면 위에 타원 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$이 있다. 타원 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최댓값을 구하여라.[11]

012.

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 구 S가 평면 α와 점 A에서 접한다. 평면 α 위에 있고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 정사각형 ABCD에 대하여 구 T가 S와 정사각형 ABCD의 모든 모서리에 접할 때, T의 반지름의 길이는?[12]



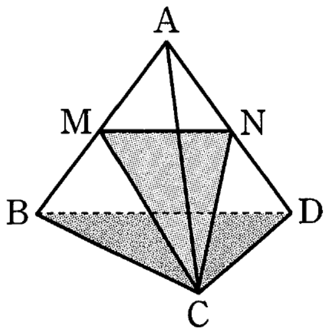
① $\dfrac{3}{2}$　② $\dfrac{4}{3}$　③ $\dfrac{5}{4}$　④ $\dfrac{6}{5}$　⑤ $\dfrac{7}{6}$

개념5

✔ 이면각을 찾을 때 쓰는 도구
① 직접 : 교선이 잘 보일 때 가능 !
② 정사영 : 정사영이 눈에 띄는 경우

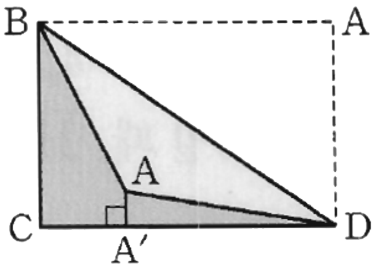
013.

한 모서리의 길이가 4인 정사면체 A−BCD에서 $\overline{AB}$의 중점을 M, $\overline{AD}$의 중점을 N이라 하자. 이 때, 면 MCN과 면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.[13)]



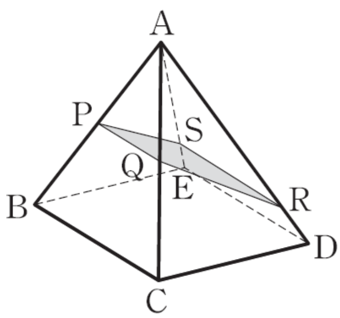
014.

그림과 같이 직사각형 ABCD를 대각선 BD를 접는 선으로 하여 꼭짓점 A의 평면 BCD를 위로의 정사영 A′이 변 CD 위에 오도록 접었다. $\overline{CA'}:\overline{A'D}=2:5$일 때, 평면 ABD와 평면 BCD가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값을 구하여라.[14]



015.

아래의 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 정사각뿔 A−BCDE에서 모서리 AB, AC의 중점을 각각 P, Q라 하고, 모서리 AD, AE를 3:1으로 내분하는 점을 각각 R, S라 하자. 평면 PQRS와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?[15] $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

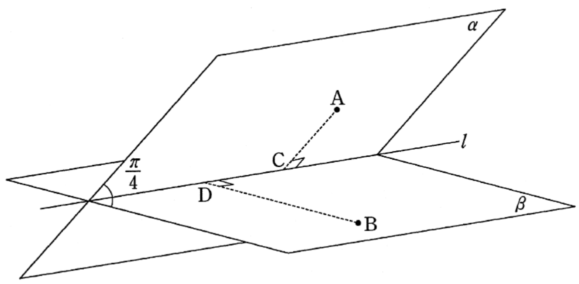
④ $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

개념6

✔ 경사면과 선분 : 수선들 막 내리고..

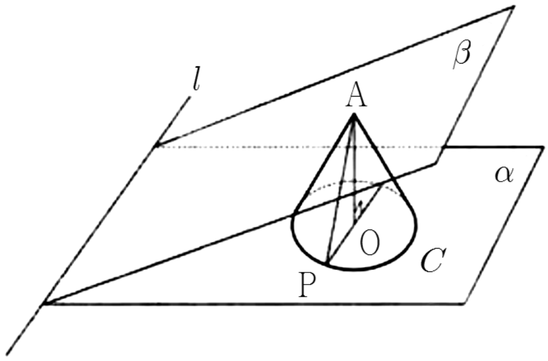
016.

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하여라.[16] (단, a, b는 유리수이다.)



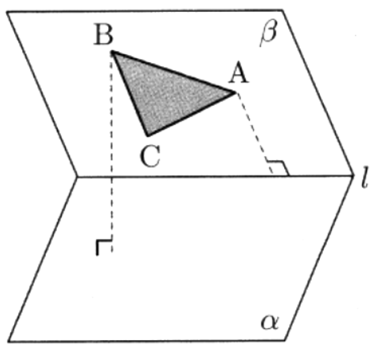
017.

평면 α 위에 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원 C가 있다. 밑면이 원 C이고 모선의 길이가 4인 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 점 A를 지나고 평면 α와 이루는 각의 크기가 30°인 평면을 β라 하고, 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 원 C 위의 점 P에 대하여 직선 OP와 직선 l은 평행하다. 직선 AP와 평면 β가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.17) (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



018.

공간상에 두 평면 α, β와 두 평면의 교선 l이 있다. 평면 β 위에 있는 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 대하여 직선 BC가 교선 l과 수직이다. 점 A에서 교선 l까지의 거리와 점 B에서 평면 α까지의 거리가 모두 3일 때, 정삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는?18)



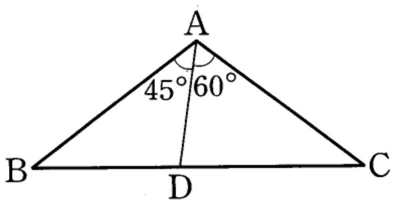
① $\frac{12\sqrt{3}}{5}$　② $\frac{13\sqrt{3}}{5}$　③ $\frac{14\sqrt{3}}{5}$
④ $3\sqrt{3}$　⑤ $\frac{16\sqrt{3}}{5}$

개념7

✔ 삼면각 : 상황과 보조선 기억해둬

019.

아래의 그림과 같이 $\angle A = 105^\circ$ 인 $\triangle ABC$에서 변 BC 위에 $\angle BAD = 45^\circ$가 되도록 점 D를 잡는다. $\overline{AD}$를 접는 선으로 하여 $\triangle ABD$와 $\triangle ADC$가 수직이 되도록 접었을 때, $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. 이때 $\cos\theta$의 값은?[19)]

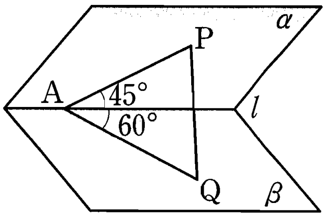


① $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

020.

아래 그림과 같이 평면 α와 β의 교선 l 위에 점 A가 있고 평면 α 위의 선분 AP와 평면 β 위의 선분 AQ가 l과 이루는 각의 크기가 각각 $45°$, $60°$이고 $\overline{AP}=\sqrt{6}$, $\overline{AQ}=1+\sqrt{3}$, $\overline{PQ}=2$일 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?20)



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ 0

021.

한 평면 위에 있지 않은 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 사면체 ABCD의 부피는?21)

(가) $\overline{AB}=\overline{AC}=1$, $\overline{AD}=\sqrt{5}$
(나) $\cos(\angle BAC)=0$
(다) $\cos(\angle CAD)=\cos(\angle DAB)=\frac{\sqrt{5}}{5}$

① $\frac{\sqrt{2}}{5}$　② $\frac{\sqrt{2}}{6}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

개념8

✔ 적당한 한 면에 정사영시킨 그림을 생각해서 풀자.
: 사실 그 적당한 면을 찾는 것이 어려울 수 있다.

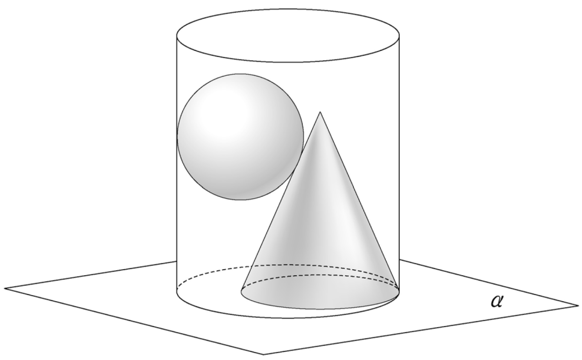
✔ 구의 단면화
① 구와 직선이 만나면 : 구의 중심과 직선을 포함하는 평면으로 단면화
② 구와 평면이 만나면 : 구의 중심을 지나고 평면과 수직인 평면으로 단면화

022.

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
(나) 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A′, B′일 때, $\angle \mathrm{A'OB'} = 180^{\circ}$ 이다.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta = p$이다. $100p$의 값을 구하여라.[22] (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A′은 일치한다.)



023.

좌표공간에서 구

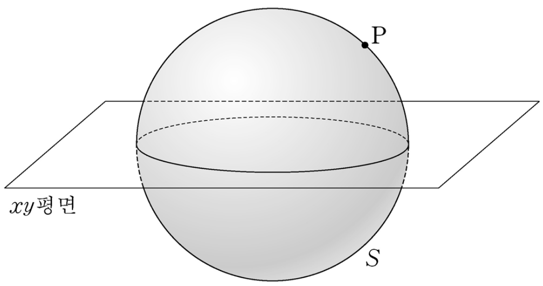
$$S:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$

위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 구 S에 접하는 평면이 구 $x^2+y^2+z^2=16$과 만나서 생기는 도형의 넓이의 최댓값은 $(a+b\sqrt{3})\pi$이다. $a+b$의 값을 구하여라.23) (단, a, b는 자연수이다.)

024.

좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하여라.24) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.
(나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



1) 25

2) 45

3) 5

4) 11

5) 15

6) ②

7) ④

8) ③

9) 30

10) 60

11) 13

12) ③

13) $\frac{5\sqrt{33}}{33}$

14) $\frac{5}{7}$

15) ④

16) 12

17) 23

18) ⑤

19) ③

20) ③

21) ④

22) 32

23) 13

24) 9