원포인트 개념주입 B2

공간도형/좌표

개념1

✔ 위치관계 : 뇌

001.

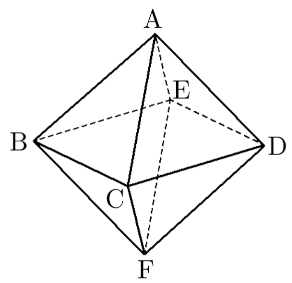
좌표공간에 직선 l과 직선 l을 포함하지 않는 서로 다른 두 평면 α, β가 있다. $l\perp\alpha$이고 $\alpha\perp\beta$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[1)]

ㄱ. $l /\!/ \beta$
ㄴ. 평면 β와 수직인 직선 m은 직선 l과 수직이다.
ㄷ. 직선 l과 수직인 직선 n은 평면 β와 수직이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

002.

그림과 같은 정팔면체 ABCDEF에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[2)]



ㄱ. 평면 ABC와 평면 FDE의 교선이 존재한다.
ㄴ. 평면 FCB와 평행한 모서리의 개수는 3이다.
ㄷ. 모서리 CD와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

✏ 정사면체 A－BCD에서 △BCD의 무게중심을 G,
정사면체의 내접구(혹은 외접구)의 중심을 O라 하면, $\overline{AO}:\overline{OG}=3:1$이다.
✔ 마주보는 두 변과 평행한 단면 ⇒ 나머지 변들을 몇 대 몇으로 내분하는지 파악한다.
✔ 단면 ADM ⇒ 알아서 잘.

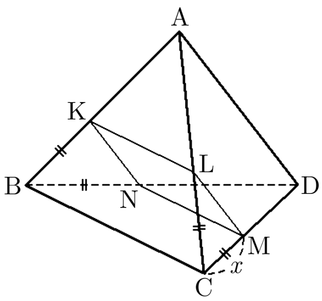
개념2

003.

한 모서리의 길이가 1인 정사면체 ABCD에서

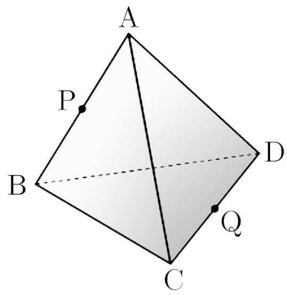
$$\overline{BK}=\overline{CL}=\overline{CM}=\overline{BN}=x\,(0<x<1)$$

가 되도록 네 점 K, L, M, N을 각각 네 선분 AB, AC, CD, BD 위에 잡을 때, 사각형 KLMN의 넓이를 $S(x)$라 하자. 이때, 함수 $S(x)$의 도함수 $S'(x)$에 대하여 $60\times S'\left(\frac{1}{3}\right)$의 값을 구하여라.[3)]



004.

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD의 두 모서리 AB, CD 위를 움직이는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은?[4)]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

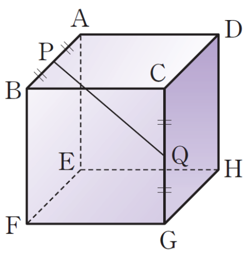
개념3

✔ 직선과 직선이 이루는 각 :
적당히 평행이동시켜서 연결 → 삼각형 만들어서 코사인법칙

✔ 직선과 평면이 이루는 각 :
교점 A 찾기 → 직선 상의 점 P에서 평면에 수선의 발 H내리기 → $\angle \mathrm{PAH}$

005.

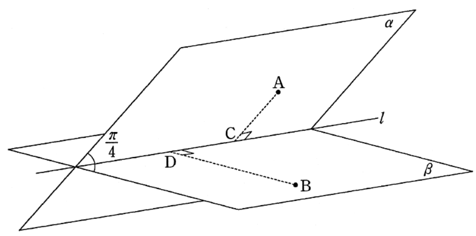
그림과 같이 정육면체 ABCD−EFGH의 두 모서리 AB, CG의 중점을 각각 P, Q라 하자. 직선 PQ와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?[5)]



① $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$　② $\dfrac{\sqrt{26}}{6}$　③ $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$　④ $\dfrac{\sqrt{33}}{6}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{35}}{6}$

006.

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하여라.[6)]
(단, a, b는 유리수이다.)

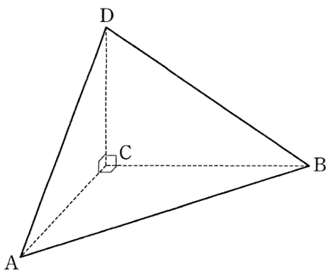


개념4

✔ 공간 상에서 점 P에서 직선 l에 수선의 발을 내릴 때는
① 점 P에서 직선을 품는 '알기 쉬운' 평면 α에 내린 수선의 발 H을 찾는다.
② 점 H에서 직선 l에 수선의 발을 내린다.

007.

$\overline{AB}=8$, $\angle ACB=90^\circ$인 삼각형 ABC에 대하여 점 C를 지나고 평면 ABC에 수직인 직선 위에 $\overline{CD}=4$인 점 D가 있다. 삼각형 ABD의 넓이가 20일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.7)



008.

평면 α 위에 거리가 4인 두 점 A, C와 중심이 C이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 점 A에서 이 원에 그은 접선의 접점을 B라 하자. 점 B를 지나고 평면 α와 수직인 직선 위에 $\overline{BP}=6$이 되는 점을 P라 할 때, 점 C와 직선 AP 사이의 거리는?8)

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{14}$
④ 4 ⑤ $\sqrt{21}$

개념5

✔ 직선과 평면의 수직성

① 평면 위의 두 방향과 수직이면 평면과 수직이다.

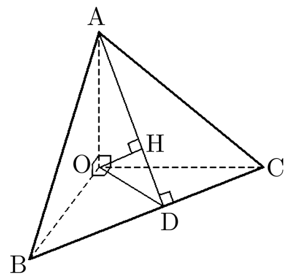
② 기준평면(바닥)을 설정한다.

009.

그림과 같이 사면체 OABC에서

$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OB}$, $\mathrm{OB}\perp\mathrm{OC}$, $\mathrm{OC}\perp\mathrm{OA}$

이다. 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 점 O에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?9)



ㄱ. $\mathrm{OD}\perp\mathrm{BC}$

ㄴ. $\mathrm{OH}\perp\mathrm{BC}$

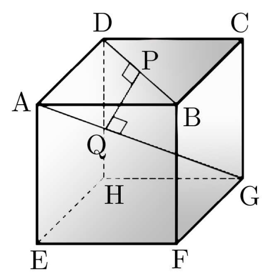
ㄷ. $\mathrm{OH}\perp$(평면 ABC)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

010.

그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정육면체 ABCD－EFGH에서 두 선분 BD, AG 위를 움직이는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ가 두 선분 BD, AG와 각각 수직일 때, 선분 PQ의 길이는?10)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2

④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

✔ 두 평면이 이루는 각 :

1) 교선 찾기 → 교선에 수직이면서 각 면에 포함되는 직선 찾기

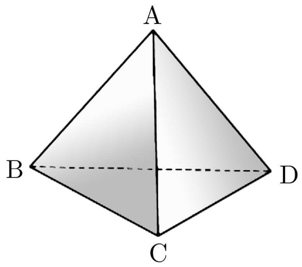
2) 교선 찾기 → 한 면 위의 점에서 교선과 다른 평면에 수선의 발을 내려서 잇기

✔ 이면각 찾는 방법 : ① 직접, ② 정사영, ③ 좌표화

개념6

011.

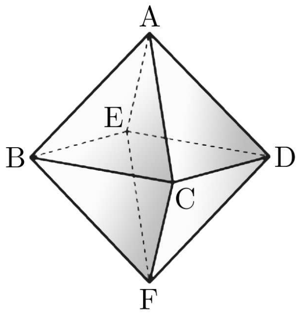
정삼각뿔 ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=5$이고 삼각형 BCD는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다. 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?11)



① $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

012.

그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정팔면체에서 평면 ABC와 평면 BCF가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\frac{\theta}{2}$의 값은?12)



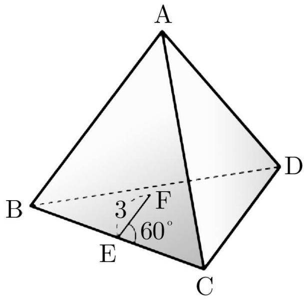
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

✏ 이면각과 선분 : 알지?
✏ 삼면각 : 연습만 해 두자.

개념7

013.

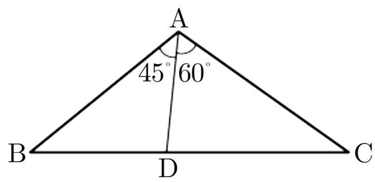
그림과 같이 정사면체 ABCD의 한 면 ABC 위에 길이가 3인 선분 EF가 있다. 직선 EF와 직선 BC가 이루는 각의 크기가 60°일 때, 선분 EF의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이는?[13)]



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

014.

그림과 같이 $\angle A = 105^\circ$인 삼각형 ABC 모양의 종이가 있다. 선분 BC 위의 점 D와 점 A를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 평면 ABD와 평면 ADC가 수직이 되도록 종이를 접었다. $\angle \mathrm{BAD} = 45^\circ$, $\angle \mathrm{CAD} = 60^\circ$일 때, 접은 도형에서 직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?[14)] (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



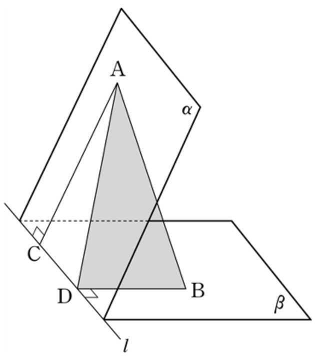
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

개념8

✏ 기준 평면과 수선의 발 : 잘 생각.

015.

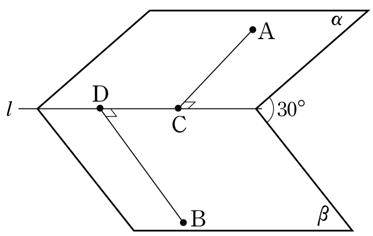
두 반평면 α, β가 이루는 이면각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이고, 직선 l을 교선으로 한다. 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B에 대하여 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}=4$, $\overline{BD}=3$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때, 평면 ADB와 평면 β가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos^2\theta$의 값은?15)



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

016.

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 30° 인 두 평면 α, β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=10$, $\overline{AD}=2\sqrt{79}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 60°일 때, 점 B에서 평면 α까지의 거리를 구하여라.16)

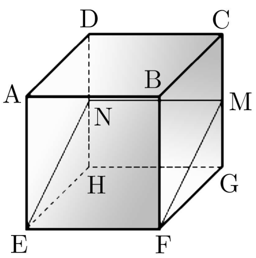


✏ 정사영의 넓이는 $\cos\theta$배가 된다.

개념9

017.

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH에서 두 모서리 CG, DH의 중점을 각각 M, N이라 하자. 사각형 EFGH의 평면 NEFM 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $10S^2$의 값을 구하여라.17)

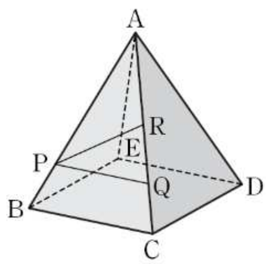


018.

그림과 같이 밑면이 정사각형이고 옆면이 모두 이등변삼각형인 정사각뿔 A−BCDE에서

$$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}=6,\ \overline{BC}=4$$

이다. 모서리 AB를 3:1로 내분하는 점을 P, 모서리 AC의 중점을 R, 모서리AC를 3:1로 내분하는 점을 Q라 할 때, 삼각형 PQR의 면 BCDE 위로의 정사영의 넓이 S에 대하여 $20S$의 값을 구하여라.18)

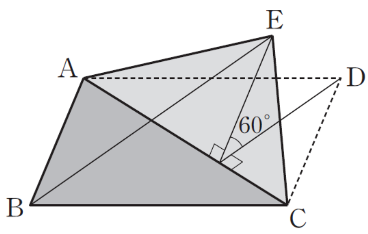


✔ 종이 접기에 관련된 문제
⇒ 한쪽 평면을 고정하고 직선 l을 접는 선으로 하여 종이를 접을 때, 움직이는 쪽 평면 위의 점 P는 l에 수직인 평면 위를 움직인다.

개념10

019.

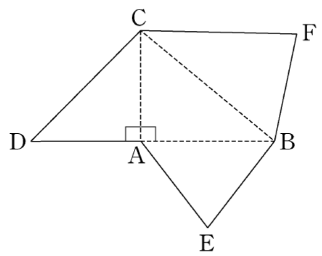
그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$인 직사각형 ABCD의 대각선 AC를 접는 선으로 하여 평면 ACD와 이루는 각의 크기를 60°가 되도록 삼각형 DAC를 접어 올려 생긴 삼각형을 EAC라 하자. 평면 EAB와 평면 ABCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?19) (단, 점 E에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발은 삼각형 ACD의 내부에 존재한다.)



① $\frac{\sqrt{11}}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{9}$
④ $\frac{\sqrt{14}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{9}$

020.

그림은 $\overline{AC}=\overline{AE}=\overline{BE}$이고 $\angle DAC=\angle CAB=90^\circ$인 사면체의 전개도이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 세 점 D, E, F가 합쳐지는 점을 P라 하자. 사면체 PABC에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?20)



ㄱ. $\overline{CP}=\sqrt{2}\cdot\overline{BP}$
ㄴ. 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다.
ㄷ. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.

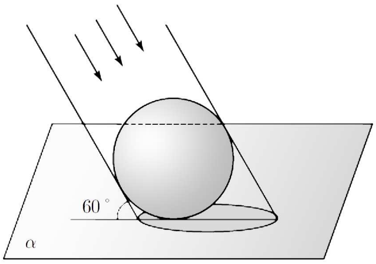
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

✔ 빛과 수직인 면과, 그림자를 만드는 면의 교선을 점으로 보는 쪽에서 단면화
⇒ 넓이 비가 되는 길이 비를 찾는다.

개념11 ✔ 입체의 그림자 : 빛에 수직인 평면으로 단면화, 그림자를 만드는 면을 찾는다.

021.

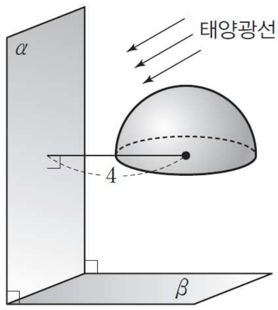
그림과 같이 평면 α 위에 반지름의 길이가 4인 구가 놓여 있다. 평면 α와 60°의 각을 이루면서 빛을 비출 때, 평면 α 위에 나타나는 구의 그림자의 넓이는?21)



① $10\sqrt{3}\pi$ ② $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\dfrac{34\sqrt{3}}{3}\pi$
④ $12\sqrt{3}\pi$ ⑤ $\dfrac{38\sqrt{3}}{3}\pi$

022.

그림과 같이 반지름의 길이가 2인 반구의 밑면의 중심은 평면 α로부터 4만큼 떨어져 있고 반구의 밑면은 평면 α와 수직인 평면 β와 평행하다.
태양광선이 평면 α와 60°의 각을 이루면서 두 평면 α, β의 교선에 수직으로 비추고 있을 때, 평면 α에 생긴 반구의 그림자의 넓이는?22) (단, 반구의 그림자는 모두 평면 α에 생긴다.)



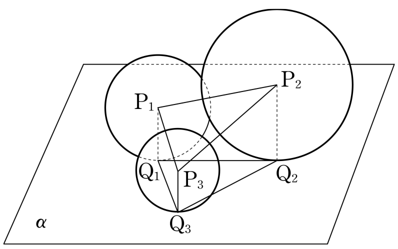
① $\sqrt{3}\pi$ ② $2\sqrt{3}\pi$ ③ $3\sqrt{3}\pi$
④ $4\sqrt{3}\pi$ ⑤ $5\sqrt{3}\pi$

개념12

✔ 구 : 중심에서부터 생각.

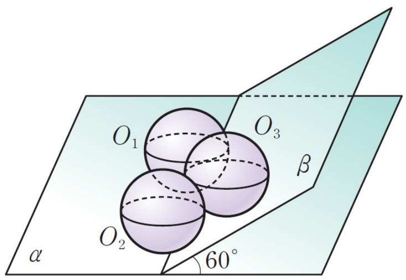
023.

그림과 같이 반지름의 길이가 3, 5이고 중심이 P_1, P_2인 두 구가 서로 외접하고, 반지름의 길이가 1이고 중심이 P_3인 구가 중심이 P_1인 구에만 외접한다. 세 구가 평면 α에 접하고 삼각형 $P_1P_2P_3$의 평면 α 위로의 정사영을 삼각형 $Q_1Q_2Q_3$이라 하자. $\angle Q_1Q_3Q_2 = 90^\circ$일 때, 선분 P_2P_3의 길이를 구하여라.23)



024.

반지름의 길이가 6인 세 구 O_1, O_2, O_3이 있다. 그림과 같이 두 구 O_1, O_2는 서로 외접하며 두 평면 α, β에 접하고, 구 O_3은 두 구 O_1, O_2에 외접하며 평면 β에 접한다. 평면 α와 β가 이루는 각의 크기가 60°일 때, 구 O_3의 구면 위의 점에서 평면 α까지의 거리의 최댓값은?24)



① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

개념13

✔ 좌표공간 : 알아서 잘 한다.

① 두 점 사이의 거리 : $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

② 내분점과 외분점 : $\left(\dfrac{mx_2 \pm nx_1}{m \pm n}, \dfrac{my_2 \pm ny_1}{m \pm n}, \dfrac{mz_2 \pm nz_1}{m \pm n}\right)$

025.

좌표공간에서 점 A$(2, 0, 1)$과 xy평면에 대하여 대칭인 점을 P, yz평면에 대하여 대칭인 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는?[25)]

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

026.

좌표공간의 두 점 A$(-1, 0, 2)$, B$(2, 3, 4)$와 xy평면 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은?[26)]

① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{13}$
④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

027.

좌표공간의 두 점 A$(1, a, -6)$, B$(-3, 2, b)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 x축 위에 있을 때, $a+b$의 값은?[27)]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

028.

좌표공간에서 두 점 A$(1, 3, -6)$, B$(7, 0, 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(a, b, 0)$이다. $a+b$의 값은?[28)]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

✔ 구와 평면

① 교선의 반지름 : $\sqrt{r^2-d^2}$

② 구와 평면이 접할 조건 : $d=r$

③ 접하는 평면의 법선벡터 : $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

개념23

※ ① 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$과 xy평면과의 교선 : $z=0$ 대입

② 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$의 xy평면에 내린 정사영 : $(z-c)^2$ 제거

029.

좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z+k=0$과 두 점 $\mathrm{A}(2,\ -3,\ 4)$, $\mathrm{B}(0,\ -1,\ 2)$가 있다. 구 S의 xy평면 위로의 정사영과 직선 AB의 xy평면 위로의 정사영이 서로 접하게 되는 실수 k의 값은?29)

① 8　　② 11　　③ 14

④ 17　　⑤ 20

030.

좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수이고 반지름이 $3\sqrt{2}$인 구 S가 x축과 y축과 각각 접하고 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 원점과 구의 중심을 이은 선분과 xy평면이 이루는 각을 θ라 하면 $\tan\theta=2$이다. z축과 만나는 두 점 사이의 거리는?30)

① $2\sqrt{10}$　　② $4\sqrt{3}$　　③ $2\sqrt{14}$

④ 8　　⑤ $6\sqrt{2}$

1) ③

2) ⑤

3) 20

4) ③

5) ③

6) 12

7) 12

8) ②

9) ⑤

10) ⑤

11) ②

12) ③

13) ②

14) ②

15) ④

16) 9

17) 128

18) 15

19) ⑤

20) ⑤

21) ②

22) ②

23) 8

24) ⑤

25) ③

26) ④

27) ①

28) ①

29) ②

30) ③