원포인트 개념주입 B

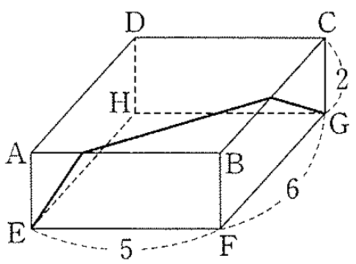
공간도형

개념1

✔ 최단거리 : 전개도로 펴놓고 생각한다.

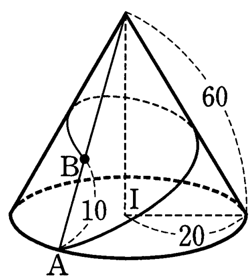
001.

그림과 같이 세 모서리의 길이가 5, 6, 2인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 면 위를 따라 꼭짓점 E에서 모서리 AB, BC를 지나 점 G에 이르는 선을 그을 때, 최단 거리를 구하여라.1)



002.

그림과 같은 직원뿔 모양의 산이 있다. A지점을 출발하여 산을 한 바퀴 돌아 B지점으로 가는 관광열차의 궤도를 최단 거리로 놓으면 이 궤도는 처음에는 오르막길이지만 나중에는 내리막길이 된다. 이 내리막길의 길이를 구하여라.2)



개념2

✏ 정사면체 $A-BCD$에서 $\triangle BCD$의 무게중심을 G,
정사면체의 내접구(혹은 외접구)의 중심을 O라 하면, $\overline{AO}:\overline{OG}=3:1$이다.
✔ 마주보는 두 변과 평행한 단면 ⇒ 나머지 변들을 몇 대 몇으로 내분하는지 파악한다.

003.

중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구에 내접하는 정사면체 $ABCD$가 있다. 두 삼각형 BCD, ACD의 무게중심을 각각 F, G라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?3)

ㄱ. 두 직선 $\overline{AF}$와 $\overline{BG}$는 꼬인 위치에 있다.
ㄴ. 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$보다 작다.
ㄷ. $\angle AOG=\theta$일 때, $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

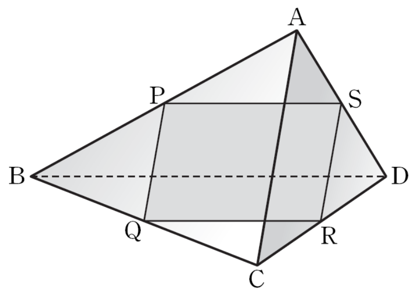
004.

$\overline{AC}=\overline{BD}=2$인 사면체 $ABCD$에서 세 선분 AB, CD, AD의 중점을 각각 P, Q, R이라 하자. 삼각형 PQR의 넓이가 $\frac{1}{6}$일 때, 두 직선 AC와 BD가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\sin\theta$의 값은?4)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

005.

그림과 같이 $\overline{AC}=4$, $\overline{BD}=6$이고, 두 직선 AC와 BD가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 사면체 $ABCD$를 두 직선 AC와 BD에 평행한 평면으로 사면체 $ABCD$를 자를 때, 모서리 AB, BC, CD, DA와의 교점을 각각 P, Q, R, S라 하자. 사각형 $PQRS$의 넓이의 최댓값은?5)



① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ 3
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 4

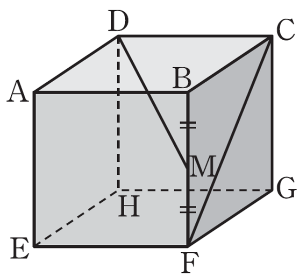
개념3

✔ 직선과 직선이 이루는 각 :
적당히 평행이동시켜서 연결 → 삼각형 만들어서 코사인법칙

✔ 직선과 평면이 이루는 각 :
교점 A 찾기 → 직선 상의 점 P에서 평면에 수선의 발 H내리기 → ∠PAH

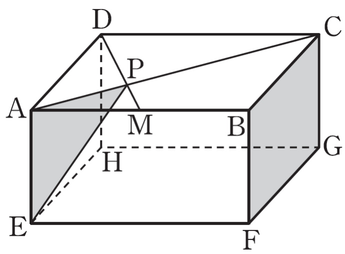
006.

한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH가 있다. 선분 BF의 중점을 M, 직선 DM과 직선 CF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[6] (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



007.

그림과 같이 $\overline{AD}=\overline{AE}=3$, $\overline{AB}=6$인 직육면체 ABCD−EFGH에서 선분 AB의 중점을 M, 두 선분 AC와 DM의 교점을 P라고 하자. 직선 PE와 평면 BFGC가 이루는 예각의 크기를 α, 직선 BC와 평면 AEP가 이루는 예각의 크기를 β라고 할 때, $\cos^2\alpha \times \cos^2\beta$의 값은?[7]



① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{4}{21}$ ③ $\frac{5}{21}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

개념4

✔ 공간 상에서 점 P에서 직선 l에 수선의 발을 내릴 때는
① 점 P에서 직선을 품는 '알기 쉬운' 평면 α에 내린 수선의 발 H을 찾는다.
② 점 H에서 직선 l에 수선의 발을 내린다.

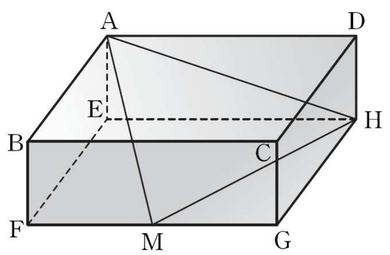
008.

좌표공간 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 1,\ 6)$에서 zx평면 위에 있는 직선 $3x+z=2$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 길이는?8)

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$
④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

009.

그림과 같은 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=3$, $\overline{\mathrm{AE}}=1$인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 선분 FG의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 AMH의 넓이는?9)



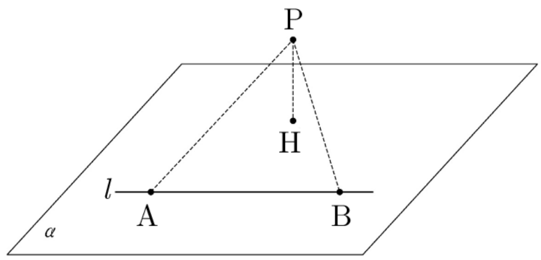
① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

010.

평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선을 l이라 하고, 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=6$, $\overline{\mathrm{PH}}=4$

일 때, 점 H와 직선 l 사이의 거리는?10)



① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$
④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

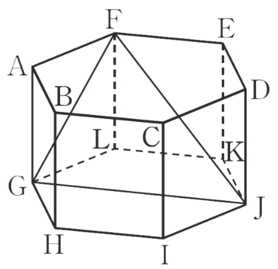
✔ 두 평면이 이루는 각 :
1) 교선 찾기 → 교선에 수직이면서 각 면에 포함되는 직선 찾기
2) 교선 찾기 → 한 면 위의 점에서 교선과 다른 평면에 수선의 발을 내려서 잇기

개념5

✔ 이면각 찾는 방법 : ① 직접, ② 정사영

011.

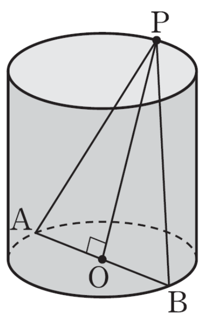
그림은 모든 모서리의 길이가 같은 정육각기둥이다. 평면 FGJ와 정육각기둥의 한 밑면 GHIJKL이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은?11)



① $\frac{\sqrt{14}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ③ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$
④ $\frac{\sqrt{35}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{42}}{7}$

012.

그림과 같이 밑면인 원의 반지름의 길이가 1이고 높이가 2인 원기둥이 있다. 원기둥의 위쪽에 있는 밑면인 원의 둘레 위의 점 P와 아래쪽에 있는 밑면인 원의 중심 O에 대하여 직선 PO에 수직인 아래쪽에 있는 밑면의 지름을 선분 AB라고 하자. 평면 PAB와 원기둥의 밑면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?12)



① $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{30}}{10}$
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

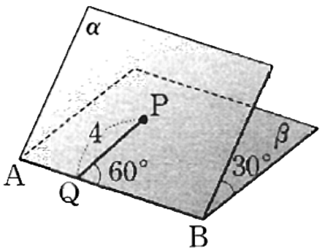
개념6

✏ 이면각이 θ인 두 평면 α, β에 대하여, 두 평면의 교선과 ϕ의 각을 이루며 α에 포함되는 직선과 평면 β가 이루는 각을 ψ라 하면, $\sin\psi = \sin\theta\sin\phi$이다.

※ 외울 필요 없고, 보조선 긋는 요령을 숙지한다.

013.

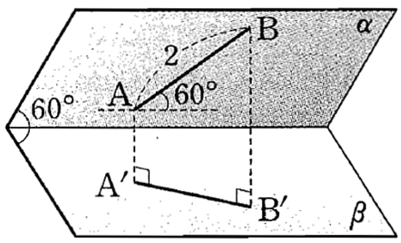
그림에서 두 평면 α, β의 교선은 AB이고, 두 평면이 이루는 각은 30°이다. 평면 α 위의 점 P와 교선 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}=4$, $\angle PQB = 60^\circ$일 때, 선분 PQ의 평면 β 위로의 정사영의 길이는?13)



① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{11}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

014.

아래 그림과 같이 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 60°이고, 평면 α 위에 길이가 2인 선분 AB가 있다. 두 평면 α, β의 교선과 선분 AB가 이루는 각의 크기가 60°일 때, 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영의 길이를 구하여라.14)



개념7

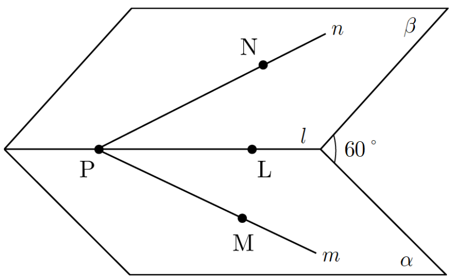
✏ 사면체 $\mathrm{O-ABC}$에서 $\overline{\mathrm{OA}}$와 $\overline{\mathrm{OB}}$가 이루는 각을 α, $\overline{\mathrm{OA}}$와 $\overline{\mathrm{OC}}$가 이루는 각을 β, $\overline{\mathrm{OB}}$와 $\overline{\mathrm{OC}}$가 이루는 각을 γ, 면 OAC와 면 OAB가 이루는 각을 θ라 하면,

$$\cos\theta = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

※ 외울 필요 없고, 보조선 긋는 요령을 숙지한다.

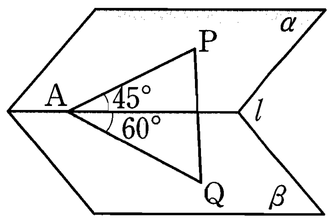
015.

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 60°인 두 평면 α, β가 있고, 평면 α 위의 직선 m과 평면 β 위의 직선 n은 점 P에서 서로 만난다. 세 점 L, M, N이 각각 직선 l, m, n 위의 점이고 $\cos(\angle \mathrm{LPN}) = \frac{4}{5}$, $\cos(\angle \mathrm{LPM}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다. $\angle \mathrm{NPM} = \theta$일 때 $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[15] (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



016.

그림과 같이 평면 α와 β의 교선 l 위에 점 A가 있고 평면 α 위의 선분 AP와 평면 β 위의 선분 AQ가 l과 이루는 각의 크기가 각각 45°, 60°이고 $\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{AQ}} = 1+\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PQ}} = 2$일 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?[16]



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

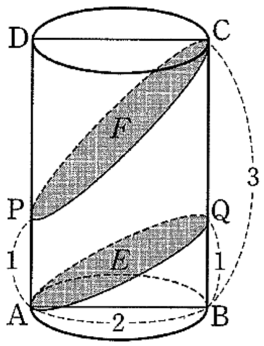
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 0

✏ 정사영의 넓이는 $\cos\theta$배가 된다.

개념8

017.

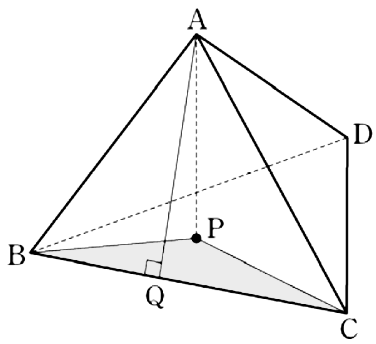
그림과 같이 두 밑면의 지름 AB, CD의 길이가 2이고 높이가 3인 원기둥이 있다. 두 직선 AB, CD가 평행할 때, 선분 AD 위에 $\overline{AP}=1$인 점 P를 잡고, 선분 BC 위에 $\overline{BQ}=1$인 점 Q를 잡는다. 두 점 A, Q를 지나는 평면으로 자른 원기둥의 단면을 E, 두 점 C, P를 지나는 평면으로 자른 원기둥의 단면을 F라 할 때, 단면 E의 단면 F를 포함하는 평면 위로의 정사영의 넓이는?17) (단, 두 단면 E, F와 밑면이 이루는 각의 크기는 각각 $\angle QAB$, $\angle PCD$이다.)



① $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}\pi$

018.

그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=12$, $\cos(\angle ABC)=\frac{\sqrt{3}}{3}$인 사면체 ABCD에 대하여 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 P라 하고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\cos(\angle AQP)=\frac{\sqrt{3}}{6}$일 때 삼각형 BCP의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하여라.18)

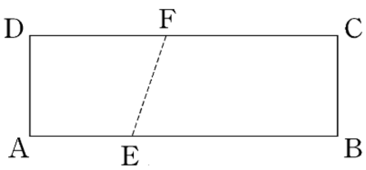


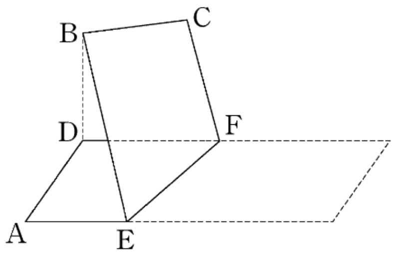
개념9

✔ 종이 접기에 관련된 문제
⇒ 한쪽 평면을 고정하고 직선 l을 접는 선으로 하여 종이를 접을 때, 움직이는 쪽 평면 위의 점 P는 l에 수직인 평면 위를 움직인다.

019.

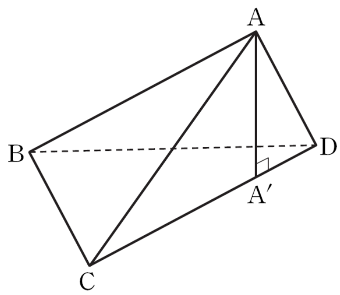
그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다. $\overline{AE}=3$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하여라.[19] (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)





020.

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$인 직사각형 ABCD를 대각선 BD를 접는 선으로 하여 꼭짓점 A의 평면 BCD 위로의 정사영 A′이 선분 CD 위에 오도록 접었다. 사면체 ABCD의 부피는?[20]



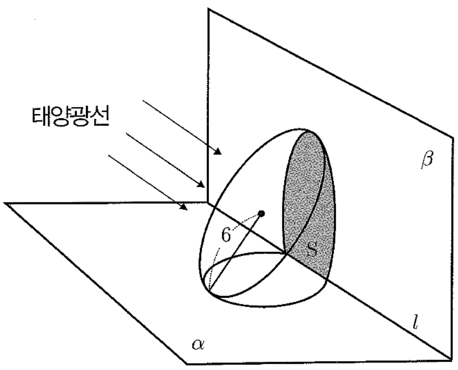
① $\sqrt{3}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

개념10

✔ 빛과 수직인 면과, 그림자를 만드는 면의 교선을 점으로 보는 쪽에서 단면화
$\Rightarrow$ 넓이 비가 되는 길이 비를 찾는다.

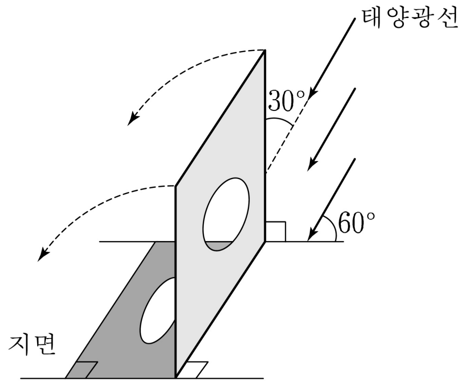
021.

서로 수직인 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 반지름의 길이가 6인 원판이 두 평면 α, β와 각각 한 점에서 만나고 교선 l에 평행하게 놓여 있다. 태양광선이 평면 α와 30°의 각을 이루면서 원판의 면에 수직으로 비출 때, 그림과 같이 평면 β에 나타나는 원판의 그림자의 넓이를 S라 하자. S의 값을 $a+b\sqrt{3}\pi$라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.[21] (단, a, b는 자연수이고 원판의 두께는 무시한다.)



022.

그림과 같이 태양광선이 지면과 60°의 각을 이루면서 비추고 있다. 한 변의 길이가 4인 정사각형의 중앙에 반지름의 길이가 1인 원 모양의 구멍이 뚫려 있는 판이 있다. 이 판은 지면과 수직으로 서 있고 태양광선과 30°의 각을 이루고 있다. 판의 밑변을 지면에 고정하고 판을 그림자 쪽으로 기울일 때 생기는 그림자의 최대 넓이를 S라 하자. S의 값을 $\dfrac{\sqrt{3}(a+b\pi)}{3}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.[22] (단, a, b는 정수이고 판의 두께는 무시한다.)

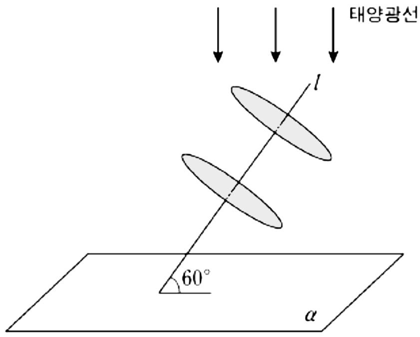


✔ 입체의 그림자 : 빛에 수직인 평면으로 단면화, 그림자를 만드는 면을 찾는다.

개념11

023.

그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 60°이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는?23) (단, 원판의 두께는 무시한다.)



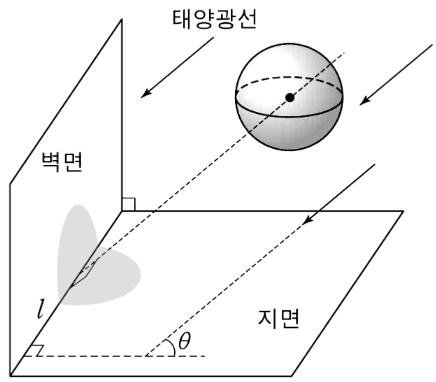
① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{3}{8}$　② $\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

③ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{1}{8}$　④ $\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{16}$

⑤ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{3}{4}$

024.

그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다. 벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 a라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 b라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?24)



ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다.
ㄴ. $\theta=60^\circ$이면 $a<b$이다.
ㄷ. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{r^2}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념12

✔ 좌표공간 : 알아서 잘 한다.

① 두 점 사이의 거리 : $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

② 내분점과 외분점 : $\left(\frac{mx_2 \pm nx_1}{m \pm n}, \frac{my_2 \pm ny_1}{m \pm n}, \frac{mz_2 \pm nz_1}{m \pm n}\right)$

025.

좌표공간의 점 P$(2, 2, 3)$을 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q라 하자. 두 점 P와 Q 사이의 거리는?[25)]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

026.

좌표공간에 두 점 $(a, 0, 0)$과 $(0, 6, 0)$을 지나는 직선 l이 있다. 점 $(0, 0, 4)$와 직선 l 사이의 거리가 5일 때, a^2의 값은?[26)]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

027.

좌표공간에서 두 점 A$(2, a, -2)$, B$(5, -3, b)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, $a+b$의 값은?[27)]

① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

028.

좌표공간에서 세 점

A$(a, 0, 5)$, B$(1, b, -3)$, C$(1, 1, 1)$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(2, 2, 1)$일 때, $a+b$의 값은?[28)]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

개념13

✔ 구가 만나네, 접하네 할 때는 항상 중심과의 거리를 살핀다.

029.

좌표공간에서 xy평면, yz평면, zx평면은 공간을 8개의 부분으로 나눈다. 이 8개의 부분 중에서 구

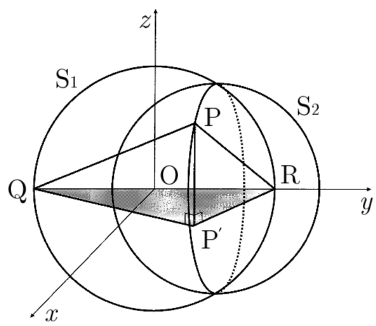
$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$

가 지나는 부분의 개수는?29)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

030.

두 구 $x^2+y^2+z^2=81$, $x^2+(y-5)^2+z^2=56$을 각각 S_1, S_2라 하자. 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하고, 점 P의 xy평면 위로의 정사영을 P′이라 하자. 구 S_1과 y축이 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, 사면체 PQP′R의 부피의 최댓값을 구하여라.30)



✔ 두 구가 외접하면 두 중심 사이의 거리는 두 반지름의 합이다.
✔ 두 구가 내접하면 두 중심 사이의 거리는 두 반지름의 차이다.
$\Rightarrow$ 구가 어디 접하거나 하면, 중심끼리 이어본다.
✔ 구의 단면화
① 구와 직선이 만나면 : 구의 중심과 직선을 포함하는 평면으로 단면화
② 구와 평면이 만나면 : 구의 중심을 지나고 평면과 수직인 평면으로 단면화

개념14

031.

다음 조건을 만족시키는 점 P 전체의 집합이 나타내는 도형의 둘레의 길이는?[31)]

좌표공간에서 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가 두 개의 구
$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$$
에 동시에 외접한다.

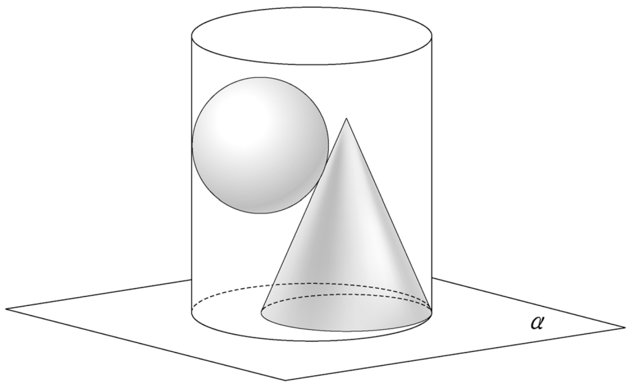
① $\frac{2\sqrt{5}}{3}\pi$ ② $\sqrt{5}\pi$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}\pi$
④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

032.

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
(나) 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A′, B′일 때, $\angle A'OB'=180^\circ$이다.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=p$이다. $100p$의 값을 구하여라.[32)]
(단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A′은 일치한다.)



1) $\sqrt{113}$

2) $\dfrac{400}{\sqrt{91}}$

3) ④

4) ②

5) ③

6) 3

7) ①

8) ④

9) ③

10) ①

11) ②

12) ②

13) ⑤

14) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

15) 321 $\cos\theta = \dfrac{11\sqrt{2}}{20}$

16) ③

17) ③

18) 162

19) 40

20) ②

21) 34

22) 30

23) ⑤

24) ③

25) ④

26) ⑤

27) ④

28) ④

29) ③

30) 84

31) ⑤

32) 32