[공간도형]

B19 | 평면의 결정조건

개념1 다음을 포함하는 평면은 유일하게 결정된다.

① 한 직선 상에 존재하지 않는 세 점

② 한 직선과 직선 밖의 한 점

③ 서로 만나는 두 직선

④ 평행한 두 직선

B20 | 직선과 평면의 위치관계

개념1 서로 다른 두 직선 사이의 위치관계

① 한 점에서 만난다.

② 평행하다.

} 한 평면 위에 - 신기

③ 꼬인 위치에 있다. - 안 신기

개념2 직선과 평면 사이의 위치관계

① 한 점에서 만난다. - 안 신기

② 평행하다. (만나지 않는다.) - 신기

③ 포함된다. - 졸라 신기

개념3 서로 다른 두 평면 사이의 위치관계

① 만난다. (교선을 가진다.)

② 평행하다. (만나지 않는다.)

※ 평면을 적당히 확장하여 두 평면의 교선을 작도할 수 있다.

B20E1 | 직선과 평면의 평행

개념1 다음 명제를 확인하여라.

① 직선 l과 평면 α가 평행하면 직선 l을 포함하는 평면 β와 평면 α의 교선 m은 l과 평행하다.

② 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P를 지나는 두 직선 l, m이 모두 α에 평행하면 두 직선 l, m을 포함하는 평면 β는 α와 평행하다.

③ 두 직선 l과 m이 평행할 때, m을 포함하고 l을 포함하지 않는 평면 α는 직선 l과 평행하다.

④ 직선 l이 평면 α에 평행하면 직선 l을 포함하는 두 평면 β, γ와 평면 α의 교선을 각각 m, n이라 할 때, 두 직선 m, n은 평행하다.

⑤ 평면 γ가 평행한 두 평면 α, β와 만날 때 생기는 두 교선은 평행하다.

⑥ 세 직선 a, b, c에 대하여 a와 b가 평행하고 b와 c가 평행하면 a와 c가 평행하다.

B21 | 두 직선이 이루는 각

개념1 공간의 두 직선이 이루는 각은 적당한 평행이동으로 만나게 한 후 구한다.

⇒ 일반적으로(교과서에 따라 다름) 예각을 의미한다.

✓ 일반적으로 구하는 순서(원칙)는,

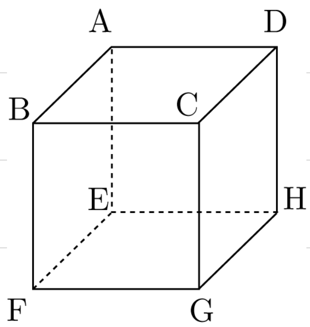
① 만나도록 평행이동 ⇒ ② 각을 포함하는 삼각형 구성 ⇒ ③ 코사인법칙

예제1 오른쪽의 정육면체 ABCD−EFGH에서

다음을 구하여라.

(1) 두 선분 AF, CD가 이루는 각

(2) 두 선분 AF, BH가 이루는 각



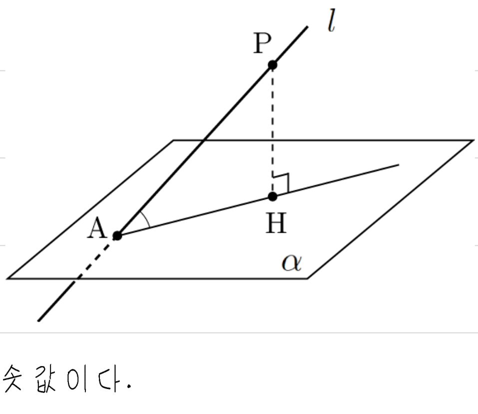
B22 | 직선과 평면이 이루는 각

개념1 직선 l이 평면 α와 점 A에서 만날 때,

직선 l 위의 점 P에서 평면 α에 내린

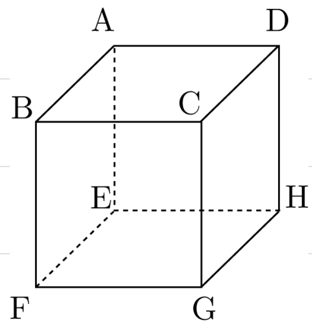
수선의 발을 H라 하면, $\angle$PAH를 직선 l과

평면 α가 이루는 각이라 한다.



※ 이 각은 α 상의 직선들과 l이 이루는 각 중 최솟값이다.

예제1 오른쪽 정육면체에서 다음을 구하여라.



(1) 직선 AH와 평면 EFGH가 이루는 각

(2) 직선 BH와 평면 EFGH가 이루는 각

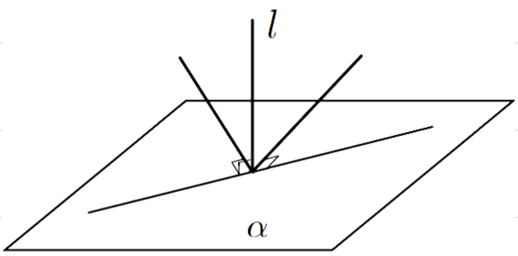
(3) 직선 DG와 평면 ABGH가 이루는 각

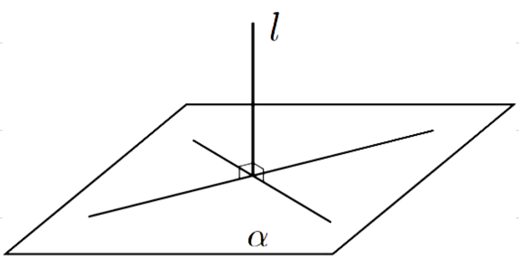
B23 | 직선과 평면의 수직성

개념1 직선 l과 평면 α가 서로 수직이다.

$\Leftrightarrow$ l은 평면이 포함하는 모든 직선과 서로 수직이다. (정의)

$\Leftrightarrow$ α 위의 서로 평행하지 않은 두 직선 m, n이 l과 수직이다.





예제1 정사면체 ABCD에서 AB⊥CD임을 보여라.

예제2 정육면체 ABCD−EFGH에서 AC⊥DF임을 보여라.

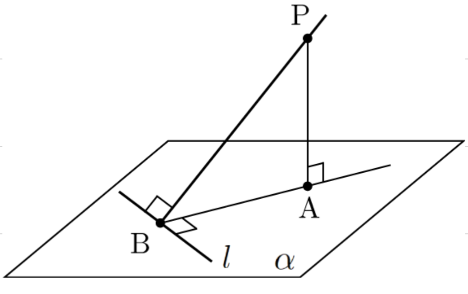
B23E1 | 삼수선의 정리

개념1 오른쪽 그림에서

① $\mathrm{PA}\perp\alpha$, $\mathrm{AB}\perp l$ $\Rightarrow$ $\mathrm{PB}\perp l$

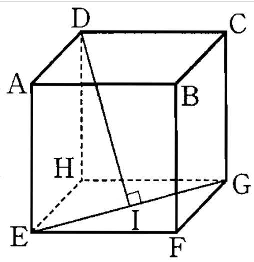
② $\mathrm{PA}\perp\alpha$, $\mathrm{PB}\perp l$ $\Rightarrow$ $\mathrm{AB}\perp l$

③ $\mathrm{PB}\perp l$, $\mathrm{AB}\perp l$, $\mathrm{PA}\perp\mathrm{AB}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{PA}\perp\alpha$

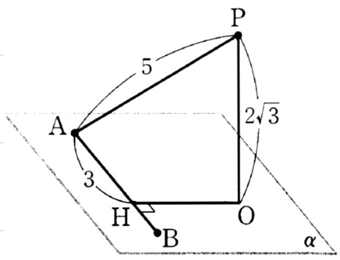


✓ 점에서 직선에 수선의 발을 내릴 때는 평면을 경유해서 내린다.

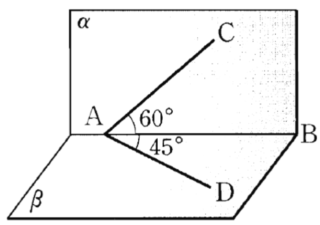
예제1 오른쪽 직육면체에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}=3$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$ 이다. 점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 선분 DI의 길이를 구하여라.



예제2 오른쪽 그림에서 O는 P에서 α에 내린 수선의 발이다. 선분 OH의 길이를 구하여라.



예제3 오른쪽 그림에서 두 평면 α와 β는 서로 수직이다. $\cos(\angle\mathrm{CAD})$를 구하여라.



B24 | 이면각

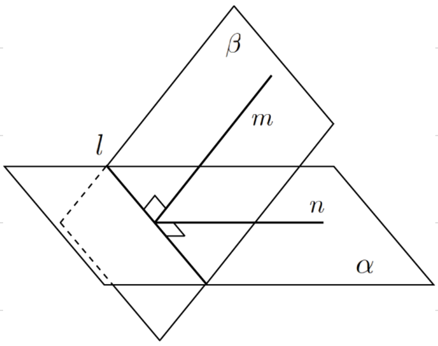
개념1 공간의 두 평면 α, β가 이루는 각은, 두 평면의 교선에 수직이며

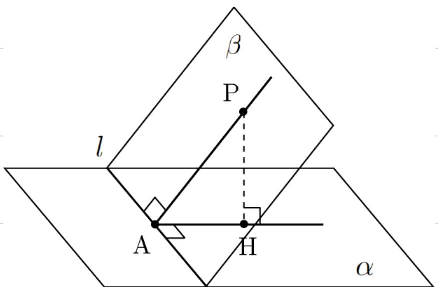
각각의 평면에 포함되는 두 직선이 이루는 각을 의미한다.

이 각의 크기를 평면 α와 평면 β의 이면각의 크기라 한다.

✓ 이면각을 포함하는 삼각형을 만들고 코사인법칙을 사용한다.

✓ 교선, 한 평면 위의 점을 잡고 삼수선의 정리를 활용한다.





※ 이면각의 크기를 구할 때는,

두 평면의 교선이 점으로 보이는 쪽에서 째려보면 좋다. (단면화)

예제1 정사면체 ABCD에서 다음을 구하여라.

(1) 평면 ABC와 평면 DBC가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos\theta$

(2) 선분 AB와 평면 BCD가 이루는 각을 ϕ라 할 때, $\cos\phi$

예제2 모든 변의 길이가 같은 정사각뿔 A$-$BCDE에서 다음을 구하여라.

(1) 선분 AB와 평면 BCDE가 이루는 각을 α라 할 때, $\cos\alpha$

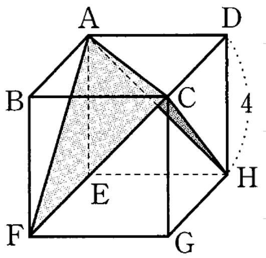
(2) 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 각을 β라 할 때, $\cos\beta$

(3) 평면 ABC와 평면 ACD가 이루는 각을 γ라 할 때, $\cos\gamma$

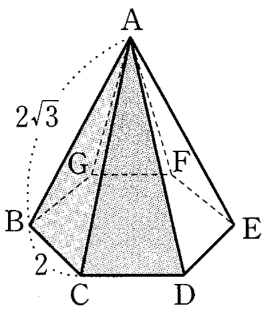
(4) 선분 AB와 평면 ACD가 이루는 각을 δ라 할 때, $\cos\delta$

예제3 다음 도형에서 색칠한 두 면이 이루는 이면각의 크기를 구하여라.

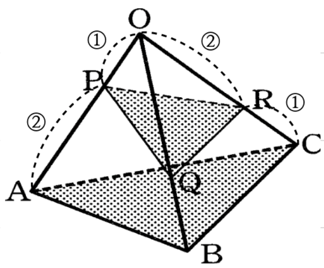
(1)



(2)



(3)



B24E1 | 정사면체

개념1 정사면체 A$-$BCD에서의 상식

① 이면각, 모서리와 면이 이루는 각, 높이

② A에서 $\triangle$BCD에 내린 수선의 발은 $\triangle$BCD의 무게중심 G이다.

③ 내접구의 중심을 O라 할 때, $\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{OG}}=3:1$

④ 한 변을 수직이등분하는 단면

⑤ 마주보는 변 사이의 거리

⑥ 마주보는 변들과 평행한 단면 (고슈사변형의 중점연결정리)

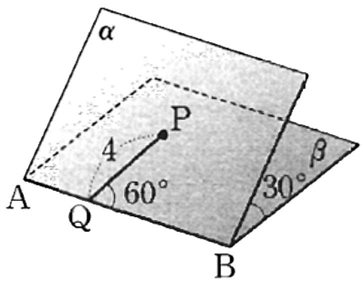
⑦ 좌표공간의 사면체 : $(0,\ 0,\ 0)$, $(a,\ a,\ 0)$, $(0,\ a,\ a)$, $(a,\ 0,\ a)$

B24E2 | 이면각과 선분

개념1 수선들을 열심히 내리는 보조선을 긋는다.

$\Rightarrow\ l' = l\sin\phi\cos\theta$

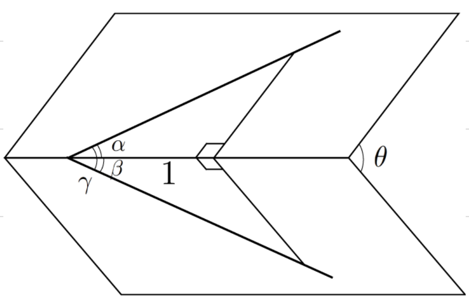
예제1 그림에서 선분 PQ의 평면 β 위로의 정사영의 길이를 구하여라.

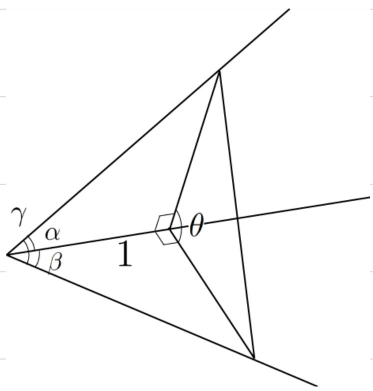


B24E3 | 삼면각

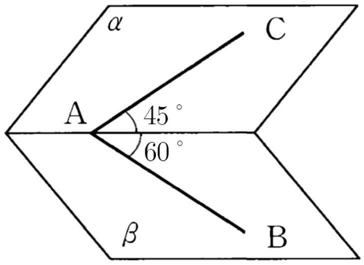
개념1 세 면의 교점에서 한 교선에 길이 1을 빼서 각각 선분에 수선을 내린다.

$$\Rightarrow\ \cos\theta = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

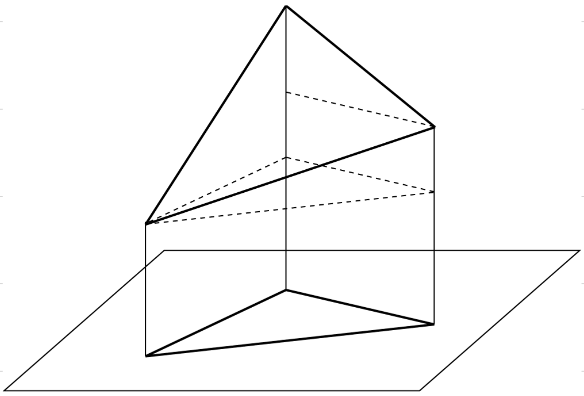




예제1 그림에서 두 평면 α, β가 이루는 각이 60°일 때, $\cos(\angle CAB)$의 값을 구하여라.



B24E4 | 삼각형의 정사영



개념1 확인하세요.

① 옆면 위 세 개의 직각삼각형

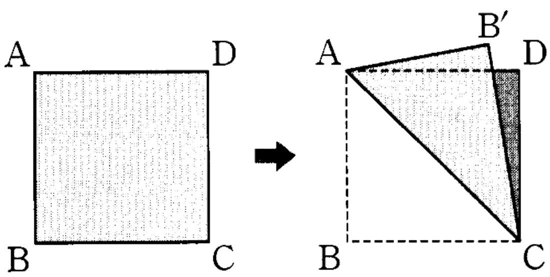
② 정사영의 넓이와 이면각의 크기

③ 교선의 위치

B24E5 | 종이 접는 문제

개념1 종이를 접을 때 한 점은 접는 선에 대하여 수직인 평면 위에서 움직인다.

예제1 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD를 선분 AC를 접는 선으로 하여 $\angle B'CD = 30^\circ$가 되도록 접는다. 평면 ACB', ACD가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

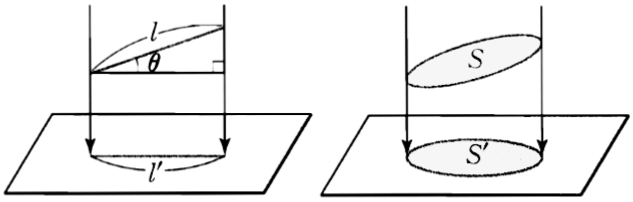


B25 | 정사영

개념1 정사영 : 수선의 발들의 모임

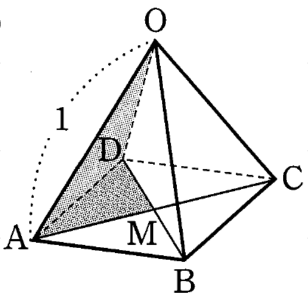
⇒ 길이는 $\cos\theta$배

⇒ 넓이도 $\cos\theta$배

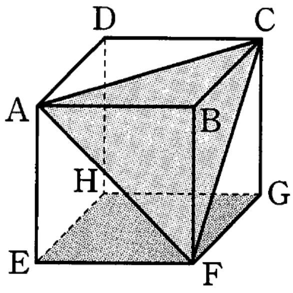


예제1 다음 도형에서 색칠한 두 면이 이루는 이면각의 크기를 구하여라.

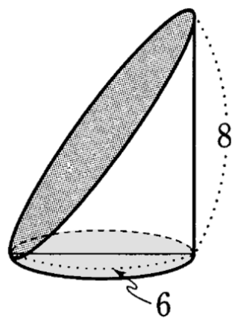
(1)



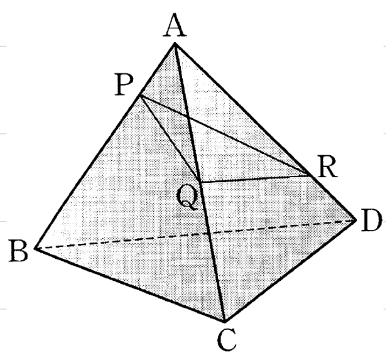
(2)



(3)



예제2 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 AB, AC, AD를 각각 1:3, 1:1, 3:1로 내분하는 점을 각각 P, Q, R이라 하자. 평면 PQR와 평면 BCD가 이루는 예각을 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



B25E1 | 그림자

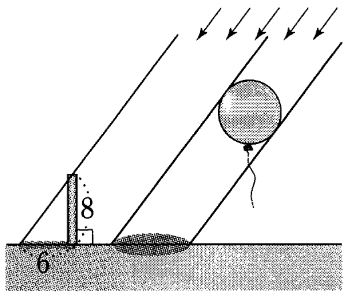
개념1 그림자는 정사영과 다르다. 그림자 문제를 풀 때는

① '그림자를 만드는 평면'을 찾는다. (태양광선과 수직인 평면?)

② 원상과 그림자의 길이비(넓이비)를 구한다.

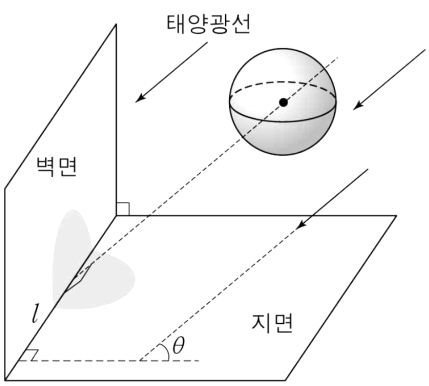
예제1 그림의 풍선은 반지름의 길이가 r인 구이다.

나타나는 그림자의 넓이를 구하여라.



예제2 그림의 구는 반지름의 길이가 r이다.

벽면과 지면에 나타나는 그림자의 넓이를 각각 구하여라.



[공간좌표]

B26 | 공간좌표의 설정

개념1 수선의 발, 대칭점 같은 것들

$\Rightarrow$ 정상작동하는 뇌가 있으면 할 수 있다.

예제1 점 $(2,4,3)$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) xy평면에 대한 수선의 발과 대칭점

(2) yz평면에 대한 수선의 발과 대칭점

(3) x축에 대한 수선의 발과 대칭점

B26E1 | 축과 수직인 도형의 방정식

개념1 축과 평행/수직인 도형의 방정식 : 잘 생각해본다.

예제1 다음 방정식이 나타내는 도형을 좌표공간에 도시하여라.

(1) $z=1$ (2) $x=3,\ y=5$ (3) $y=x,\ z=0$

(4) $x^2+y^2=4,\ z=0$ (5) $x^2+y^2=4$ (6) $y=x^2$

(7) $z=y^2,\ x=0$ (8) $x^2+y^2=z$ (9) $x^2+y^2=z^2$

※ 원통 위의 점 " $(\cos\alpha, \sin\alpha, z)$ "

※ 구 위의 점 " $(\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta, \sin\beta)$ "

B27 | 두 점 사이의 거리

탐구 평면좌표의 $(a, b) \sim (c, d)$ / 직육면체의 대각선

개념1 두 점 (x_1, y_1, z_1)과 (x_2, y_2, z_2) 사이의 거리는

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ 이다.

✓ 최단거리 문제 : 일단 대칭시키는 게 기본인데 공간이다 보니 어려운 경우도..

예제1 다음을 구하여라.

(1) $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, 3)$, xy평면 위의 P, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값?

(2) $A(2, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, xy평면 위 P, yz평면 위 Q, $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값?

(3) $A(5, 6, 2)$, 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$, $z=0$ 위의 P, $\overline{AP}$의 최소/최댓값?

(4) $A(1, 1, 1)$, $B(-4, 1, 1)$, x축 위의 P, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값?

(5) $A(0, 1, 2)$, $B(4, 2, 0)$, y축 위의 P, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값?

B28 | 내분점과 외분점

탐구 수직선, 좌표평면 위의 내분점과 외분점

개념1 두 점 (x_1, y_1, z_1)과 (x_2, y_2, z_2)의

① $m:n$ 내분점은 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}, \dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$이다.

② $m:n$ 외분점은 $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}, \dfrac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$이다.

개념2 무게중심은 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}, \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$이다.

예제1 두 점 $\mathrm{A}(1, -1, 3)$, $\mathrm{B}(4, 5, 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$의 $2:1$ 내분점과 외분점을 각각 P, Q라 하고, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점을 R이라 할 때, R의 좌표를 구하여라.

예제2 두 점 $\mathrm{A}(2, -5, 1)$, $\mathrm{B}(-4, 1, -5)$를 이은 선분이 zx평면과 만나는 점의 좌표를 구하여라.

예제3 두 점 $\mathrm{A}(-7, 4, 5)$, $\mathrm{B}(a, b, c)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$가 yz평면에 의해 $7:4$로 내분되며 x축에 의해 $2:1$로 외분된다. 이때, 점 B를 구하여라.

B29 | 구의 방정식

개념1 중심이 (a, b, c)이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$이다.

개념2 다음이 가질 수 있는 위치관계와 각각의 조건을 확인하자.

① 구와 직선 ② 구와 평면 ③ 두개의 구

예제1 점 $\mathrm{A}(3, 2, 1)$, 구 $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z=0$ 위의 점 P에 대하여,

(1) $\overline{\mathrm{AP}}$의 최소/최대 (2) $\angle\mathrm{OAP}$가 최대일 때 $\cos(\angle\mathrm{OAP})$

을 각각 구하여라. (O는 구의 중심이다.)

예제2 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 구 $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+z^2+8x-6y=k$가 내접, 외접할 때 각각의 k값은?

(2) 구 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=k^2$이 xy평면, x축에 접할 때 각각의 k값은?

(3) 구 $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=4$의 xy평면에 대한 정사영의 방정식은?

(4) 구 $x^2+y^2+z^2-8x-6y-2z-9=0$과 x축의 두 교점간의 거리는 얼마인가?

(5) 구 $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-4=0$과 xy평면의 교선의 길이는 얼마인가?

(6) 구 $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$와 만나는 8분 공간의 개수는 몇 개인가?