원포인트 개념주입 B2

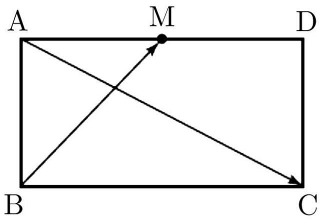
평면벡터

개념1

✔ 벡터의 기본 연산

001.

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$인 직사각형 ABCD의 변 AD의 중점을 M이라 할 때, $|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BM}|^2$의 값은?1)



① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

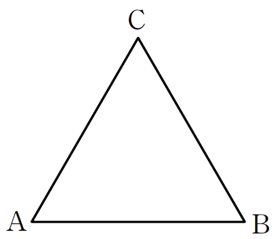
002.

등식 $3(\vec{a}-\vec{x})-2(\vec{b}-2\vec{a})=-2\vec{x}$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$에 대하여 $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}$일 때, 두 실수 m, n의 합 $m+n$의 값은?2)

① 1　② 3　③ 5
④ 7　⑤ 9

003.

그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC가 있다. 두 점 P, Q가 $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{QA}=\frac{2}{5}\overrightarrow{QC}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}|^2$의 값을 구하여라.3)

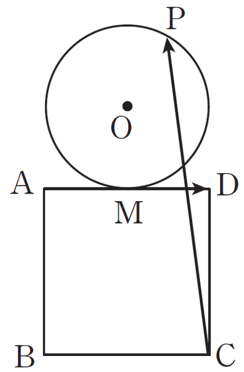


✏ 적당히 옮겨서 더하기.

개념2

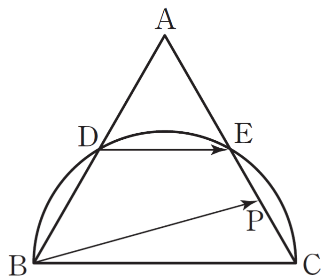
004.

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD와 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원이 변 AD의 중점 M에서 접하고 있다. 점 P가 원 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CP}|$의 최댓값을 $a+\sqrt{b}$라 하자. $a+b$의 값을 구하여라.[4] (단, a, b는 자연수이다.)



005.

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에서 변 BC를 지름으로 하는 반원의 호가 두 변 AB, AC와 각각 두 점 D, E에서 만난다. 선분 AC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{DE}|^2$의 최솟값은?[5]



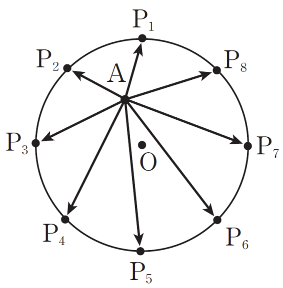
① 18 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 30

개념3

✏ 원의 중심, 무게중심 등을 기준으로 벡터들을 재구성 해보자.

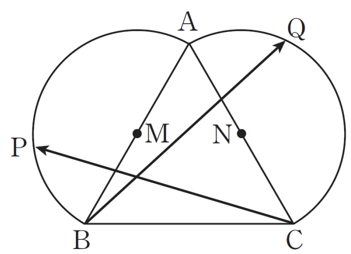
006.

그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원의 내부에 원의 중심 O로부터 2만큼 떨어진 점을 A라 하자. 원의 둘레를 8등분한 점을 $\mathrm{P}_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$이라 할 때, $\left|\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{\mathrm{AP}_k}\right|$의 값을 구하여라.6)



007.

그림은 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 두 변 AB, AC의 중점 M, N에 대하여 두 점 M, N을 각각 중심으로 하는 반지름의 길이가 1인 반원을 그린 것이다. 각각의 반원 위의 점 P, Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값을 $a+\sqrt{b}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.7) (단, a, b는 자연수이다.)



✏ 내분벡터 : 계수합 1로.

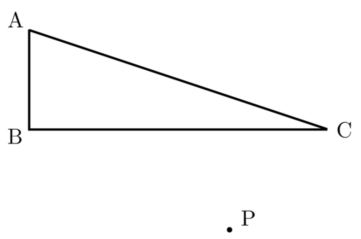
개념4

008.

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=3$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 P가

$3\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

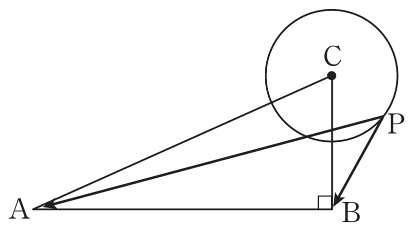
를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AP}|$의 값은?[8)]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

009.

그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=4$이고 $\angle B=90^\circ$인 삼각형 ABC와 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 원 위의 한 점을 P라 할 때, $|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}|$의 최솟값을 구하여라.[9)]



개념5

✔ 삼각형 ABC와 점 P가 어떤 세 실수 p, q, r에 대하여

$$p\overrightarrow{\mathrm{PA}}+q\overrightarrow{\mathrm{PB}}+r\overrightarrow{\mathrm{PC}}=0$$

를 만족시킬 때, 점 P의 위치를 결정할 수 있다.

010.

평면 위의 점 P와 삼각형 ABC에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

가 성립할 때, 점 P는 어떤 점인가?[10)]

① 변 AB의 중점
② 변 AB를 $1:2$로 내분하는 점
③ 변 AB를 $1:3$으로 내분하는 점
④ 변 AB를 $2:1$로 내분하는 점
⑤ 변 AB를 $3:1$로 내분하는 점

011.

삼각형 ABC를 포함하는 평면 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는?[11)]

(가) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$
(나) 삼각형 PBC의 넓이는 4이다.

① 12　② 14　③ 16
④ 18　⑤ 20

개념6

✔ 내분벡터, 평행조건을 이용한 벡터의 표현 : 세 점 O, A, B에 대하여,

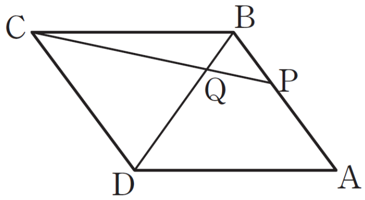
① O와 A를 연결한 직선은 $t\overrightarrow{OA}$

② A와 B를 연결한 직선은 $t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

로 나타난다.

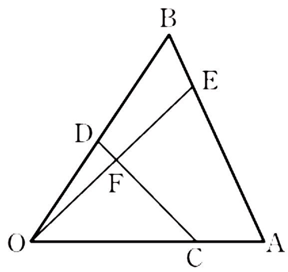
012.

그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 선분 AB를 $5:3$으로 내분하는 점을 P, 대각선 DB를 $m:3$으로 내분하는 점을 Q라 한다. 세 점 C, P, Q가 한 직선 위에 있을 때, 자연수 m의 값을 구하여라.12)



013.

그림과 같이 삼각형 OAB에서 변 OA를 $2:1$로 내분하는 점을 C, 변 OB의 중점을 D라 하자. 또, 변 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 E라 하고, 두 선분 CD, OE의 교점을 F라 하자. $\overline{OE}=30$일 때, 선분 OF의 길이를 구하여라.13)



✏ 방향벡터를 이용한 직선의 표현 :
점 P가 두 점 A, B를 지나는 직선 위의 점일 때, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$이다.
✏ 내분벡터를 이용한 직선의 표현 :
세 점 O, A, B에 대하여 $t\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$ $(t+s=1)$의 자취는 직선 AB가 된다.

개념7

014.

좌표평면 위의 점 $A(1,\ -4)$와 벡터 $\vec{u}=(-1,\ 2)$에 대하여

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{u}\ (t\text{는 실수})$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 직선과 원점 사이의 거리는?14) (단, O는 원점이다.)

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

015.

좌표평면 위에 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$, $\angle A=\frac{\pi}{6}$인 삼각형 ABC가 있다.

$$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$$
$$\left(\text{단, } \frac{1}{2}\le m+n\le 1,\ m\ge 0,\ n\ge 0\right)$$

를 만족시키는 점 P가 존재하는 영역의 넓이는?15)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

✔ 점 P의 점 O에 대한 위치벡터는 $\overrightarrow{OP}$이다.
⇒ 좌표평면 상의 원점 O에 대하여 점 P의 O에 대한 위치벡터 $\vec{p}$를 점 P로 나타낸다.
⇒ 합, 차, 실수배, 크기, 평행 등

개념8

016.

세 벡터 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 4)$, $\vec{c}=(4,\ -7)$에 대하여 벡터 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 m, n의 곱 mn의 값은?16)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

017.

두 벡터 $\vec{a}=(-6,\ k)$, $\vec{b}=(2,\ 4)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 평행할 때, 실수 k의 값은?17)

① -12 ② -10 ③ -8
④ -6 ⑤ -4

018.

두 벡터 $\vec{a}=(3,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ 1)$에 대하여 $|\vec{a}+t\vec{b}|$의 최솟값은?18) (단, t는 실수이다.)

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

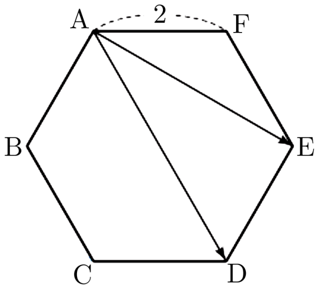
개념9

✏ 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각이 θ일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

✏ 두 벡터 (a_1, a_2), (b_1, b_2)에 대하여 $(a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2)=a_1b_1+a_2b_2$

019.

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF가 있다. 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$의 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$의 값을 구하여라.[19)]



020.

두 벡터 $\vec{a}=(k, -3)$, $\vec{b}=(5, 2k)$에 대하여 $|\vec{a}|=5$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은?[20)] (단, $k>0$)

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

021.

포물선 $y^2=4x$ 위의 두 점 P, Q와 원점 O에 대하여 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최솟값은?[21)]

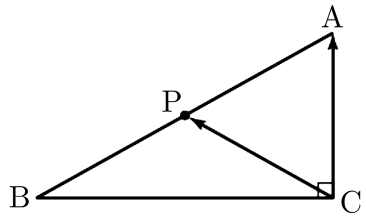
① -4　② -8　③ -12　④ -16　⑤ -20

✏ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\cos\theta$
$\Rightarrow$ (기준벡터의 크기) $\times$ (다른 벡터를 정사영 시킨 벡터의 크기)

개념10

022.

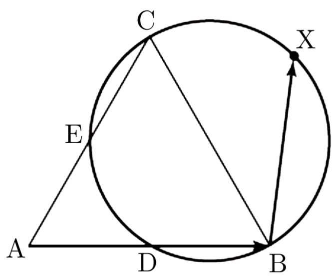
그림과 같이 $\angle B=\frac{\pi}{6}$, $\angle C=\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{AC}=2$인 삼각형 ABC에서 선분 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 최댓값은?22)



① 2　② $2\sqrt{2}$　③ 4
④ $4\sqrt{2}$　⑤ 8

023.

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 두 변 AB, AC의 중점을 각각 D, E라 하자. 네 점 B, C, D, E를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BX}$의 최댓값은?23)



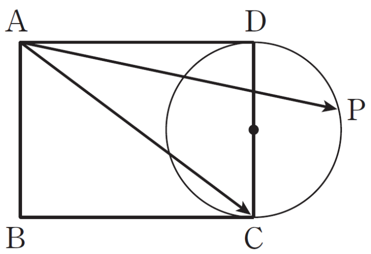
① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

✏ 원의 중심을 이용한 분해 : 그냥 해봐.
✏ 중점을 이용한 분해 :
두 점 A와 B의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2$

개념11

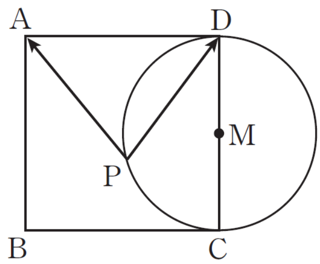
024.

그림은 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=8$인 직사각형 ABCD와 직사각형의 한 변 CD를 지름으로 하는 원을 나타낸 것이다. 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 내적 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값을 구하여라.24) (단, 직사각형과 원은 같은 평면 위에 있다.)



025.

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 변 CD의 중점 M을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원 위의 한 점 P에 대하여 내적 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.25) (단, a, b는 자연수이다.)



개념12

✔ 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 알면 $p\vec{a}+q\vec{b}$의 크기를 알 수 있다.

026.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$이고, 두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은?26)

① $-\frac{3}{10}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $-\frac{9}{10}$
④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

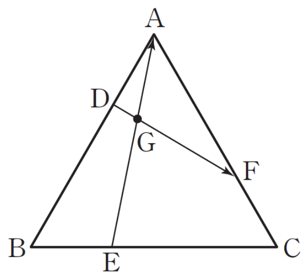
027.

$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=6$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?27)

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

028.

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에 대하여 세 선분 AB, BC, CA를 $1:2$로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. 두 선분 AE, DF가 만나는 점을 G라 할 때, 내적 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GF}$의 값은?28)



① $-\frac{24}{25}$ ② $-\frac{4}{5}$ ③ $-\frac{16}{25}$
④ $-\frac{12}{25}$ ⑤ $-\frac{8}{25}$

개념13

✏ $\vec{a}\cdot\vec{x}=k$를 만족하는 $\vec{x}$ 자취는 $\vec{a}$에 수직인 직선이다.

029.

좌표평면에서 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 1)$, $\vec{p}=(x,\ y)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{p}\cdot\vec{p}\le 1$
(나) $\vec{a}\cdot\vec{p}\ge 1$

점 $(x,\ y)$가 존재하는 영역의 넓이를 $m\pi+n$이라 할 때, 두 유리수 $m,\ n$에 대하여 $40(m-n)$의 값을 구하여라.29)

030.

좌표평면에서 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A_1, A_2, A_3에 대하여

$$|\overrightarrow{OX}|\le 1 \text{ 이고 } \overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA_k}\ge 0\ (k=1,\ 2,\ 3)$$

을 만족시키는 모든 점 X의 집합이 나타내는 도형을 D라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?30)

ㄱ. $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OA_3}$이면 D의 넓이는 $\frac{\pi}{2}$이다.
ㄴ. $\overrightarrow{OA_2}=-\overrightarrow{OA_1}$이고 $\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_1}$이면 D는 길이가 2인 선분이다.
ㄷ. $\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=0$인 경우에, D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이면 점 A_3은 D에 포함되어 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념14

✏ 자취와 최대최소 : 두 정점 A, B에 대하여

① $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=k$인 점 P의 자취 : AB의 중점을 중심으로 하는 원

② $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=k$인 점 P의 자취 : AB의 중점을 중심으로 하는 원

③ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=k$인 점 P의 자취 : $\overrightarrow{AB}$와 수직인 직선

031.

좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(8, 6)에 대하여 점 P가

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$$

을 만족시킨다. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}$의 값은?[31] (단, O는 원점이다.)

① $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$ ② $\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$ ③ $\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$

④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $\dfrac{18\sqrt{10}}{5}$

032.

좌표평면 위에 $\overline{AB}=5$인 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 O_1, O_2라 하자. 원 O_1 위의 점 C와 원 O_2 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle CAB)=\dfrac{3}{5}$

(나) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=30$이고 $|\overrightarrow{CD}|<9$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$이다. $a+b$의 값을 구하여라.[32] (단, a, b는 유리수이다.)

개념15

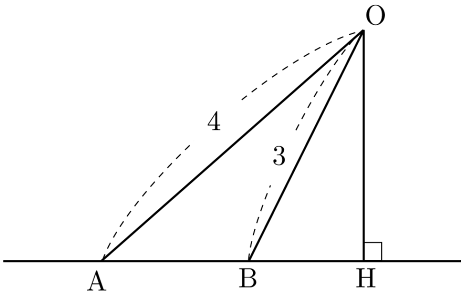
✔ 대충 좌표 잡을 수 있으면 일단 잡아보자.

033.

그림과 같이 삼각형 OAB에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=4,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3,\ \cos(\angle \mathrm{AOB})=\frac{11}{12}$$

이다. 점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$의 값은?33)



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

034.

삼각형 ABC와 같은 평면 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=2,\ \overline{\mathrm{AC}}=3,\ \angle \mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$

(나) $|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=1$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하여라.34)

1) ②

2) ③

3) 12

4) 11

5) ④

6) 16

7) 5

8) ③

9) 9

10) ⑤

11) ③

12) 8

13) 16

14) ②

15) ④

16) ①

17) ①

18) ②

19) 12

20) ①

21) ①

22) ③

23) ②

24) 112

25) 4

26) ②

27) ①

28) ④

29) 30

30) ⑤

31) ③

32) 31

33) ④

34) 12