[벡터의 연산]

B10 | 벡터의 뜻과 기본연산

탐구 합력 : "3N"+"4N"

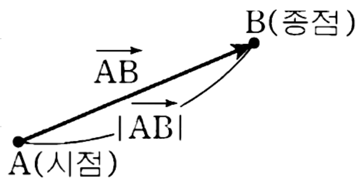
개념1 벡터 : 크기와 방향을 가진 양 ($\leftrightarrow$ 스칼라)

① 화살표를 이용하여 나타내며, 길이로 크기를 나타낸다.

② 점 A에서 점 B로 향하는 벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$로 나타내고

이때, 점 A를 시점, 점 B를 종점이라 한다.

벡터를 문자로 나타낼 때, $\vec{a}$와 같이 나타낸다.



③ 벡터 $\vec{a}$의 크기를 $|\vec{a}|$로 나타낸다.

④ $\vec{0}$: 크기가 0인 벡터 (방향은 임의)

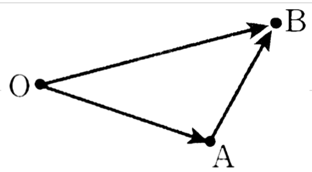
⑤ 시점이 달라도 크기와 방향이 같으면 같은 벡터이다.

※ 두 점 A$(0,\ 2)$, B$(4,\ 5)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$

개념2 벡터의 기본연산

① 실수배 : $-\vec{a}$,　　$k\vec{a}$

② 합차 : $\vec{a}+\vec{b}$,　　$\vec{a}-\vec{b}$



※ $|k\vec{a}|=|k|\times|\vec{a}|$

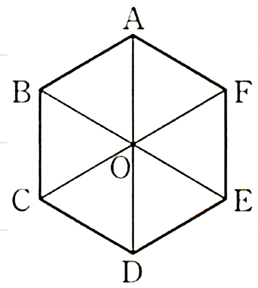
※ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$,　　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

예제1 그림과 정육각형에서 다음을 확인하여라.

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$

(2) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$

(3) $|\overrightarrow{AB}|=1$이면 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}|=1$



B11 | 벡터 연산의 성질

개념1 벡터 연산에 대한 다음 성질들을 확인하여라.

① 실수배 결합 ($k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$)

② 덧셈의 교환, 결합

③ 실수배의 분배 ($k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$, $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$)

④ 덧셈의 항등원과 역원 (이항) ($\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$이면 $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$)

B11E1 | 벡터의 단위화

개념1 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 1인 벡터이다.

예제1 원 $x^2+(y-2)^2=1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 X가

$\overrightarrow{OX}=\frac{1}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$를 만족시킬 때, 점 X의 자취를 구하여라.

B11E2 | 벡터의 분해

예제1 $y=-x+4$ 위의 점 P와 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$에 대하여

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$의 최솟값을 구하여라.

예제2 정오각형 ABCDE의 외접원 반지름의 길이가 1이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$의 값을 구하여라.

예제3 중심이 O인 원 위를 움직이는 점 P와 원 밖의 두 정점 A, B에 대하여

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$과 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$가 각각 최대일 때 점 P의 위치를 설명하여라.

B11E3 | 벡터의 평행

개념1 $\vec{0}$이 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하다.

$\Leftrightarrow$ 적당한 실수 k에 대하여 $\vec{a}=k\vec{b}$가 성립한다.

※ 나중에 쓸 일이 많으니 잘 기억해두자.

B12 | 위치벡터와 성분

개념1 원점이 O인 좌표평면 위의 점 A에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 점 A의 위치벡터라 한다.

※ 시점을 통일하면 하나의 벡터는 좌표평면상의 하나의 점에 대응된다.

B13 | 내분벡터와 외분벡터

탐구 $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$, $\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$

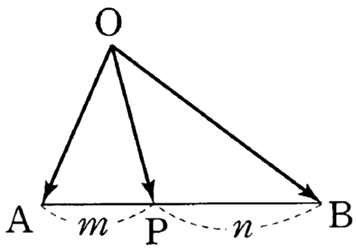
개념1 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라 하고 선분 AB를 $m:n$으로

내분하는 점을 P라 하면,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}$$

외분하는 점을 Q라 하면,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{-n}{m-n}\vec{a}+\frac{m}{m-n}\vec{b}$$

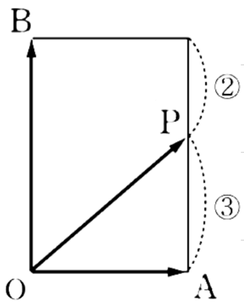


※ 편의상 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 $m:n$ 내분벡터

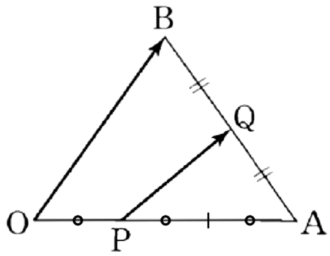
$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{-n}{m-n}\vec{a}+\frac{m}{m-n}\vec{b}$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 $m:n$ 외분벡터라 하자.

예제1 다음의 도형에서 각각 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$을 $p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$꼴로 나타내어라.

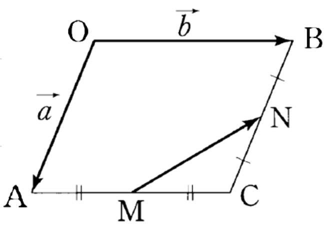
(1)



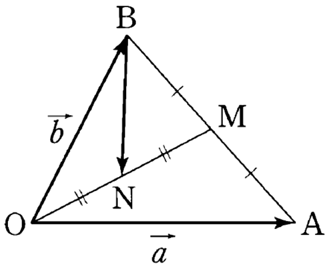
(2)



(3)



(4)



개념2 네 점 O, A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 할 때,

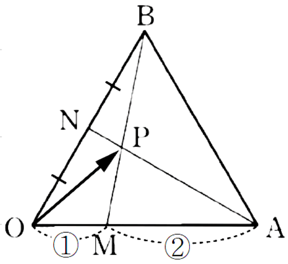
삼각형의 $\triangle ABC$의 무게중심을 G라 하면 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$이다.

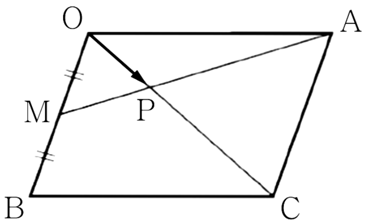
B13E1 | 벡터의 일차결합

개념1 평면 위에 놓인 평행하지 않은 (서로 독립인) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

평면 위의 모든 벡터는 적당한 실수 p, q에 대하여 $p\vec{a}+q\vec{b}$로 나타낼 수 있다.

예제1 다음의 도형에서 $\overrightarrow{OP}$를 $p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$꼴로 나타내어라.

(1) 

(2) 

B13E2 | 벡터의 자취

예제1 평면 위의 세 정점 O, A, B에 대하여 같은 평면 위의 점 X가

$$\overrightarrow{OX}=t\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$$

이다. t, s가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 X의 자취에 대하여 설명하여라.

(1) 조건X (2) $0\le t\le 1$ (3) $0\le t\le 1$, $0\le s\le 2$

(4) $t+s=1$ (5) $t+s=2$ (6) $t+s=0$

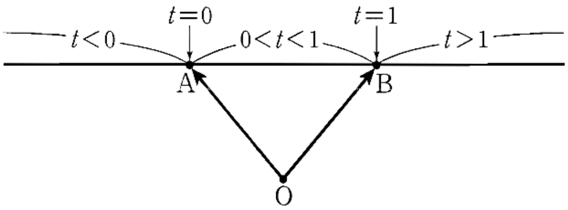
(7) $t=1$ (8) $s=2$ (9) $t+\frac{1}{2}s=1$

(10) $2t+3s=1$ (11) $t-s=1$ (12) $t+s=1$, $t\ge 0$, $s\ge 0$

(13) $0\le t+s\le 1$, $t\ge 0$, $s\ge 0$ (14) $0\le t+2s\le 2$, $t\ge 1$, $s\ge 0$

개념1 $\overrightarrow{OX}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$일 때, 점 X의 자취 :

두 점 A, B를 지나는 직선



B13E3 | 가무게중심 정리

개념1 $\triangle ABC$에서 $p\overrightarrow{PA}+q\overrightarrow{PB}+r\overrightarrow{PC}=\vec{0}$일 때, P의 위치 찾기.

① $\dfrac{p}{p+q}\overrightarrow{PA}+\dfrac{q}{p+q}\overrightarrow{PB}=-\dfrac{r}{p+q}\overrightarrow{PC}$에서,

② 야매로 무게추 올려놓고 풀기

예제1 평면 위의 점 P와 $\triangle ABC$에 대하여 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$을 만족시킬 때,

(1) 두 직선 PA와 BC의 교점 M은 선분 BC를 몇 대 몇으로 내분하고 있는가?

(2) P는 선분 AM을 몇 대 몇으로 내분하고 있는가?

예제2 $\triangle ABC$에서 변 BC를 $3:2$로 내분하는 점을 D라 하고, 선분 AD를

$5:6$으로 내분하는 점을 P라 할 때, $\overrightarrow{PA}$를 $\overrightarrow{PB}$와 $\overrightarrow{PC}$로 나타내어라.

개념2 $\triangle \mathrm{ABC}$에서 $p\overrightarrow{\mathrm{PA}}+q\overrightarrow{\mathrm{PB}}+r\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$일 때, $\triangle \mathrm{PAB} : \triangle \mathrm{PBC} : \triangle \mathrm{PCA}=r : p : q$

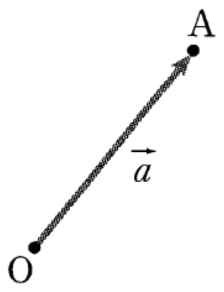
예제3 넓이가 14인 $\triangle \mathrm{ABC}$의 내부의 한 점 P에 대하여

$3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$일 때, $\triangle \mathrm{PAB}$의 넓이를 구하여라.

※ $\left\{\begin{array}{l}\text{메넬라우스의 정리} \\ \text{체바의 정리} \\ \text{제르곤의 정리}\end{array}\right\}$ 를 증명해보자.

[평면벡터의 성분과 내적]

B14 | 벡터의 성분



개념1 원점이 O인 좌표평면 위의 점 A에 대하여

$\overrightarrow{OA}$를 점 O에 대한 점 A의 위치벡터라 한다.

개념2 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때,

① $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

② $k\vec{a}=k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$

③ $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1,\ a_2)\pm(b_1,\ b_2)=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2)$

④ $\vec{a}\,/\!\!/\,\vec{b} \Rightarrow \dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1} \Rightarrow \begin{cases} ka_1=b_1 \\ ka_2=b_2 \end{cases} \Rightarrow k(a_1,\ a_2)=(b_1,\ b_2) \Rightarrow k\vec{a}=\vec{b}$

⑤ $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{b_2}{b_1}=-1 \Rightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$

예제1 다음을 식으로 나타내어라.

(1) $\vec{a}=(-1,\ 0)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$에 대하여 $\vec{c}=(-2,\ 3)$가 $k\vec{a}+l\vec{b}$이다.

(2) 네 점 $A(-2,\ 5)$, $B(1,\ 3)$, $C(2,\ 6)$, $D(x,\ y)$에 대하여 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이다.

(3) $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(-1,3)$에 대하여 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$일 때 $\vec{c}$의 크기가 최소이다.

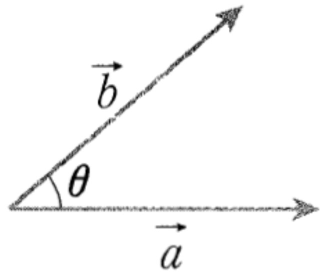
(4) $\vec{a}=(-1,-2)$, $\vec{b}=(2,-2)$, $\vec{c}=(2,-4)$일 때, 두 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$와 $\vec{c}-\vec{a}$가 평행하다.

(5) 세 점 $A(-5,\ 1)$, $B(-1,\ 8)$, $C(3,\ 3)$에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=6$이다.

B15 | 내적의 정의

개념1 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적 : $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

✓ 벡터의 내적은 각에 대한 정보를 담고 있다.



예제1 다음을 만족시킬 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각을 구하여라.

(1) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

(2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\sqrt{2}$

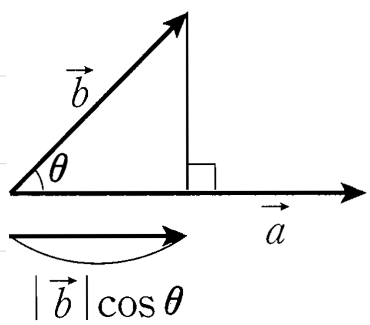
(3) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(4) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

B15E1 | 내적의 기하적 의미

개념1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\cos\theta$

($\vec{a}$의 크기)$\times$($\vec{b}$의 $\vec{a}$ 방향으로의 성분)



탐구 기하적 의미에 의해 다음을 생각해보자.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{x_i}=0$의 최대최소?

(2) $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$의 자취?

(3) $\vec{a}\cdot\vec{x}=k$의 자취?

B15E2 | 벡터의 수직

개념1 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

예제1 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}-x\vec{b}$와 $2\vec{a}+\vec{b}$가

서로 수직이 되게 하는 x의 값을 구하여라.

예제2 점 A$(6,\ 8)$에 대하여 점 P가 다음을 만족시킬 때, P의 자취를 구하여라.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

B16 | 내적의 성질

개념1 벡터 내적에 대한 다음 성질들을 확인하여라.

① (벡터)·(벡터) = (스칼라) ⇒ 결합 ㄴㄴ

② 교환 가능 : $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

③ 실수배의 교환 : $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

④ 분배 가능 : $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

⑤ $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

⑥ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

⑦ $(a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2)=a_1b_1+a_2b_2$

B16E1 | 두 벡터가 이루는 각

개념1 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$를 알 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 안다.

$\Leftrightarrow$ $\cos\theta$를 안다. $\Leftrightarrow$ θ를 안다.

※ $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각을 구하고 싶으면, $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 이용하여 접근한다.

예제1 다음을 만족시킬 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각을 구하여라.

(1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$

(2) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-12$

(3) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(4) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$

예제2 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{A}(-1, 3)$, $\mathrm{B}(1, 2)$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각

(2) $\mathrm{A}(4, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 2)$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각

B16E2 | 두 벡터의 일차결합과 내적

개념1 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 알면

① $p\vec{a}+q\vec{b}$의 크기를 알 수 있다.

② 두 벡터 $p\vec{a}+q\vec{b}$와 $r\vec{a}+s\vec{b}$가 이루는 각을 알 수 있다.

예제1 다음을 구하여라.

(1) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$일 때, $|\vec{a}-\vec{b}|$의 값

(2) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$일 때, $|\vec{a}+2\vec{b}|$의 값

(3) $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{5}$일 때, 두 벡터가 이루는 각

(4) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$이고, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=7$일 때, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각

B16E3 | 내적과 분해

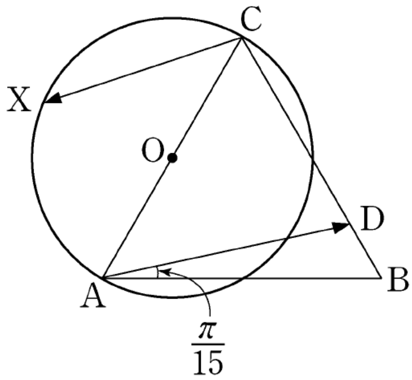
개념1 자주 쓰이는 분해

① 수직성분으로 분해 ⇒ 좌표화

② 두 점의 중심을 경유하는 분해 ⇒ $\underline{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2}$

③ 구(정다각형)의 중심을 경유하는 분해

예제1 정삼각형 ABC와 지름이 AC인 원 O가 있다. 점 D는 BC 위의 점이고 $\angle\mathrm{DAB}=\frac{\pi}{15}$이다. 원 O 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 값이 최소인 점 X의 위치를 구하여라.



예제2 좌표평면 위의 두 점 A$(4,\ 0)$, B$(0,\ 6)$와 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 값이 최대인 점 P의 위치를 구하여라.

B17 | 직선의 벡터방정식

※ 직선 : 기울기 m과 지나는 한 점 $(x_1,\ y_1)$에 의해 결정된다. (⇔ 두 점)

$\Rightarrow y=m(x-x_1)+y_1 \quad \left(\Leftrightarrow \dfrac{y-y_1}{x-x_1}=m \right)$

개념1 방향벡터 : 직선과 평행한 방향을 가지는 벡터

eg) 직선 $y=2x+1$의 방향벡터는 $(1,\ 2)$이다.

※ 방향벡터는 크기를 따지지 않는다. $(1,\ 2)$, $(2,\ 4)$, $(-1,\ -2)$ 등은 방향벡터로서 서로 같다. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$와 같이 크기가 1인 방향벡터를 단위방향벡터라 한다.

$\Rightarrow$ 임의의 방향벡터는 $(1,\ a)$와 같이 둘 수 있다. (x축과 수직인 방향만 아니면)

개념2 점 A를 지나고 방향벡터가 $\vec{d}$인 직선 위의 점 P는 어떤 실수 t에 대하여

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ ($\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$)

로 나타낼 수 있다.

✓ $P(x,\ y)$, $A(x_1,\ y_1)$, $\vec{d}=(a,\ b)$라 하면, 위 식은 $(x,\ y)=(x_1,\ y_1)+t(a,\ b)$이므로

점 P의 자취는 $\begin{cases} x=at+x_1 \\ y=bt+y_1 \end{cases}$과 같이 매개변수 t를 이용하여 나타낼 수 있다.

✓ 위 식에서 t를 소거하면 직선의 방정식을 $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$로 나타낼 수 있다.

⇒ 위 식을 살짝 더 정리해 $y=\dfrac{b}{a}(x-x_1)+y_1$을 얻을 수 있다.

개념3 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선은 방향벡터가 $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$이므로

$\vec{p}=(x_1,\ y_1)+t(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$

로 나타낼 수 있다.

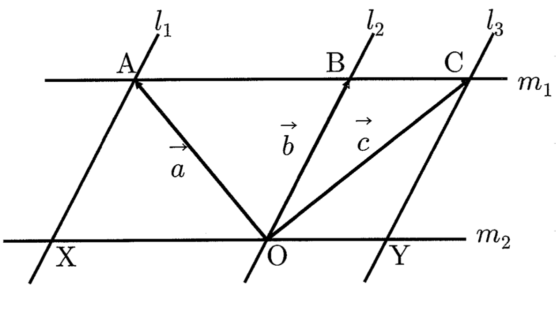
⇒ 정리해서 $(1-t)(x_1,\ y_1)+t(x_2,\ y_2)$로 나타낼 수 있다. (분점 벡터로 해석)

예제1 그림에서 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$, $m_1 /\!/ m_2$이고

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때,

$\overrightarrow{AP}=(\vec{c}-\vec{b}-\vec{a})t$ (단, t는 실수)

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은?



예제2 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC에 대하여 점 P가

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-3t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\left(0\le t\le\frac{1}{3}\right)$$

를 만족시킬 때, 점 P가 그리는 도형의 길이를 구하여라.

※ 분점벡터로의 해석이 헷갈리면 한 문자로 정리해서 지나는 점과

방향벡터를 찾도록 하자. 정 헷갈리면 대충 t에 적당한 두 값을 넣어서..

B17E1 | 법선벡터를 이용한 직선의 표현

개념1 법선벡터 : 직선과 수직인 방향을 가지는 벡터

$\Rightarrow$ 방향벡터와 마찬가지로 크기를 따지지 않는다.

개념2 점 A를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}$인 직선 위의 점 P의 자취는

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0 \quad (\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}\ )$$

로 나타낼 수 있다.

✓ $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\vec{n}=(a,\ b)$라 하면, 위 식은 $(a,\ b)\cdot\{(x,\ y)-(x_1,\ y_1)\}$,

정리하면 $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$을 얻을 수 있다.

$\Rightarrow$ 위 식을 살짝 더 정리하여 $y=-\dfrac{a}{b}(x-x_1)+y_1$을 얻을 수 있다.

B17E2 | 두 직선이 이루는 각

※ 두 직선이 이루는 각은 두 직선의 방향벡터(기울기)만의 문제이다.

예제1 두 직선 $x+2=\frac{y-6}{3}$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y+7}{-6}$이 이루는 각의 크기를 구하여라.

예제2 두 직선 $\frac{x+7}{m}=5-y$, $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{2}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 실수 m의 값을 구하여라.

예제3 두 직선 $\frac{x-5}{k-2}=1-y$, $\frac{x+2}{3}=\frac{y+4}{k}$가 서로 수직이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

B18 | 원의 벡터방정식

개념1 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 점 P의 자취는

$$|\vec{p}-\vec{a}|=r \quad (\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}\ )$$

로 나타낼 수 있다.

※ 절댓값을 이용하지 않으려면 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2$로 나타낼 수 있다.

개념2 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하는 원 위의 점 P의 자취는

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \quad (\ \overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \ \overrightarrow{OP}=\vec{p}\ )$$

로 나타낼 수 있다.

※ $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=k^2$의 꼴도 원의 방정식을 나타낸다.

: 중심은 A와 B의 중점이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{\dfrac{\overline{AB}^2}{4}+k^2}$ 이다.

⇒ 중점을 이용한 분해를 통해서 생각해보자.

예제1 원점이 O인 좌표평면 위의 점 P와 두 점 A(2, 1), B(−2, 1)에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$을 만족시킬 때, $\overline{OP}$의 최솟값을 구하여라.

예제2 좌표평면 위의 점 P와 세 점 A(1, 2), B(4, 1), C(0, −1)에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=9$를 만족시킬 때, 점 P가 나타내는 도형이 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구하여라.

예제3 원 $x^2+y^2=10$과 직선 $x=y-2$의 두 교점을 A, B라 하자. 좌표평면 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=8$을 만족시킬 때, 점 P의 자취의 길이를 구하여라.