

원포인트 개념주입 B2
이차곡선



개념1

⇒ 초점이 $(p, 0)$, 준선이 $x = -p$ 인 포물선의 방정식 : $y^2 = 4px$

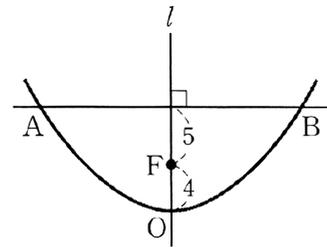
001.

두 포물선 $(x-1)^2 = 4y$, $(y+2)^2 = -8x$ 의 초점을 각각 F_1, F_2 라고 할 때, $\overline{F_1F_2}^2$ 의 값은?1)

- ① 8 ② 13 ③ 18
- ④ 25 ⑤ 32

002.

그림과 같은 포물선에서 꼭짓점은 O, 초점은 F, 축은 l이다. 포물선 위의 두 점 A, B에 대하여 직선 AB가 축에 수직이고 점 F에서 점 O와 직선 AB까지의 거리가 각각 4, 5일 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.2)





개념2

⇒ 두 초점이 $(c, 0)$ 과 $(-c, 0)$, 거리의 합이 $2a$ 인 타원 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b^2 = a^2 - c^2$)

003.

중심이 $(0, 0)$ 이고, x 축 위에 있는 장축의 길이가 단축의 길이의 두 배인 타원이 두 점 $(2, 1)$, $(k, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 를 지난다. 이때, 양수 k 의 값을 구하여라.³⁾

004.

타원 $\frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 의 두 초점의 좌표가 $(6, b)$, $(-2, b)$ 일 때, ab 의 값은?⁴⁾ (단, a 는 양수이다.)

- ① 40 ② 42 ③ 44
- ④ 46 ⑤ 48



개념3

⇒ 두 초점이 $(c, 0)$ 과 $(-c, 0)$, 거리의 차가 $2a$ 인 쌍곡선 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($c^2 = a^2 + b^2$)

005.

다음 조건을 만족시키는 쌍곡선의 주축의 길이는?⁵⁾

- (가) 두 초점의 좌표는 $(5, 0), (-5, 0)$ 이다.
- (나) 두 점근선이 서로 수직이다.

- ① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
- ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

006.

점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{4}{3}x$ 이고 두 초점이 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ ($c > 0$)인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{PF'} = 30, 16 \leq \overline{PF} \leq 20$ 이다.
- (나) x 좌표가 양수인 꼭짓점 A에 대하여 선분 AF의 길이는 자연수이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하여라.⁶⁾

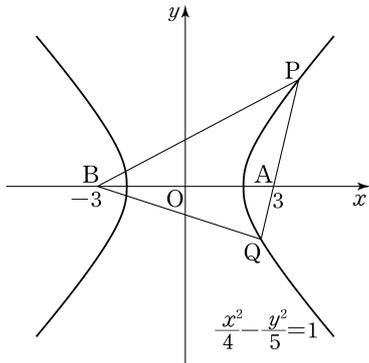


개념4

✓ 이차곡선에서 초점과 연결되어 있으면 정의부터 생각하자.

007.

그림과 같이 점 $A(3, 0)$ 을 지나는 직선이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 과 두 점 P, Q 에서 만나고 $\overline{PQ} = 6$ 이다. 점 $B(-3, 0)$ 일 때 $\overline{BP} + \overline{BQ}$ 의 값은? (단, 직선의 기울기는 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 보다 크다.)



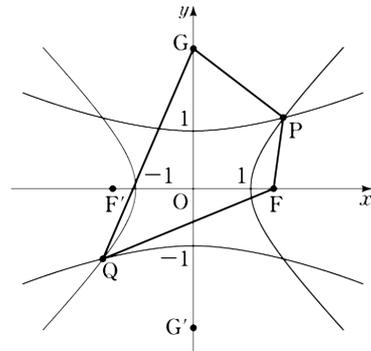
- ① 11 ② 12 ③ 13
- ④ 14 ⑤ 15

008.

그림과 같이 초점이 각각 F, F' 과 G, G' 이고 주축의 길이가 2, 중심이 원점 O 인 두 쌍곡선이 제1사분면에서 만나는 점을 P , 제3사분면에서 만나는 점을 Q 라 하자.

$$\overline{PG} \times \overline{QG} = 8, \overline{PF} \times \overline{QF} = 4$$

일 때, 사각형 $PGQF$ 의 둘레의 길이는? (단, 점 F 의 x 좌표와 점 G 의 y 좌표는 양수이다.)



- ① $6 + 2\sqrt{2}$ ② $6 + 2\sqrt{3}$ ③ 10
- ④ $6 + 2\sqrt{5}$ ⑤ $6 + 2\sqrt{6}$

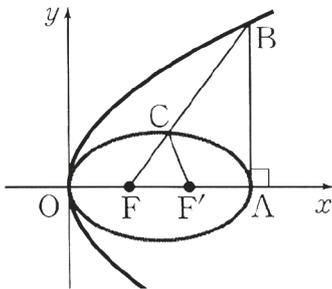


개념5

✓ 포물선 위의 점이 초점과 연결되어 있으면 준선에다 수선의 발

009.

아래 그림에서 두 점 F, F' 은 타원의 두 초점이고, 점 F 는 포물선의 초점이다. 타원과 x 축의 교점 중에서 원점이 아닌 점을 A , 점 A 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 제1사분면에서 포물선과 만나는 점을 B , 선분 BF 와 타원의 교점을 C 라고 하자. $\overline{OF}=3$, $\overline{BF}=12$ 일 때, 선분 CF' 의 길이를 구하여라.⁹⁾ (단, O 는 원점)

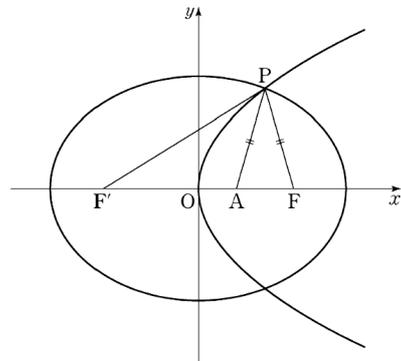


010.

좌표평면에서 초점이 $A(a, 0)(a > 0)$ 이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $F(c, 0), F'(-c, 0)(c > a)$ 인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P 라 하자.

$$\overline{AF}=2, \overline{PA}=\overline{PF}, \overline{FF'}=\overline{PF'}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$ 이다. p^2+q^2 의 값을 구하여라.¹⁰⁾ (단, p, q 는 유리수이다.)



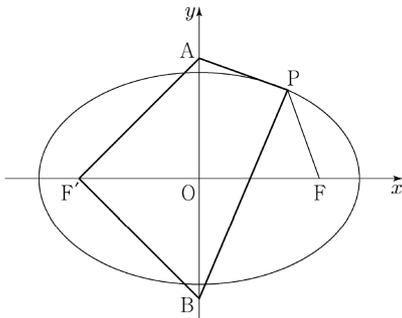


개념6

✓ 이차곡선의 정의와 대칭성.
어디가 같을지에 대한 감각.

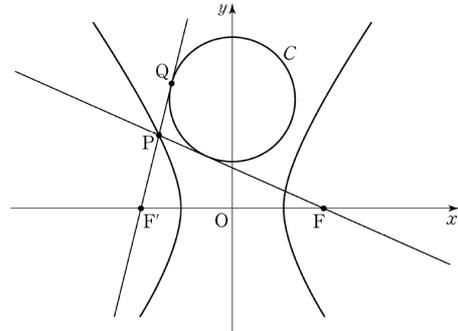
011.

좌표평면에서 두 점 $A(0, 3)$, $B(0, -3)$ 에 대하여,
두 초점이 F, F' 인 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 위의 점 P 가
 $\overline{AP} = \overline{PF}$ 를 만족시킨다. 사각형 $AF'BP$ 의 둘레의
길이가 $a + b\sqrt{2}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.¹¹⁾
(단, $\overline{PF} < \overline{PF'}$ 이고 a, b 는 자연수이다.)



012.

그림과 같이 두 초점이 F, F' 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{17} = 1$
위의 점 P 에 대하여 직선 FP 과 직선 $F'P$ 에 동시에
접하고 중심이 y 축 위에 있는 원 C 가 있다. 직선
 $F'P$ 과 원 C 의 접점 Q 에 대하여 $\overline{F'Q} = 5\sqrt{2}$ 일 때,
 $\overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2$ 의 값을 구하여라.¹²⁾ (단, $\overline{F'P} < \overline{FP}$)





개념7

✓ 점 $P(x, y)$ 의 자취의 방정식은 x, y 가 만족하는 관계식이다.
⇒ 매개변수로 쓰는 방법

013.

점 $F(4, 0)$ 과 직선 $x=1$ 에 이르는 거리의 비가 2:1인 점이 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.¹³⁾

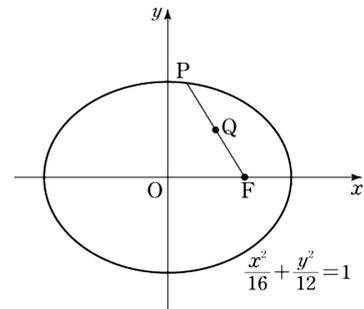
- ① $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = -1$ ② $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$
- ③ $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ ④ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$
- ⑤ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$

014.

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인

점을 F 라 하자. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의

점 P 가 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위를 움직일 때, 선분 PF 의 중점 Q 가 나타내는 곡선을 C 라 하자. 곡선 C 에 내접하는 마름모 중 넓이가 가장 큰 것의 넓이를 S 라 할 때, S^2 의 값을 구하여라.¹⁴⁾





개념8

✓ 이차곡선의 정의를 만족하는지 살펴본다.

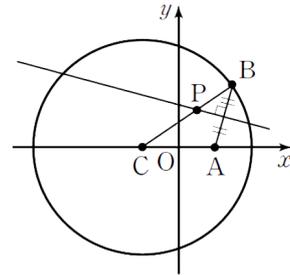
015.

점 A(2, 0)을 지나고 원 $x^2 + y^2 = 100$ 에 내접하는 원의 중심 P가 나타내는 도형의 방정식은?¹⁵⁾

- ① $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{21} = 1$ ② $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$
- ③ $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$ ④ $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$
- ⑤ $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

016.

다음 그림과 같이 원 $(x+2)^2 + y^2 = 36$ 의 중심을 C라 하고, 원의 내부의 한 점 A(2, 0)을 지나는 직선이 원과 만나는 한 점을 B라 하자. 선분 AB의 수직이등분선과 선분 BC가 만나는 점을 P라 할 때, 점 P가 나타내는 도형의 방정식은?¹⁶⁾



- ① $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ ② $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$
- ③ $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{8} = 1$ ④ $y^2 = 4(x-1)$
- ⑤ $x^2 = 4(y-1)$



개념10

- ⇒ 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서 접하는 직선 : $y_1y = 2px + 2px_1$
- ⇒ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서 접하는 직선 : $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$
- ⇒ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서 접하는 직선 : $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

017.

자연수 n 에 대하여 직선 $y = nx + (n + 1)$ 이 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$ 이고 초점이 $(a_n, 0)$ 인

포물선에 접할 때, $\sum_{n=1}^5 a_n$ 의 값은?¹⁷⁾

- ① 70
- ② 72
- ③ 74
- ④ 76
- ⑤ 78

018.

두 양수 k, p 에 대하여 점 $A(-k, 0)$ 에서 포물선 $y^2 = 4px$ 에 그은 두 접선이 y 축과 만나는 두 점을 각각 F, F' , 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 할 때, $\angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ 이다. 두 점 F, F' 을 초점으로 하고 두 점 P, Q 를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3} + 12$ 일 때, $k + p$ 의 값은?¹⁸⁾

- ① 8
- ② 10
- ③ 12
- ④ 14
- ⑤ 16



개념11

- ⇒ 포물선 $y^2 = 4px$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx + \frac{p}{m}$
- ⇒ 포물선 $x^2 = 4py$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx - m^2p$
- ⇒ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$
- ⇒ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

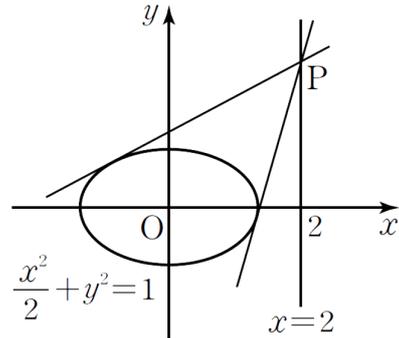
019.

좌표평면에서 점 A(0, 4)와 타원 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 위의 점 P에 대하여 두 점 A와 P를 지나는 직선이 원 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ 과 만나는 두 점 중에서 A가 아닌 점을 Q라 하자. 점 P가 타원 위의 모든 점을 지날 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이는?19)

- ① $\frac{\pi}{6}$
- ② $\frac{\pi}{4}$
- ③ $\frac{\pi}{3}$
- ④ $\frac{2}{3}\pi$
- ⑤ $\frac{3}{4}\pi$

020.

그림과 같이 직선 $x=2$ 위의 점 P에서 타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기의 차가 4이다. 점 P의 y좌표를 k 라 할 때, k^2 의 값은?20)



- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10



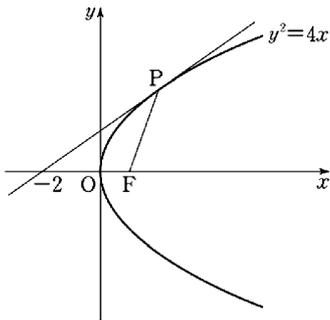
개념12

✓ 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 A에서 그은 접선이 x 축과 만나는 점을 P라 하면

- ① P의 x 좌표 ② $\overline{PF} = \overline{AF}$
- ③ 마름모 ④ 대각선의 교점

021.

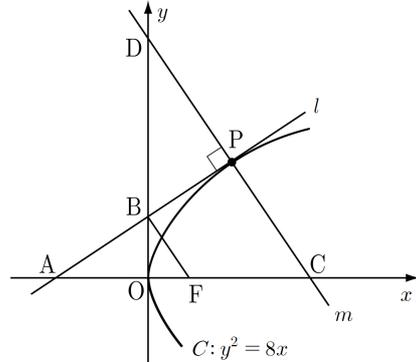
그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 한 점 P에서의 접선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -2 이다. $\cos(\angle PFO)$ 의 값은?21)
(단, O는 원점이다.)



- ① $-\frac{5}{12}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$
- ④ $-\frac{1}{6}$ ⑤ $-\frac{1}{12}$

022.

초점이 F인 포물선 $C: y^2 = 8x$ 위의 한 점 P에서의 접선을 l , P를 지나고 l 과 수직인 직선을 m 이라 하자. 직선 l 과 x 축, y 축의 교점을 각각 A, B라 하고, 직선 m 과 x 축, y 축의 교점을 각각 C, D라 하자. 세 삼각형 BFA, PCA, PBD의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3 라 할 때, $S_2 + S_3 = 6S_1$ 이다. 점 P의 x 좌표의 값을 구하여라.22)





개념 13

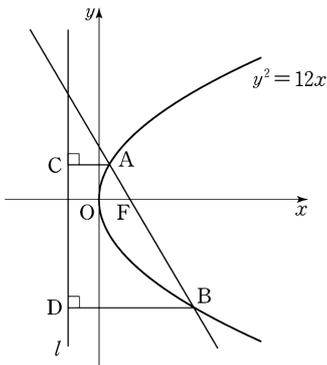
✓ 포물선의 초점을 지나는 직선

① $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$

② $\frac{a-2p}{a} = \cos\theta, \quad \frac{2p-b}{b} = \cos\theta$

023.

그림과 같이 포물선 $y^2 = 12x$ 의 초점 F를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC} = 4$ 일 때, 선분 BD의 길이는?23)



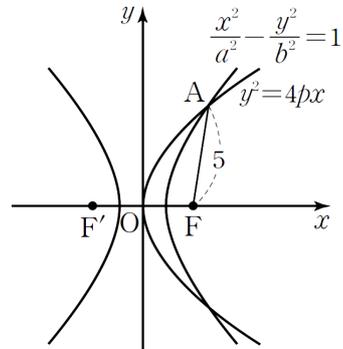
- ① 12 ② $\frac{25}{2}$ ③ 13
- ④ $\frac{27}{2}$ ⑤ 14

024.

그림과 같이 점 F(p, 0)을 초점으로 하는 포물선 $y^2 = 4px$ 와 두 점 F(p, 0), F'(-p, 0)을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > 0, b > 0)이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자.

$\overline{AF} = 5, \cos(\angle AFF') = -\frac{1}{5}$

일 때, a^2b^2 의 값을 구하여라.24)



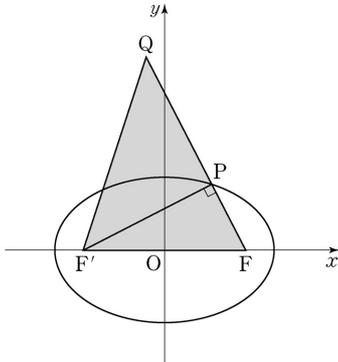


개념14

✓ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 두 초점을 지름의 양끝으로 하는 원

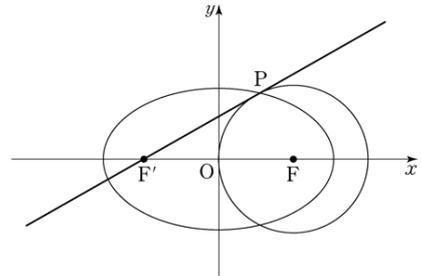
025.

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점을 F , 음수인 점을 F' 이라 하자. 이 타원 위의 점 P 를 $\angle FPF' = \frac{\pi}{2}$ 가 되도록 제1사분면에서 잡고, 선분 FP 의 연장선 위에 y 좌표가 양수인 점 Q 를 $\overline{FQ} = 6$ 이 되도록 잡는다. 삼각형 $QF'F$ 의 넓이를 구하여라.²⁵⁾



026.

그림과 같이 두 점 $F(c, 0), F'(-c, 0)(c > 0)$ 을 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원이 있다. 점 F 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 c 인 원이 타원과 점 P 에서 만난다. 점 P 에서 원에 접하는 직선이 점 F' 을 지날 때, c 의 값은?²⁶⁾



- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10} - \sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6} - 1$
- ④ $2\sqrt{3} - 2$ ⑤ $\sqrt{14} - \sqrt{5}$

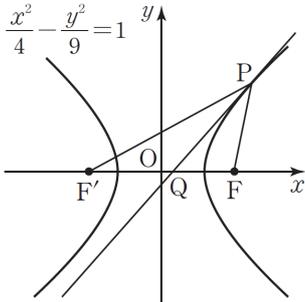


개념15

- ✓ 이차곡선과 빛 반사.
- ✓ 준선과 준원.

027.

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 제1사분면 위의 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여 $\overline{F'P} : \overline{FP} = 3 : 1$ 이다. 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\frac{\overline{F'Q}}{\overline{FQ}}$ 의 값은?27)



- ① $\sqrt{2}$
- ② $\sqrt{3}$
- ③ 2
- ④ $2\sqrt{2}$
- ⑤ 3

028.

점 $(5, a)$ 에서 포물선 $x^2 = 8y$ 에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, a 의 값을 구하여라.28)

-
- 1) ③
 - 2) 24
 - 3) $\sqrt{6}$
 - 4) ①
 - 5) ④
 - 6) 12
 - 7) ④
 - 8) ④
 - 9) $\frac{21}{5}$
 - 10) 29
 - 11) 14
 - 12) 116
 - 13) ④
 - 14) 48
 - 15) ③
 - 16) ②
 - 17) ①
 - 18) ①
 - 19) ④
 - 20) ②
 - 21) ②
 - 22) 4
 - 23) ①
 - 24) 3
 - 25) 12
 - 26) ④
 - 27) ⑤
 - 28) -2