

원포인트 개념주입 B
이차곡선

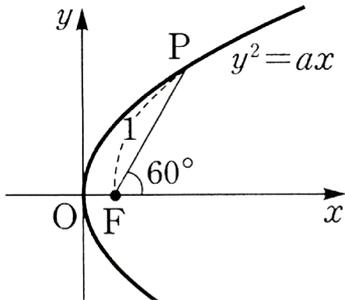


개념1

⇒ 초점이 $(p, 0)$, 준선이 $x = -p$ 인 포물선의 방정식 : $y^2 = 4px$

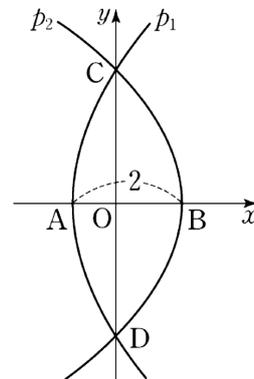
001.

그림과 같이 포물선 $y^2 = ax (a > 0)$ 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{PF} = 1$ 이고 PF가 포물선의 축과 이루는 예각의 크기가 60° 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.¹⁾



002.

그림과 같이 좌표평면에서 x 축 위의 두 점 A, B에 대하여 꼭짓점이 A인 포물선 p_1 과 꼭짓점이 B인 포물선 p_2 가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는?²⁾



- (가) p_1 의 초점은 B이고, p_2 의 초점은 원점 O이다.
- (나) p_1 과 p_2 는 y 축 위의 두 점 C, D에서 만난다.
- (다) $\overline{AB} = 2$

- ① $4(\sqrt{2}-1)$ ② $3(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
- ④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

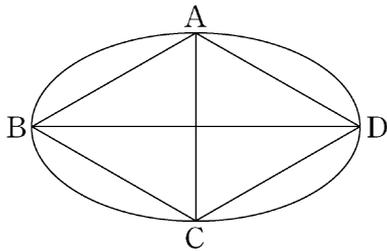


개념2

⇒ 두 초점이 $(c, 0)$ 과 $(-c, 0)$, 거리의 합이 $2a$ 인 타원 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b^2 = a^2 - c^2$)

003.

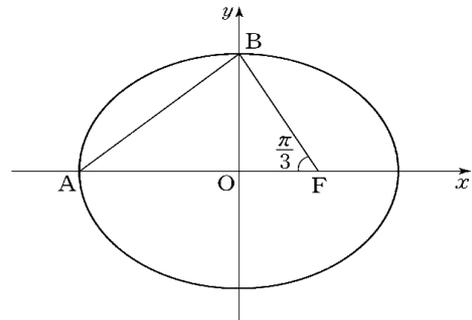
한 변의 길이가 10인 마름모 ABCD에 대하여 대각선 BD를 장축으로 하고, 대각선 AC를 단축으로 하는 타원의 두 초점 사이의 거리가 $10\sqrt{2}$ 이다. 마름모 ABCD의 넓이는?³⁾



- ① $55\sqrt{3}$ ② $65\sqrt{2}$ ③ $50\sqrt{3}$
 ④ $45\sqrt{3}$ ⑤ $45\sqrt{2}$

004.

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 초점을 $F(c, 0)(c > 0)$, 이 타원이 x 축과 만나는 점 중에서 x 좌표가 음수인 점을 A, y 축과 만나는 점 중에서 y 좌표가 양수인 점을 B라 하자. $\angle AFB = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\triangle AFB$ 의 넓이는 $6\sqrt{3}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?⁴⁾ (단, a, b 는 상수이다.)



- ① 22 ② 24 ③ 26
 ④ 28 ⑤ 30



개념3

⇒ 두 초점이 $(c, 0)$ 과 $(-c, 0)$, 거리의 차가 $2a$ 인 쌍곡선 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($c^2 = a^2 + b^2$)

005.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 꼭짓점은 타원

$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이다. $a^2 + b^2$ 의 값은?5)

- ① 10 ② 11 ③ 12
- ④ 13 ⑤ 14

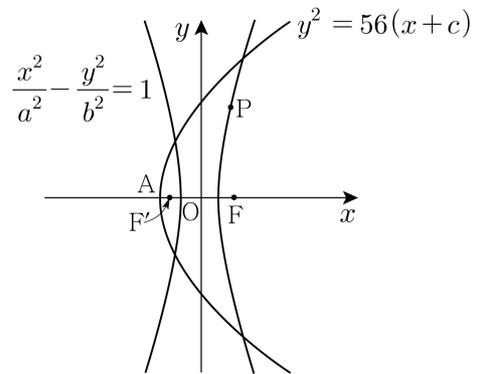
006.

점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{3}{4}x$ 이고, 한 초점의 좌표가 $(10, 0)$ 인 쌍곡선의 주축의 길이를 구하여라.6)

007.

그림과 같이 두 점 $F(k, 0)$, $F'(-k, 0)$ 을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 점 F 를 초점으로 하는 포물선 $y^2 = 56(x+c)$ 가 있다. 쌍곡선 위의 임의의 점 P 에 대하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 10$ 이 성립하고, 포물선의 꼭짓점 A 에 대하여 $\overline{AF'} : \overline{FF'} = 1 : 6$ 이 성립한다.

이때, $\frac{c^2}{a^2 - b^2}$ 의 값은?7) (단, $0 < k < c$ 이다.)



- ① $\frac{53}{14}$ ② $\frac{55}{14}$ ③ $\frac{30}{7}$
- ④ $\frac{32}{7}$ ⑤ $\frac{34}{7}$

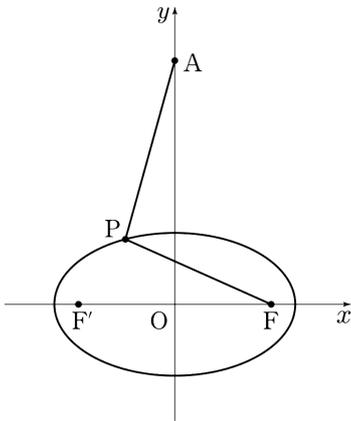


개념4

✓ 이차곡선에서 초점과 연결되어 있으면 정의부터 생각하자.

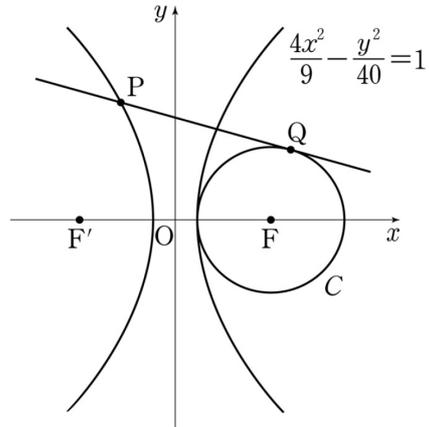
008.

그림과 같이 y 축 위의 점 $A(0, a)$ 와 두 점 F, F' 을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위를 움직이는 점 P 가 있다. $\overline{AP} - \overline{FP}$ 의 최솟값이 1일 때, a^2 의 값을 구하여라.⁸⁾



009.

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{4x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = 1$ 의 두 초점은 F, F' 이고, 점 F 를 중심으로 하는 원 C 는 쌍곡선과 한 점에서 만난다. 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P 에서 원 C 에 접선을 그었을 때 접점을 Q 라 하자. $\overline{PQ} = 12$ 일 때, 선분 PF' 의 길이는?⁹⁾



- ① 10 ② $\frac{21}{2}$ ③ 11
- ④ $\frac{23}{2}$ ⑤ 12

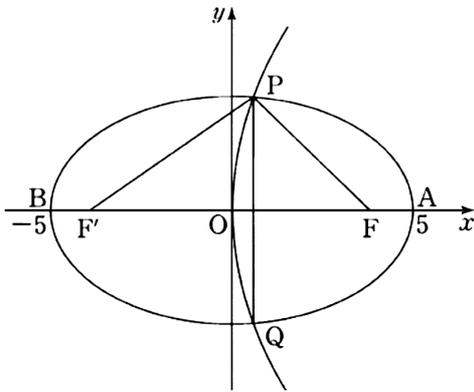


개념5

✓ 포물선 위의 점이 초점과 연결되어 있으면 준선에다 수선의 발

010.

좌표평면에서 두 점 $A(5, 0)$, $B(-5, 0)$ 에 대하여
 장축이 선분 AB 인 타원의 두 초점을 F, F' 이라
 하자. 초점이 F 이고 꼭짓점이 원점인 포물선이
 타원과 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자.
 $\overline{PQ} = 2\sqrt{10}$ 일 때, 두 선분 PF 와 PF' 의 길이의
 곱 $\overline{PF} \times \overline{PF}'$ 의 값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을
 구하여라.¹⁰⁾ (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

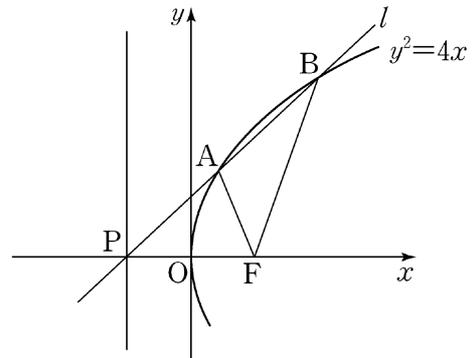


011.

포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점을 F , 준선이 x 축과 만나는
 점을 P , 점 P 를 지나고 기울기가 양수인 직선
 l 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하자.

$$\overline{FA} : \overline{FB} = 1 : 2$$

일 때, 직선 l 의 기울기는?¹¹⁾



- ① $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{4}{5}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$



개념6

✓ 점 $P(x, y)$ 의 자취의 방정식은 x, y 가 만족시키는 관계식이다.
⇒ 매개변수로 쓰는 방법

012.

점 $F(3, 0)$ 과 직선 $x = \frac{4}{3}$ 에 이르는 거리의 비가

3:2인 점 $P(x, y)$ 가 나타내는 도형의 방정식이

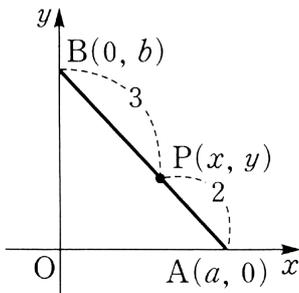
$$ax^2 + by^2 = 20$$

일 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?12)

- ① -2 ② -1 ③ 0
- ④ 1 ⑤ 2

013.

그림과 같이 길이가 5인 선분 AB 의 양 끝점 A, B 가 각각 x 축, y 축 위를 움직일 때, 선분 AB 를 2:3으로 내분하는 점 P 가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.13)



014.

좌표평면에서 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 점 A 에 대하여 점 B 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 점 A 가 원점이면 점 B 도 원점이다.
- (나) 점 A 가 원점이 아니면 점 B 는 점 A , 원점 그리고 점 A 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A 가 포물선 $y^2 = 16x$ 위를 움직일 때 점 B 가 나타내는 곡선을 C 라 하자. 점 $(3, 0)$ 을 지나는 직선이 곡선 C 와 두 점 P, Q 에서 만나고 $\overline{PQ} = 20$ 일 때, 두 점 P, Q 의 x 좌표의 값의 합을 구하여라.14)



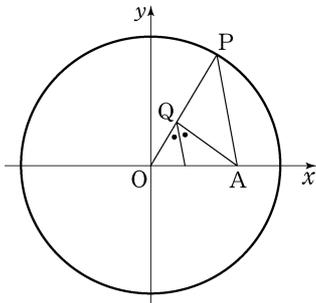
개념7

✓ 이차곡선의 정의를 만족시키는지 살펴본다.

015.

원 $x^2 + y^2 = 36$ 위를 움직이는 점 $P(a, b)$ 와 점 $A(4, 0)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 Q 전체의 집합을 X 라 하자. (단, $b \neq 0$)

- (가) 점 Q 는 선분 OP 위에 있다.
- (나) 점 Q 를 지나고 직선 AP 에 평행한 직선이 $\angle OQA$ 를 이등분한다.



집합의 포함관계로 옳은 것은?15)

- ① $X \subset \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1 \right\}$
- ② $X \subset \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1 \right\}$
- ③ $X \subset \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1 \right\}$
- ④ $X \subset \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \right\}$
- ⑤ $X \subset \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \right\}$

016.

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 두 초점 $(2\sqrt{3}, 0)$,

$(-2\sqrt{3}, 0)$ 을 각각 F, F' 이라 하자. 이 쌍곡선 위를 움직이는 점 $P(x, y)(x > 0)$ 에 대하여

선분 $F'P$ 위의 점 Q 가 $\overline{FP} = \overline{PQ}$ 를 만족시킬 때, 점 Q 가 나타내는 도형 전체의 길이는?16)

- ① π ② $\sqrt{3}\pi$ ③ 2π
- ④ 3π ⑤ $2\sqrt{3}\pi$



개념8

- ⇒ 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서 접하는 직선 : $y_1y = 2px + 2px_1$
- ⇒ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서 접하는 직선 : $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$
- ⇒ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서 접하는 직선 : $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

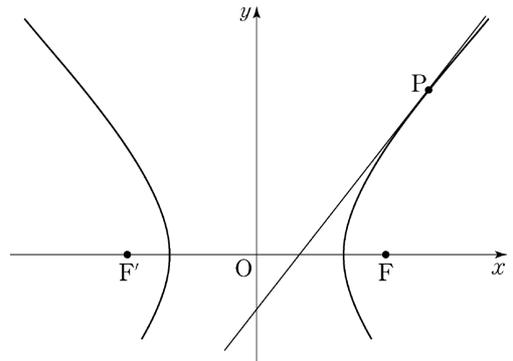
017.

쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = a$ 위의 점 $(b, 1)$ 에서의 접선이 쌍곡선의 한 점근선과 수직이다. $a+b$ 의 값은?¹⁷⁾
(단, a, b 는 양수이다.)

- ① 68 ② 77 ③ 86
- ④ 95 ⑤ 104

018.

그림과 같이 두 초점이 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 접선과 x 축과의 교점이 선분 $F'F$ 를 2:1로 내분할 때, k^2 의 값을 구하여라.¹⁸⁾ (단, a, b 는 상수이다.)





개념9

- ⇒ 포물선 $y^2 = 4px$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx + \frac{p}{m}$
- ⇒ 포물선 $x^2 = 4py$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx - m^2p$
- ⇒ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$
- ⇒ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

019.

좌표평면에서 포물선 $y^2 = 8x$ 에 접하는 두 직선 l_1, l_2 의 기울기가 각각 m_1, m_2 이다. m_1, m_2 가 방정식 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 서로 다른 두 근일 때, l_1 과 l_2 의 교점의 x 좌표는?¹⁹⁾

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

020.

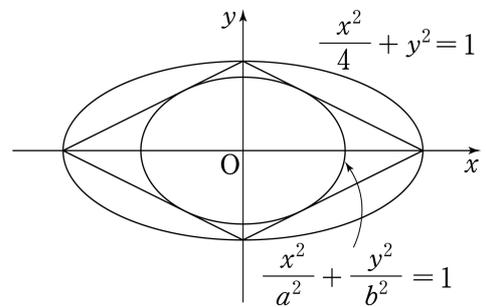
좌표평면에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 점근선에 평행하고 타원 $\frac{x^2}{8a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 직선을 l 이라 하자. 원점과 직선 l 사이의 거리가 1일 때,

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 값은?²⁰⁾

- ① 9 ② $\frac{19}{2}$ ③ 10
- ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ 11

021.

타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 의 네 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형에 내접하는 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 있다. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이 $F(b, 0), F'(-b, 0)$ 일 때, $a^2b^2 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.²¹⁾
(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)





개념10

✓ 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 A에서 그은 접선이 x 축과 만나는 점을 P라 하면

- ① P의 x 좌표 ② $\overline{PF} = \overline{AF}$
- ③ 마름모 ④ 대각선의 교점

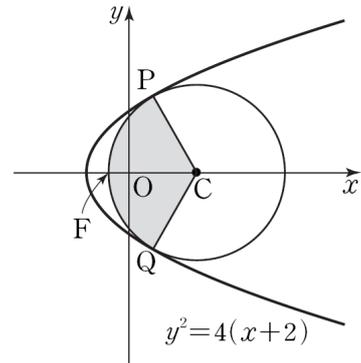
022.

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ ($y_1 > 0$)에서의 접선을 l , 초점 F에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OFH의 넓이가 $\frac{1}{2}$ 이상일 때, $x_1 + y_1$ 의 최솟값은?22) (단, O는 원점이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

023.

그림과 같이 포물선 $y^2 = 4(x+2)$ 에 접하고, 포물선의 초점 F를 지나는 원이 있다. 원과 포물선의 접점 중 제1사분면에 있는 점을 P, 점 P가 아닌 다른 접점을 Q라 할 때, 부채꼴 CPQ의 넓이는?23) (단, 점 C는 원의 중심이다.)



- ① $\frac{8}{3}\pi$ ② $\frac{10}{3}\pi$ ③ 4π
- ④ $\frac{14}{3}\pi$ ⑤ $\frac{16}{3}\pi$



개념 11

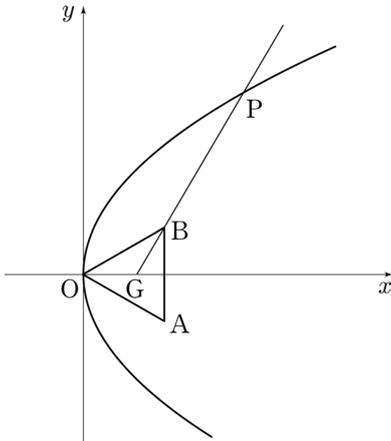
✓ 포물선의 초점을 지나는 직선

$$\textcircled{1} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$$

$$\textcircled{2} \frac{a-2p}{a} = \cos\theta, \frac{2p-b}{b} = \cos\theta$$

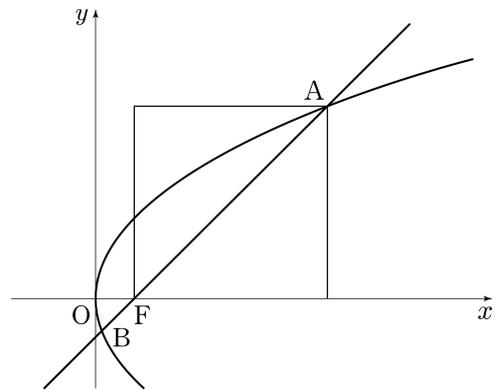
024.

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x 축 위에 있다. 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 선분 GP의 길이를 구하여라.²⁴⁾ (단, O는 원점이다.)



025.

그림과 같이 좌표평면에서 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F인 포물선과 점 F를 지나고 기울기가 1인 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AF를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 2일 때, 선분 AB의 길이는 $a+b\sqrt{2}$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하여라.²⁵⁾ (단, a, b 는 정수이다.)





개념12

✓ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 두 초점을 지름의 양끝으로 하는 원

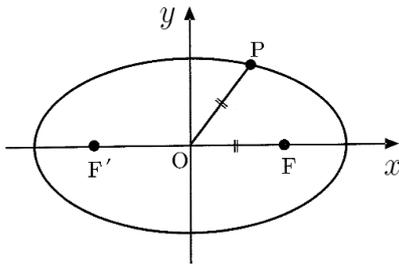
026.

타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하자.

이 타원 위의 점 P가 $\overline{OP} = \overline{OF}$ 를 만족시킬 때,

$$\overline{PF} \times \overline{PF'}$$

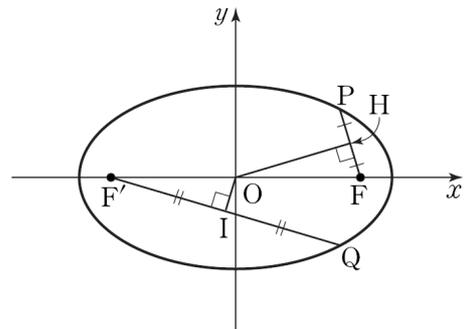
의 값을 구하여라.²⁶⁾ (단, O는 원점이다.)



027.

두 점 F(5, 0), F(-5, 0)을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF'에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자. 점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF'의 중점이고, $\overline{OH} \times \overline{OI} = 10$ 일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l이라 하자. l^2 의 값을 구하여라.²⁷⁾

(단, $\overline{OH} \neq \overline{OI}$)





개념13

✓ 한 점 P에서 이차곡선에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, P의 자취는,

① 포물선 $y^2 = 4px : x = -p$ (준선)

② 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

③ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 : x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

028.

직선 $y = x - 3$ 위의 한 점 $P(a, b)$ 에서 포물선 $x^2 = 12y$ 에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?28)

- ① -3 ② -2 ③ -1
- ④ 2 ⑤ 3

029.

점 $P(a, b)$ 에서 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$ 에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.29)

030.

점 P에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 $x > 0$ 인 부분에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 점 P가 그리는 도형의 길이는?30)

- ① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$
- ④ π ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

-
- 1) 1
 - 2) ③
 - 3) ③
 - 4) ④
 - 5) ④
 - 6) 16
 - 7) ④
 - 8) 105
 - 9) ①
 - 10) 103
 - 11) ⑤
 - 12) ④
 - 13) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
 - 14) 14
 - 15) ⑤
 - 16) ③
 - 17) ①
 - 18) 15
 - 19) ④
 - 20) ①
 - 21) 17
 - 22) ③
 - 23) ⑤
 - 24) 8
 - 25) 128
 - 26) 32
 - 27) 180
 - 28) ①
 - 29) $a^2 + b^2 = 16$
 - 30) ②