

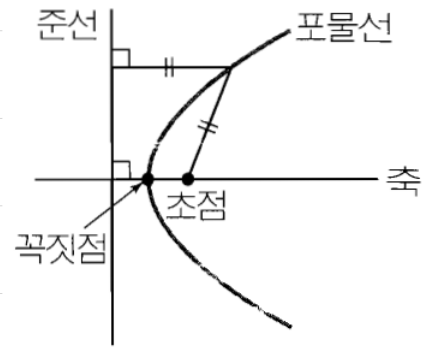
[이차곡선]

B01 | 포물선의 뜻과 방정식

개념1 한 점에서의 거리와 한 직선에서의 거리가

같은 점들의 모임을 포물선이라 한다.

✓ 용어 : 초점, 준선, 꼭짓점, 축



개념2 초점이 $(p, 0)$, 준선이 $x = -p$ 인 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ 이다.

cf) 초점이 $(0, p)$, 준선이 $y = -p$ 인 포물선의 방정식은 $x^2 = 4py$ 이다.

예제1 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y^2 = x$

(2) $y^2 = -2x$

(3) $x^2 = 4y$

(4) $x^2 = -4y$

(5) $y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$

예제2 다음 포물선의 방정식을 구하여라.

(1) 초점이 $F(2, 0)$, 준선이 $x = -2$ 인 포물선

(2) 초점이 $F(-1, 0)$, 준선이 $x = 3$ 인 포물선

(3) 초점이 $F(0, 4)$, 준선이 $x = -2$ 인 포물선

개념3 포물선의 정의를 이용한 풀이

⇒ 포물선 위의 점은 초점과 연결하고 준선에다 수선을 내려본다.

예제3 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여

$\triangle ABC$ 의 무게중심이 이 포물선의 초점 F와 일치할 때,

$\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF}$ 의 값을 구하여라.

예제4 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(5, 3)과 포물선 $y^2 = 4x$ 위의

점 P에 대하여 $\triangle ABP$ 의 둘레의 길이의 최솟값을 구하여라.

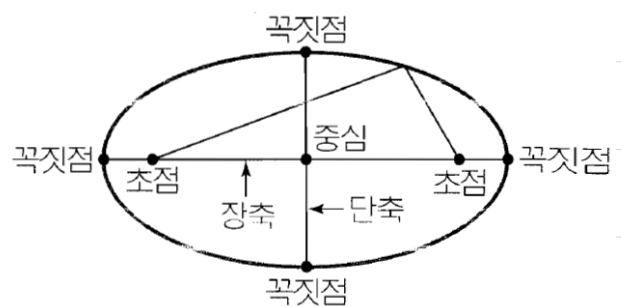
B02 | 타원의 뜻과 방정식

개념1 두 점에서의 거리의 합이 일정한

점들의 모임을 타원이라 한다.

✓ 용어 : 초점, 장축, 단축, 꼭짓점

※ 장축의 길이가 거리의 합이다.



개념2 두 초점이 $(c, 0)$ 과 $(-c, 0)$, 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = a^2 - c^2) \text{ 이다.}$$

예제1 다음 타원의 그래프를 그리고 꼭짓점과 초점을 구하여라.

(1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(2) $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

예제2 두 점 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$ 으로부터 거리의 합이 6인 점들의 자취를 구하여라.

예제3 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점 F , F' 과 타원 위의 점 P 에 대하여

$\overline{FP} : \overline{F'P} = 3 : 2$ 이다. 이때, $\cos(\angle FPF')$ 의 값을 구하여라.

예제4 타원 $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{12} = 1$ 과 직선 $y = m(x - 4)$ 가 만나는 두 점을 A , B 라 하자.

점 $F(-4, 0)$ 에 대하여 삼각형 ABF 의 둘레의 길이를 구하여라.

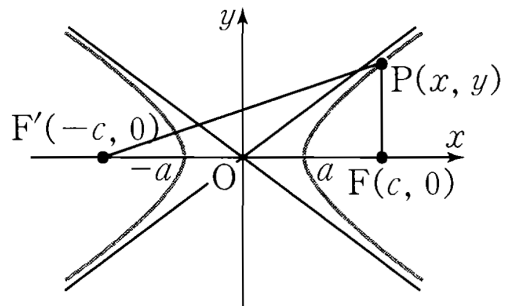
B03 | 쌍곡선의 뜻과 방정식

개념1 두 점에서의 거리의 차가 일정한

점들의 모임을 쌍곡선이라 한다.

✓ 용어 : 초점, 주축, 점근선

※ 주축의 길이가 거리의 차이다.



개념2 두 초점이 $(c, 0)$ 과 $(-c, 0)$, 거리의 차가 $2a$ 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (c^2 = a^2 + b^2) \text{ 이다.}$$

예제1 다음 쌍곡선의 그래프를 그리고 초점과 점근선을 구하여라.

$$(1) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$(2) x^2 - \frac{y^2}{2} = -1$$

예제2 두 점 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$ 으로부터 거리의 차이가 2인 점들의 자취를 구하여라.

예제3 길이가 4인 주축이 x 축 위에 놓이고 점근선이 $y = \pm 2x$ 인

쌍곡선의 방정식을 구하여라.

예제4 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 와 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 의 교점 중 제1사분면에

있는 것을 P 라 하자. $F(4, 0)$ 에 대하여 선분 FP 의 길이를 구하여라.

예제5 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 와 직선 $y = m(x-5)$ 의 두 교점을 A, B 라 하고

$F(-5, 0)$ 이라 하자. 삼각형 ABF 의 둘레의 길이가 30일 때,

선분 AB 의 길이를 구하여라. (단, $|m| > \frac{3}{4}$)

※ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 임을 설명해보자.

B04 | 이차곡선의 자취1(방정식)

※ 어떤 조건 하에서 점이 움직일 때, 점들이 그리는 도형을 점의 자취라 한다.

개념1 점 $P(x, y)$ 의 자취의 방정식은 x, y 가 만족시키는 관계식이다.

예제1 점 $F(-4, 0)$ 에서의 거리와 직선 $x=-1$ 에서의 거리의 비가

2:1인 점의 자취의 방정식을 구하여라.

예제2 점 P 에서 두 직선 $x-2y=0, x+2y=0$ 에 내린 수선의 발을 각각

A, B 라 할 때, $\overline{PA} \cdot \overline{PB}=20$ 을 만족시키는 점 P 의 자취의 방정식을 구하여라.

예제3 한 점 $A(3, 1)$ 을 지나고, 직선 $x=-1$ 에 접하는 원의 중심 C 의

자취의 방정식을 구하여라.

개념2 매개변수를 이용하여 표현된 자취

점 $P(x, y)$ 가 매개변수 t 에 대하여 $x=f(t), y=g(t)$ 와 같이 나타낼 때,

t 를 소거, x, y 에 대한 식으로 정리하여 점 P 의 자취의 방정식을 구한다.

예제4 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 P와 이 포물선의 초점 F에 대하여

선분 PF의 중점의 자취의 방정식을 구하여라.

예제5 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

선분 PH의 중점 Q의 자취의 방정식을 구하여라.

예제6 길이가 10인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x 축, y 축 위를 움직인다.

이 때, 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점 $P(x, y)$ 의 자취의 방정식을 구하여라.

예제7 두 직선 $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$ 위를 각각 움직이는 두 점

P, Q에 대하여 $\triangle OPQ$ 의 넓이가 $3\sqrt{3}$ 으로 일정할 때,

선분 PQ의 중점의 자취의 방정식을 구하여라. (단, O는 원점)

B05 | 이차곡선의 자취2(정의)

개념1 이차곡선의 정의에 의한 자취

① 포물선 : 한 점에서의 거리와 한 직선에서의 거리가 같은 점들의 모임

② 타원 : 두 점에서의 거리의 합이 일정한 점들의 모임

③ 쌍곡선 : 두 점에서의 거리의 차이가 일정한 점들의 모임

예제1 점 $A(0, 2)$ 를 지나고 x 축에 접하는

원의 중심 P 의 자취의 방정식을 구하여라.

예제2 원 $(x-3)^2 + (y+6)^2 = 4$ 에 외접하고, x 축에 접하는

원의 중심 P 의 자취의 방정식을 구하여라.

예제3 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에 외접하고, 원 $(x-1)^2 + y^2 = 25$ 에 내접하는

원의 중심 $C(x, y)$ 의 자취의 방정식을 구하여라.

B06 | 이차곡선의 접선

개념1 포물선의 접선

① 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서 접하는 직선 : $y_1y = 2px + 2px_1$

② 포물선 $y^2 = 4px$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx + \frac{p}{m}$

③ 포물선 $x^2 = 4py$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx - m^2p$

✓ 포물선 밖의 점에서 접선을 그을 때는 접점이나 기울기를 설정해서 푼다.

예제1 다음 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 포물선 $y^2 = x$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서 접하는 직선

(2) 포물선 $y^2 = 4x$ 에 접하며 기울기가 2인 직선

(3) 포물선 $y^2 = 4x$ 에 접하며 점 $(-1, \frac{3}{2})$ 을 지나는 직선

(4) 이차곡선 $x^2 - 2x - y^2 - 4y = 12$ 위의 점 $(-4, 2)$ 에서 접하는 직선

개념2 타원의 접선

① 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서 접하는 직선 : $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

② 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

예제2 다음 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위의 점 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 에서 접하는 직선

(2) 기울기가 1이며 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에 접하는 직선

예제3 점 $(2, 1)$ 을 지나고 타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

개념3 쌍곡선의 접선

① 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서 접하는 직선 : $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 기울기 m 인 직선 : $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

※ 쌍곡선의 점근선과 접선이 그어지는 개수와 접점의 위치

예제4 점 $(2, 1)$ 에서 쌍곡선 $2x^2 - 3y^2 = 6$ 에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

예제5 기울기가 $\sqrt{3}$ 이며 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하는

두 직선 사이의 거리를 구하여라.

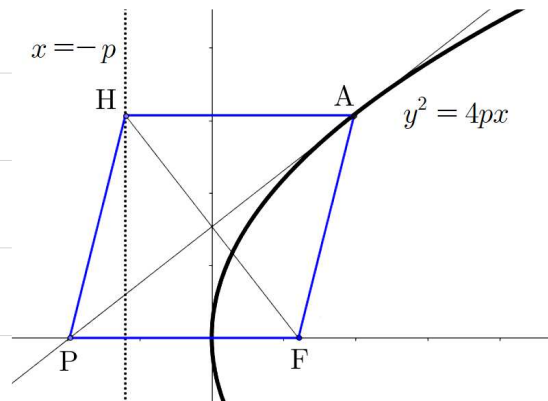
예제6 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 2$ 와 직선 $y = mx + 2$ 가 두 점에서

만나는 m 값의 범위를 구하여라.

B07 | 포물선의 접선의 성질

개념1 포물선의 접선과 마름모

- ① P의 x 좌표 $-a$
- ② $\overline{PF} = \overline{AF}$
- ③ 마름모
- ④ y 축 위의 대각선의 교점 $\frac{b}{2}$



예제1 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ ($y_1 > 0$)에서의 접선을 l ,

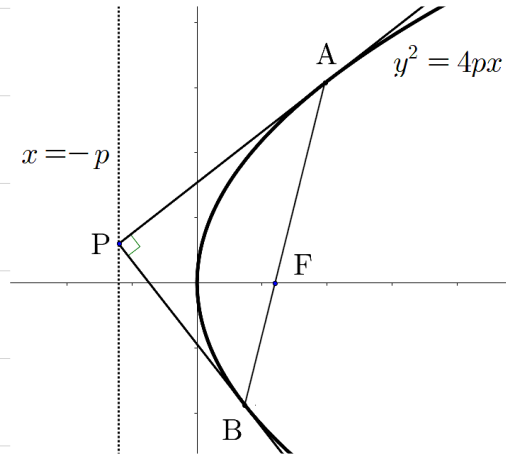
초점 F에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 OFH의 넓이가 $\frac{1}{2}$ 이상이 되게 하는 x_1 의 조건을 구하여라.

B08 | 포물선의 초점을 지나는 직선

개념1 포물선의 초점을 지나는 직선

- ① 준선 위의 점과의 관계
- ② 두 접선이 서로 수직임
- ③ 산술, 기하, 조화평균
- ④ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$



예제1 자연수 n 에 대하여 포물선 $y^2 = \frac{x}{n}$ 의 초점 F 를 지나는 직선이

포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자. $\overline{PF} = 1$ 이고 $\overline{FQ} = a_n$ 이라

할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$ 의 값을 구하여라.

예제2 포물선 $y^2 = 8x$ 와 직선 $y = 2x - 4$ 의 두 교점을 A, B 라 하고

A, B 에서 포물선의 준선에 내린 수선을 발을 각각 C, D 라 할 때,

사다리꼴 $ABDC$ 의 넓이를 구하여라.

※ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$ 만으로도 꽤 행복하지만 아래의 식이 더 유용하다.

포물선의 초점을 지나는 반직선 : $\frac{a-2p}{a} = \frac{2p-b}{b} = \cos\theta$

B09E1 | 타원과 쌍곡선의 성질

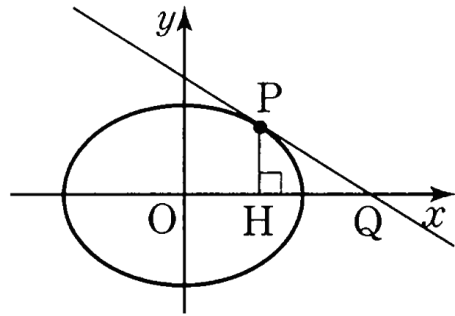
개념1 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 은 원 $x^2 + y^2 = a^2$ 를

y 축의 방향으로 $\frac{b}{a}$ 배 시킨 도형이다.

① 타원 위의 점 : $(a\cos\theta, b\sin\theta)$

② 타원의 넓이는 $ab\pi$ 이다.

③ $\overline{OH} \cdot \overline{OQ}$ 일정



예제1 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

예제2 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 P에서 접하는 접선의 x 절편을 A,

y 절편을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값을 구하여라.

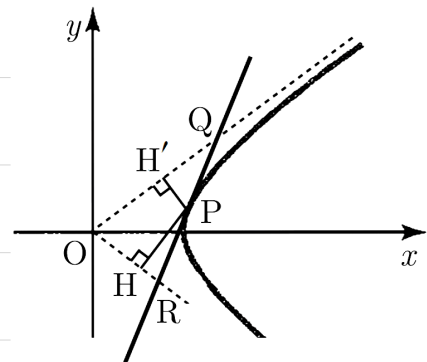
개념2 쌍곡선과 점근선이 만족시키는 성질

① P는 선분 QR의 중점이다.

② $\triangle OQR$ 의 넓이는 ab 로 일정하다.

③ $\overline{PH} \cdot \overline{PH'}$ 의 값은 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 으로 일정하다.

※ 가끔 보이는데, 모르면 털릴 수 있다.



B09E2 | 준선과 준원

개념1 점 P에서 곡선에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 점 P의 자취는,

① 포물선 $y^2 = 4px$: $x = -p$

② 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

③ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ (점근선 제외)

※ 내신/논술에 가끔 보이는 문항. 증명해보자.

B09E3 | 극선의 방정식

개념1 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 곡선에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선의 방정식은,

① 포물선 $y^2 = 4px$: $y_1y = 2px + 2px_1$

② 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

③ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

※ 가끔 보이는데, 모르면 털릴 수 있다.