[니네가 만든 모의고사(2)]

| 한성은 & 5A수학학원 |

한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

5A수학학원 학생들이 출제, 제가 수정/검수한 문항들입니다.
문항마다 번호(난이도)를 포함한 코멘트를 달았습니다.
문항에서 이용된 공부할만한 소재에 밑줄을 쳐 놨어요.

참가상을 걸었더니 개나소나 내는 바람에 오류/미완성 문항이 많아서 고생했습니다.
제목을 [일단 시작은 니네가 한 모의고사]로 바꿔야 할 듯.

한동훈 (KAIST)

5A ACADEMY

구경/검토/감탄/공차 지급을 맡았습니다.
몇몇 문제는 친자확인이 필요해 보입니다.
학교에서 친구들에게 자랑하고 다녀주세요.
훗날 저작권을 주장할 때 도움이 됩니다.

출제 학생 명단입니다.
[교하고 강민석], [운정고 고현승], [운정고 권도은], [대구과고 김우석], [백신고 김정민],
[저현고 김정현], [운정고 김채윤], [고양외고 김태원], [운정고 김현규], [운정고 노윤찬],
[고양국제고 맹호], [백양고 방주현], [가좌고 서승령], [백석고 서지호], [화수고 신준],
[일산동고 안형준], [운정고 양건모], [지산고 윤선아], [저현고 윤주호], [성사고 이승준],
[고양국제고 이시은], [인천대인고 이준호], [백마고 이지민], [운정고 전경호], [백신고 정다연],
[행신고 조시준], [주엽고 주지환], [주엽고 지성준], [상산고 함윤]
1번~23번은 공통, 24번~25번은 확통, 26번~34번은 미적분, 35번은 기하입니다.

CCL

[저현고 김정현]

1. $\log_2 x + \log_2(2n-x)$의 값이 자연수가 되도록 하는 x의 값이 14개가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

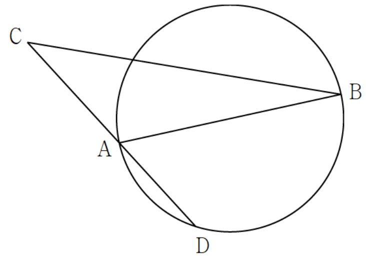
9번 정도. 이차함수의 최댓값이 어디에 떨어지는지 조사.

[일산동고 안형준]

2. 삼각형 ABC에 대하여

$$\overline{AC}=3,\quad \overline{BC}=7,\quad \cos(\angle ABC)=\frac{13}{14}$$

가 성립한다. 직선 AC와 선분 AB를 지름으로 하는 원이 A가 아닌 점 D에서 만날 때, $\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}<\overline{BC}$이다.) [4점]



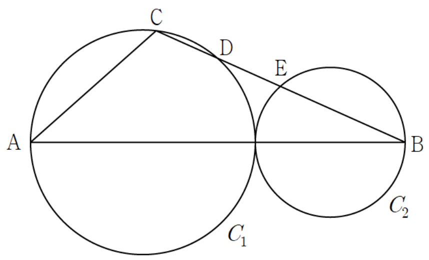
① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

[한성은의 점수]

10번 정도. 삼각형 ABC가 결정되어 있다.

[운정고 김현규]

3. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원 C_1과 반지름의 길이가 2인 원 C_2가 서로 한 점에서 만난다. 원 C_1 위의 점 A와 원 C_2 위의 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=10$이고 원 C_1 위의 점 C에 대하여 선분 BC가 두 원 C_1, C_2와 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DE}}$이다. $\overline{\mathrm{AC}}$의 값은? [4점]



① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

[한성은의 점수]

12~13번. 대충 봐도 ∠B가 궁금하다.
코사인법칙, 원의 보조선.
반지름의 길이가 3:2일 때 숫자 예쁘더라구.

[성사고 이승준]

4. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(f'(t))dt=\frac{4}{3}x^3+3x^2+4x$$

를 만족시킨다. $f(4)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

19~20번. 기본적으로 다항함수는 차수 의심.

[저현고 김정현]

5. 0 이상의 정수 n에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식

$$m\sin x = n$$

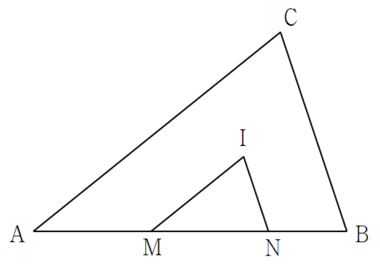
의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{k=0}^{n} a_k$의 최댓값이 100일 때, 자연수 m의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

20번 정도. 삼각함수보다는 수열의 정의?
당연히 n하고 m 헷갈리겠지?

[주엽고 지성준]

6. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$이고 $\cos(\angle BAC) = \frac{7}{9}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 변에 모두 접하는 원의 중심을 I라 하고, 선분 AB 위에 두 점 M, N을 두 선분 IM, IN이 각각 선분 CA, CB와 평행하도록 잡는다. 삼각형 IMN의 둘레의 길이가 3일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]



① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

[한성은의 점수]

10~11번. 일단 딱봐도 닮음.
코사인법칙과 내접원의 반지름의 길이 필요하고.
대응되는 선분의 길이는?

[백마고 이지민]

7. 두 곡선

$$y=\frac{3}{4}\cdot 2^{x}, \quad y=-8^{2-x}+k$$

이 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 k의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[한성은의 점수]

13~14번. 지수함수 문항처럼 보이지만
막상 풀려고 치환해보면,
사차함수의 그래프 문항이다.

[운정고 전경호]

8. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하여라. [4점]

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-4}{x^2}$의 값이 존재한다.
(나) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2x}{f(x)-x^2}$의 값이 존재하지 않는다.

[한성은의 점수]

20번 정도. (가)는 미분계수로 정보 뽑는 것이
보통이고, 제곱인수 잡아서도 다룰 수 있다.
(나)가 신선하다. 미분계수 꼴 보이게 적절한 변형.

[교하고 강민석]

9. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=xf'(x)-\int_{1}^{x}f'(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(2)=10$일 때, $f(4)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

20번 정도. 차수조사 내면 털리는 애들 나온다.

[저현고 김정현]

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f'(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가진다. (나) 곡선 $y=f(x)$가 두 직선 $y=x$, $y=x-4$와 모두 접한다.

$f(6)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

19~20번. 대부분 변곡점은 보일테고,
식을 세우는 것은 각자 요령대로.
삼차함수의 대칭성, 다항식의 구성

[백신고 정다연]

11. 1보다 큰 두 실수 a와 r에 대하여 원 $x^2+y^2=r^2$이 곡선 $y=a^x$와 제1사분면에서 만나는 점을 A, 원 $x^2+y^2=r^2$이 곡선 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$와 제4사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=10\sqrt{2}$이고 선분 AB를 지름으로 하는 원과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리가 14일 때, $r\times a^2$의 값을 구하여라. (단, 점 A의 y좌표는 x좌표보다 크다.) [4점]

[한성은의 점수]

21번? 소재가 노골적이라 21번에 놓으면
망한 모의고사 느낌이긴 하지만.
평가원에 딱 한 번 출제된 90° 회전.

[고양외고 김태원]

12. 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-n}+n$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$에서 만나고 한 직선 l이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 모두 접할 때 접점의 좌표를 각각 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $n<x_3<n+1$

ㄴ. $\log_2 n<x_1<\log_2(n+1)$

ㄷ. $\dfrac{\log_2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n-1}<\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}<\dfrac{\log_2 n}{n-1}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[한성은의 점수]

15번? 일단 접선의 기울기가 정해져 있다.
기억은 평균값 정리같은 생각.
디귿은 딱봐도 기울기의 대소.

[상산고 함윤]

13. 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin k\pi x-\frac{1}{2}$$

에 대하여 $0\le x\le 1$일 때, 방정식

$$(x^2-x-1)f(x)+(x^2-x)=\{f(x)\}^2$$

의 서로 다른 실근의 개수가 20이 되도록 하는 자연수 k의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

20번 정도. 삼각함수의 그래프.
인수분해 되더라. 몇 주기가 들어오는지 조사.

[운정고 노윤찬]

14. 함수 $f(x)=-x^3+ax$의 그래프와 원 $x^2+y^2=r^2$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(r)$이라 하자. 모든 양수 k에 대하여 $\lim_{r\to k-}g(r)=\lim_{r\to k+}g(r)$을 만족시키도록 하는 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

[한성은의 점수]

12~13번. 한 번쯤 고민해봤을 곡률? 어쩌고.
쉽지는 않지만, 조건을 정확하게 식으로 옮기면
삼차함수의 그래프 문항이 남는다.

[고양국제고 맹호]

15. 함수

$f(x)=(x-a)(x-1)(x-b)$ (단, $a<1<b$)

와 사차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $|f(|x|)|\times g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 갖고, 이 네 실근이 크기 순서대로 등차수열을 이룰 때, $f(5)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

20번 정도. 기억해둬야 하는 명제.
(미분불가)$\times$(연속)$=$(미분가능)
이면 (연속)$=0$이다.
절댓값이 포함된 함수의 그래프는 기본.

[운정고 권도은]

16. 최고차항의 계수가 1이고 $f(4)=f'(4)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $g(x)$, 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$f(x)=g(t)$

의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속이 되도록 하는 모든 실수 k의 개수가 3이고 방정식 $f'(g(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, $f(6)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

어려운 20번. 신선한 느낌을 주는 문항.
일단 그래프 추론 문항. $f'(g(x))=0$는
합성함수를 포함한 방정식인데, $f(x)=g(t)$는
옆에 그려놓고 y값 조사..? 처음 해 보는 듯.

[인천대인고 이준호]

17. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 집합

$$A=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{는 } x=a\text{에서 극대이다.}\}$$

의 서로 다른 모든 원소의 합을 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 오직 $t=4$에서만 불연속이고
$\lim_{t\to 4+} g(t)-g(4)=2$일 때, $f(4)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

22번처럼 생긴 20번.
난이도는 14번에 어울리려나.
고전적인 <u>그래프 추론</u>.

[저현고 김정현]

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$에 대하여 $x \le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $h(t)$, $t \le x$에서 $g(x)$의 최솟값을 $k(t)$라 할 때, 네 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(t)$, $k(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)=g(-1)$ (나) $\{t \mid h(t)=4\}=\{t \mid k(t)=4\}=\{t \mid 0 \le t \le 3\}$

$f(4)+g(4)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

22번처럼 생긴 20번. <u>그래프 추론</u>.
옛날 기출에서 봤던 함수. $k(t)$가 재미있다.

[행신고 조시준]

19. $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}6a_n & (a_n \le n)\\ a_n-3 & (a_n > n)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_k \le k$가 되도록 하는 100 이하의 모든 자연수 k의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m$

이라 하자. $m+\sum_{i=1}^{m} b_i$의 값은? [4점]

① 136 ② 142 ③ 148
④ 154 ⑤ 160

[한성은의 점수]

쉬운 15번. 조건대로 잘 나열하면,
귀찮은 계산이 하나 남는다.

[운정고 고현승]

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가진다. 실수 t에 대하여 두 점 $(t,\ f(t))$와 $(4,\ f(4))$ 사이의 거리의 제곱과 두 점 $(t,\ f(t))$와 $(4,\ k)$ 사이의 거리의 제곱 중 크지 않은 것을 $g(t)$라 하고, 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 미분가능하지 않도록 하는 모든 실수 a의 개수를 $h(k)$라 하자. 함수 $h(k)$가 $k=b$에서 불연속이 되도록 하는 모든 b를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 $-4,\ -2,\ f(4)$이고 $h(f(2))\neq 0$일 때, $f(6)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

고전 사설틱한 22번. 그래프 추론.
졸라 헷갈린다. $g(t)$는 구간별로 다항함수다.

[화수고 신준]

21. 두 양수 k, a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=kx(x-a)^2$$

이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=l(x)$라 할 때, 방정식

$$f(f(x))=l(f(x))$$

의 서로 다른 모든 실근의 개수가 4이고 이 네 실근 중 가장 큰 것은 8이다. $f(10)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

쉬운 22번. 너무 쉽나?
그래프 추론과 합성함수를 포함한 방정식.
삼차함수의 성질을 기본적으로 때리고 싶다.

[운정고 김채윤]

22. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=-3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$f(f(x))=x$$

의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이

$$a,\ b,\ 0,\ c,\ d$$

이다. $a+d=0$, $b+c=0$일 때, $abcd$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

망한 22번.
$f(f(x))=x$
를 다루는 방법을 모르면 못 푸는 문제.
그 기출을 잘 공부했으면 매우 쉬운 문제.

[주엽고 주지환]

23. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$$

가 극댓값을 갖는다. 함수 $g(x)$의 극댓값을 $M(a)$, 최솟값을 $m(a)$이라 할 때, 함수

$$h(a)=|M(a)|-|m(a)|$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|h(2)|=2$
(나) $h(a)$는 $a=0$와 $a=4$에서 최댓값을 갖는다.

$f(6)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

아쉬운 22번. 그래프 추론인데..
뭔가 설정이 많이 숨기기 어렵더라구.

[백석고 서지호]

24. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 서로 다른 두 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

두 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, 점 P를 x축의 양의 방향으로 a만큼, y축의 양의 방향으로 b만큼 이동시킨다.

이 시행을 반복하여 점 P가 점 $(6, 6)$까지 이동하는 경우의 수를 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

29번. 케이스 분류지 뭐.
중복조합 쓸 수 있긴 한데

[고양국제고 이시은]

25. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 원 모양의 탁자에 둘러 앉은 네 사람이 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 각각 꺼냈을 때, 이웃하는 두 사람의 카드에 적힌 숫자의 곱이 모두 짝수일 확률은? (단, 한 번 꺼낸 카드는 다시 주머니에 넣지 않는다.) [3점]

① $\frac{13}{35}$ ② $\frac{27}{70}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{29}{70}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

[한성은의 점수]

27번. 케이스 분류지 뭐.
원순열과 무관하니 원탁보고 놀라지 말 것.

[백신고 김정민]

26. 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $y=2\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$가 두 점 P, Q에서 만난다. 곡선 $y=2\cos x$ 위의 점 P에서의 접선과 점 Q에서의 접선이 점 R에서 만나고 $\angle \mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}$일 때, 삼각형 PQR의 넓이는 a또는 b이다. $a+b$의 값은? [3점]

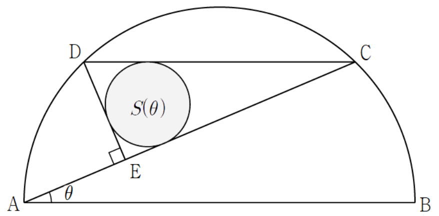
① $\frac{1}{2}\pi^2$ ② $\frac{5}{9}\pi^2$ ③ $\frac{11}{18}\pi^2$ ④ $\frac{2}{3}\pi^2$ ⑤ $\frac{13}{18}\pi^2$

[한성은의 점수]

26번. 접선의 기울기를 가볍게 숨겨놨군.

[지산고 윤선아]

27. $\overline{AB}=2$인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 C, D에 대하여 $\angle CAB=\theta$이고, 선분 CD가 선분 AB와 평행하다. 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하고, 삼각형 CDE의 세 변에 모두 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이다.) [3점]



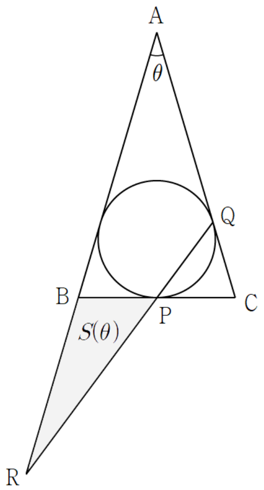
① π ② $\frac{3\pi}{2}$ ③ 2π
④ $\frac{5\pi}{2}$ ⑤ 3π

[한성은의 점수]

25~26번. CD가 원의 현이므로 중심에서 수선. 직각삼각형 타고 길이 옮기기라 전통적인 패턴.

[일산동고 안형준]

28. $\overline{AB}=\overline{AC}=1$이고 $\angle CAB=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 변에 모두 접하는 원과 두 선분 BC, AC의 교점을 각각 P, Q라 하고, 두 직선 AB, PQ의 교점을 R라 하자. 삼각형 BPR의 넓이가 $S(\theta)$일 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? [3점]



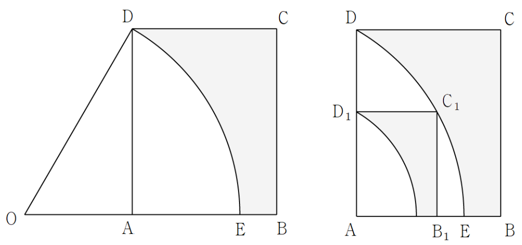
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

[한성은의 점수]

25~26번. 각이 잘 표시되네? 사인법칙.

[운정고 권도은]

29. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{5}$인 직사각형 ABCD와 선분 AB 위의 점 E, 직선 AB 위의 점 O에 대하여 중심이 O, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 ODE가 있다. 직사각형 ABCD의 내부와 부채꼴 ODE의 외부의 공통부분인 ◥ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB 위의 점 $\mathrm{B_1}$, 호 DE 위의 점 $\mathrm{C_1}$, 선분 AD 위의 점 $\mathrm{D_1}$을 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{AB_1}}:\overline{\mathrm{AD_1}}=\sqrt{3}:\sqrt{5}$인 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$을 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$의 내부에 ◥ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻을 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2

① $\frac{8}{11}\left(\sqrt{15}+\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{10}{9}\pi\right)$ ② $\frac{10}{11}\left(\sqrt{15}+\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{10}{9}\pi\right)$
③ $\frac{12}{11}\left(\sqrt{15}+\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{10}{9}\pi\right)$ ④ $\frac{14}{11}\left(\sqrt{15}+\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{10}{9}\pi\right)$
⑤ $\frac{16}{11}\left(\sqrt{15}+\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{10}{9}\pi\right)$

[한성은의 점수]

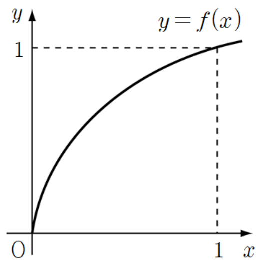
25~26번. 전통의 직각삼각형 찾아서 피타고라스.

[운정고 양건모]

30. $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}$인 연속함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

의 값은? [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[한성은의 점수]

망한 26번. 그 기출 모르면 매우 어렵다.
직사각형 퐁당퐁당이라 적분값의 절반이 된다.

[대구과고 김우석]

31. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^2\ln(x-t)$가 곡선 $y=(x-a)^2$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$, 이때 교점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. $f'(2e)+g'(2e)$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

[한성은의 점수]

망한 28번. 난이도로는 30번? 그 기출 변형.
그런데 공부했다는 애들도 매번 잘 못 풀더라구.

[백양고 방주현]

32. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 x절편을 $g(t)$라 하자. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t}=\frac{2}{3}$
(나) $g(t)$는 $t=-2$에서 극댓값 -2를 가지고, $t=0$에서 극솟값 -10을 가진다.

$f(2)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

30번. 난이도로는 27~28번. 그래프 추론.
(가)에서 차수를 잡아낼 수 있다. $g(t)$를 식으로 구해서 미분해도 되고, 그냥 개형 째려봐도 좋다.

[가좌고 서승령]

33. 함수 $f(x)=(x-a)^3e^{-x}$와 실수 t에 대하여 방정식 $h(x)=h'(t)(x-t)+h(t)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. $\lim_{t\to k}g(t)=g(k)+1$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 12일 때, $e^6f(6)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

망한 30번. 너무 전형적. 그래프 추론.
그런데 올해 6월 30번이 이런 식이었지.

[교하고 강민석]

34. 삼차함수 $g(x)$와 함수

$$f(x)=\frac{g(x)}{e^{x-1}}$$

에 대하여 $f(x)=f(t)$를 만족시키는 가장 큰 실수 x의 값을 $h(t)$라 하자. 실수 α와 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(\alpha)=0$
(나) $\lim_{t\to\alpha-}h(t)=-2$
(다) $\lim_{t\to\alpha+}h(t)$의 값이 존재하지 않는다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 -3일 때, $g(-8)$의 값을 구하여라. [4점]

[한성은의 점수]

깔끔한 30번. 그래프 추론.

[저현고 윤주호]

35. 정사각형 ABCD의 네 변이 모두 타원 $E: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$에 접한다. 두 초점이 A, C인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 두 초점이 B, D인 쌍곡선 $\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=-1$이 모두 각각 타원 E와 두 점에서 만날 때, $|abcd|$의 값은? [3점]

① 120 ② 126 ③ 132
④ 138 ⑤ 144

[한성은의 점수]

25~26번. 뭔가 상황이 특이해서 묘하게
수능문항처럼 생기지 않았지만 귀찮아서 마무리.
기울기가 주어진 접선, 쌍곡선의 방정식

[2023 니네가 만든 모의고사(2) 정답표]

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	54	02	③	03	④	04	22	05	49
06	②	07	④	08	36	09	34	10	56
11	20	12	⑤	13	13	14	③	15	46
16	20	17	24	18	45	19	③	20	230
21	60	22	8	23	24	24	252	25	④
26	⑤	27	①	28	①	29	⑤	30	②
31	②	32	20	33	27	34	24	35	⑤

COMMENT 01

이차함수 $x(2n-x)$의 최댓값 n^2이 $2^7 < n^2 < 2^8$을 만족시켜야 한다.

$11^2 < 2^7 < 12^2$이므로 부등식을 성립시키는 모든 자연수 n은 12, 13, 14, 15이다.

COMMENT 02

삼각형 ABC에서 코사인을 돌리면 $\overline{\mathrm{AB}}=5$이다.

$\cos(\angle\mathrm{BCA})=\dfrac{11}{14}$이고 $\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{BC}}\times\cos(\angle\mathrm{BCA})=\dfrac{11}{2}$이다.

COMMENT 03

$\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하고, 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2, 선분 CD의 중점을 M이라 하자.

$\overline{\mathrm{C_1M}}=7\sin\theta$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{9-49\sin^2\theta}$이고, $\overline{\mathrm{ME}}=3\cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=3\cos\theta-\sqrt{9-49\sin^2\theta}$이다.

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DE}}$을 풀면 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$이다. $\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{4\sqrt{30}}{3}$이고, 삼각형 ABC에서 코사인.

COMMENT 04

$f(f'(x))=4x^2+6x+4$이다. 이차식 각이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$$f(f'(x))=a(2ax+b)^2+b(2ax+b)+c=4a^3x^2+(4a^2b+2ab)x+(ab^2+b^2+c)$$

이므로 $a=1$, $b=1$, $c=2$이다. $f(x)=x^2+x+2$이므로 $f(4)=22$이다.

COMMENT 05

$$a_n=\begin{cases}3 & (n=0)\\ 2 & (0<n<m)\\ 1 & (n=m)\\ 0 & (m<n)\end{cases}$$

이므로

$$\sum_{k=0}^{n}a_k=3+2+2+2+\cdots+2+1+0+0+0+\cdots$$

이다. $100=3+2\times48+1$이므로 $a_{49}=1$, $m=49$이다.

COMMENT 06

삼각형 ABC에서 코사인을 돌리면 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:2$이다. $\overline{\mathrm{AB}}=9a$라 하자. 점 C에서 선분 AB까지의 거리는 $4\sqrt{2}a$이고 내접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$이므로 두 삼각형 ABC와 MNI의 닮음비는 $8:3$이다.

삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $24a=8$이므로 $a=\dfrac{1}{3}$이다.

COMMENT 07

$2^x=t$라 치환하면 방정식

$$\frac{3}{4}t=-\frac{64}{t^3}+k \quad\Leftrightarrow\quad 3t^4-4kt^3+256=0$$

가 오직 1개의 양의 실근을 가져야 한다.

함수 $3t^4-4kt^3+256$는 $t=k$에서 최솟값 $-k^4+256$을 가진다. $-k^4+256=0$에서 $k=4$이다.

* $k\le0$이 경우에는 $t>0$에서 증가하고 양의 실근을 갖지 않는다.

COMMENT 08

(가)에서 $f(x)=x^2(ax+b)+4$이다. (나)에서 $f(2)=4$, $f'(2)=4$이므로 $f(x)=x^2(x-2)+4$이다.

$$* \lim_{x\to2}\frac{f(x)-2x}{f(x)-x^2}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{f(x)-4}{x-2}-2}{\frac{f(x)-4}{x-2}-(x+2)}$$ 는 $f'(2)\neq4$이면 $\frac{f'(2)-2}{f'(2)-4}$로 수렴한다.

COMMENT 09

준 식은 $2f(x)=xf'(x)+f(1)$이다.

$f(x)=ax^n+\cdots$라 하자. 좌변은 $2ax^n+\cdots$, 우변은 $anx^n+\cdots$이므로 $n=2$이다. $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$$2ax^2+2bx+2c=x(2ax+b)+a+b+c=2ax^2+bx+(a+b+c)$$

이므로 $b=0$, $a=c$이다. $f(2)=4a+c=10$에서 $f(x)=2x^2+2$이다.

COMMENT 10

점 $(2, 0)$이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 $x=a$일 때 접한다고 하자.

비율관계 때리면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 접점이 아닌 점의 x좌표는 $6-2a$이므로

$f(x)=(x-a)^2(x-6+2a)+x$이다. $f(2)=0$에서 $a=1$이다. $f(x)=(x-1)^2(x-4)+x$이므로 $f(6)=56$이다.

COMMENT 11

$A(p,\ a^p)$라 하면 $B(a^p,\ -p)$이다. $\overline{AB}=10\sqrt{2}$에서 $p^2+(a^p)^2=100$이다.

선분 AB를 지름으로 하는 원이 x축과 만나는 점 중 하나는 원점이므로,

다른 한 점은 $(14,\ 0)$, 원의 중심의 x좌표가 7이다. 따라서 $p+a^p=14$이다.

연립하여 풀면 $p=6$, $a^p=8$이므로 $a^2=2$, $r=10$이다.

COMMENT 12

ㄱ : 직선 l의 기울기는 1이고 $f(0)=1$, $f(1)=2$이므로 $0<x_1<1$이다. $x_3=x_1+n$이므로 참

ㄴ : $n<y_1<n+1$이고 $y_1=2^{x_1}$이므로 참

ㄷ : $y_1=2^{x_1}$, $y_2=2^{x_2}$이며, $\log_2 n<x_1\le\log_2(n+1)$, $0<x_1<1$이다.

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 기울기는 x_1이 클수록, x_2가 작을수록 크다.

$$\frac{n-1}{\log_2 n-0}\le\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}<\frac{(n+1)-2}{\log_2(n+1)-1}$$

이다.

COMMENT 13

$$\{f(x)\}^2-(x^2-x-1)f(x)-x(x-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \{f(x)-x(x-1)\}\{f(x)+1\}=0$$

이다. $y=x(x-1)$, $y=-1$의 그래프를 째려보면 한 주기에서 교점이 3개 생김을 알 수 있다.

주기가 $6+\alpha(0<\alpha<1)$이 들어와야 하므로 $\frac{1}{7}<\frac{2}{k}<\frac{1}{6}$에서 $k=13$이다. 확인해보면 20개 가능.

COMMENT 14

$x^2+(-x^3+ax)^2=r^2$이 모든 양수 r에 대하여 양수인 근이 항상 1개여야 한다.

$$x^2+(-x^3+ax)^2=r^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^6-2ax^4+(a^2+1)x^2=r^2 \quad\Leftrightarrow\quad X^3-2aX^2+(a^2+1)X=r^2$$

에서 양수 X값이 항상 1개이려면 함수 $X^3-2aX^2+(a^2+1)X$가 양의 실수 전체의 집합에서 증가한다.

미분해서 $3X^2-4aX+(a^2+1)=0$의 판별식이 0 이하를 풀면 a의 최댓값은 $\sqrt{3}$이다.

COMMENT 15

함수 $|f(|x|)|$는 $x=\pm1$, $x=\pm b$에서 미분가능하지 않고, $x=0$에서 미분가능하지 않을 수 있다.
함수 $|f(|x|)|$가 미분가능하지 않고 함수 $|f(|x|)|\times g(x)$가 미분가능하려면 $g(x)=0$이다.
네 수 $-b$, -1, 1, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $b=3$이고, 함수 $|f(|x|)|$가 $x=0$에서 미분가능해야 하므로 $f'(0)=0$이다. 풀면 $f(x)=\left(x+\frac{3}{4}\right)(x-1)(x-3)$이므로 $f(5)=46$이다.

COMMENT 16

함수 $g(x)$의 극값이 함수 $f(x)$의 극값이어야 하고, 함수 $g(x)$의 극값이 $f'(x)=0$의 근이어야 한다.
곡선 $y=f(x)$가 $x=4$에서 x축 아래쪽으로 접하는 것은 가능한 각이 나오지 않는다.
$g(x)$의 극댓값이 $f'(x)=0$의 양수인 근인 4이고 이 값이 $f(x)$의 극댓값이다. $f(x)=(x-1)(x-4)^2$이다.

COMMENT 17

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 가진다고 하자. 그래프를 째려보면

$$g(t)=\begin{cases} a & (t\le f(b)) \\ a+b & (f(a)<t<f(b)) \\ b & (f(b)\le t) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(t)$에서 우극한과 함숫값이 다를 때는 $t=f(b)$이므로 $b=2$이고,
$t=f(b)$에서 연속이므로 $a=0$이다. $f(x)=(x+1)(x-2)^2+4$이다.

COMMENT 18

$f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지고 $f(3)=4$이므로 $f(x)=x^2(x-3)+4$이다.
$g(x)$는 $x=3$에서 극솟값 4를 가지고 $g(0)=4$이다.
$g(x)=(x-a)x(x-2)^2+4$에서 $g(-1)=f(-1)=0$이므로 $g(x)=x(x-3)^2\left(x+\frac{5}{4}\right)+4$이다.

COMMENT 19

점화식에 따라 나열해보면

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$	16	17	$\cdots$	36	37	$\cdots$	78	79	$\cdots$
a_n	1	6	3	18	15	12	9	6	36	$\cdots$	15	90	$\cdots$	33	198	$\cdots$	75	450	$\cdots$

이다. $m=6$, $\sum_{i=1}^{6} b_i=1+3+8+16+36+78=142$이다.

* 상황 이해가 되면 계산은 여러 가지 방법으로 가능할 듯.
  예를 들어 $n=17$부터 한동안 $a_n=-3n+141$이므로

  $a_n\le n \iff -3n+141\le n \iff 36\le n$

  에서 a_{36}까지 등차수열로 간다로 풀어도 좋고,
  아님 대충 $17+m=90-3m$ 풀어서 찍는다든가.

COMMENT 20

함수 $g(t)$는 $[(t-4)^2+\{f(t)-f(4)\}^2]$과 $[(t-4)^2+\{f(t)-k\}^2]$ 중 크지 않은 것이다.
$g(t)$가 미분가능하지 않을 때는 $k\neq f(4)$일 때는 $f(t)=\frac{k+f(4)}{2}$이며 $f'(t)\neq0$일 때이다.
$k=f(4)$일 때는 모든 실수 t에 대하여 미분가능하다.

$h(k)$의 불연속점은 $k=f(4)$일 때와 $\frac{k+f(4)}{2}$의 값이 $f(x)$의 극값에 걸릴 때 만들어진다.

따라서 $f(x)$는 두 극소점의 y값이 모두 $\frac{f(4)-4}{2}$이고 극댓값이 $\frac{f(4)-2}{2}$이다.

극댓값과 극솟값이 차이가 1이므로 $f(x)$는 $(x+\sqrt{2})x^2(x-\sqrt{2})$를 평행이동 시킨 것이다.

$$f(x)=(x-2)^2(x^2-4x+2)+c$$

에서 $f(4)=8+c$이므로 $\frac{f(4)-2}{2}=c$에서 $c=6$이다. $f(x)=(x-2)^2(x^2-4x+2)+6$이고 $f(6)=230$이다.

COMMENT 21

방정식 $f(t)=l(t)$의 서로 다른 모든 실근이 0, $2a$이다.

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=2a$의 서로 다른 실근의 개수가 4에서 $f(x)$의 극댓값이 $2a$이다.

가장 큰 실근은 $\frac{4}{3}a$이므로 $a=6$이고 $\frac{k}{2}\left(\frac{2}{3}a\right)^3=2a$에서 $k=\frac{3}{8}$이므로 $f(x)=\frac{3}{8}x(x-6)^2$이다.

COMMENT 22

방정식 $f(x)=x$가 세 실근 a, 0, d를 갖고 $f(b)=d$, $f(d)=b$이다.

$$f(x)=(x-a)x(x+a)+x$$

이다. $f'(0)=-3$에서 $a=-2$이므로 $f(x)=x^3-3x$이다.

$f(b)=-b$에서 $b=-\sqrt{2}$이다.

COMMENT 23

$g(a)=0$이므로 모든 실수 a에 대하여 $m(a)\le 0$이다.

$$h(a)=\begin{cases}-M(a)+m(a) & (M(a)\le 0)\\ M(a)+m(a) & (0<M(a))\end{cases}$$

에서 $M(a)-m(a)$는 상수이다. $h(x)$가 최댓값을 가질 때는 $g(x)$가 극소일 때이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=4$에서 동일한 극솟값을 가진다.

$$g(x)=kx^2(x-4)^2+c$$

에서 $h(2)$가 (극댓값)$-$(극솟값)이므로 $k=\frac{1}{8}$이다.

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x-2)(x-4)$$

이므로 $f(6)=24$이다.

COMMENT 24

예를 들어, 3번 반복하여 점 (6, 6)에 도착했을 때, 각 시행의 결과를 (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)라 하면,

$$a_1+a_2+a_3=6,\ b_1+b_2+b_3=6$$

이므로, 이를 만족시키는 경우의 수는 ${}_3H_3\times{}_3H_3=10\times10$이다.

이에 따라, 1번에, 2번에, 3번에, $\cdots$, 6번에를 계산하여 더하면

$$(1\times1)+(5\times5)+(10\times10)+(10\times10)+(5\times5)+(1\times1)$$

이다.

COMMENT 25

Case1) 모두 짝수 : $\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}$

Case2) 짝수 3개, 홀수 1개 : 짝짝짝홀, 짝짝홀짝, 짝홀짝짝. 홀짝짝짝이 가능하므로 $4\times\left(\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\right)$

Case3) 짝수 2개, 홀수 2개 : 짝홀짝홀, 홀짝홀짝이 가능하므로 $2\times\left(\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\right)$

COMMENT 26

기울기가 ±1이 될 때를 찾아야 한다. $0<x<\pi$일 때는 -1일 때.

$$y'=-2\sin x=-1$$

에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{6}$이다. 나머지는 직각이등변으로 처리. 접선 구하지 말고..

COMMENT 27

$\overline{\mathrm{CD}}=2\cos 2\theta$, $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\angle\mathrm{DCE})=2\cos 2\theta\sin\theta$,

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{CD}}\times\cos(\angle\mathrm{DCE})=2\cos 2\theta\cos\theta$이다.

COMMENT 28

$\overline{\mathrm{BP}}=\sin\frac{\theta}{2}$, $\angle\mathrm{PBR}=\frac{\pi+\theta}{2}$, $\angle\mathrm{BPR}=\angle\mathrm{QPC}=\frac{\pi+\theta}{4}$이다.

삼각형 BPR에서 사인법칙.

COMMENT 29

$\overline{\mathrm{AB_1}}=\sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\sqrt{5}a$라 하자.

삼각형 $\mathrm{OB_1C_1}$에서 피타고라스를 돌리면

$$\frac{20}{3}=\left(\frac{\sqrt{15}}{3}+\sqrt{3}a\right)^2+(\sqrt{5}a)^2$$

이다. 풀면 $a=\frac{\sqrt{5}}{4}$이므로 닮음비는 $4:\sqrt{5}$, 공비는 $\frac{5}{16}$이다.

COMMENT 30

$\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{2k}{2n}\right)-g\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right\}\frac{2k}{2n}$는 $\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$로 수렴한다.

COMMENT 31

접점의 x좌표를 u라 하면

$$\begin{cases} t^2\ln(u-t)=(u-a)^2 \\ \frac{t^2}{u-t}=2(u-a) \end{cases}$$

이다. 연립하면 $4(u-t)^2\ln(u-t)=t^2$이고 $t=2e$일 때, $u=4e$, $a=3e$이다.

$$4(u-t)^2\ln(u-t)=t^2 \quad\Rightarrow\quad 8(u-t)\ln(u-t)\times\left(\frac{du}{dt}-1\right)+4(u-t)\left(\frac{du}{dt}-1\right)=2t$$

이므로 $g'(2e)=\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=2e}=\frac{4}{3}$이고,

$$t^2\ln(u-t)=(u-a)^2 \quad\Rightarrow\quad 2t\ln(u-t)+\frac{t^2}{u-t}\left(\frac{du}{dt}-1\right)=2(u-a)\left(\frac{du}{dt}-\frac{da}{dt}\right)$$

이므로 $f'(2e)=\left.\frac{da}{dt}\right|_{t=2e}=0$이다.

COMMENT 32

(가)에서 $f(x)$는 삼차함수이다. (나)에서 곡선 $y=f(x)$의 x절편이 -2이고,

점 $(0,\ f(0))$이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이고 이 변곡점에서의 접선의 x절편이 -10이다.

연립하여 풀면 $f(x)=x^3+x+10$이다.

* $g(t)=t-\dfrac{f(t)}{f'(t)}$이고, $g'(t)=1-\dfrac{\{f'(t)\}^2-f(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2}=\dfrac{f(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^2}$이다.

COMMENT 33

$\lim\limits_{t\to k}g(t)=g(k)+1$을 만족시킬 때는 점 $(k,\ f(k))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점 중 오른쪽 2개 중 하나일 때이다.

만족시키는 k의 값은 $f''(x)=0$의 세 근 중 큰 것 2개인 $a+3-\sqrt{3}$, $a+3+\sqrt{3}$이므로 $a=3$이다.

COMMENT 34

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 (다)에서 $\lim\limits_{t\to\alpha+}h(t)$는 양의 무한대로 발산하며, $f(\alpha)=0$이다.

$f'(\alpha)=0$이고 $\lim\limits_{t\to\alpha-}h(t)$가 존재하므로 삼중근 가지는 그 모양, $f''(\alpha)=0$이고

$t\le\alpha$일 때 $h(t)=t$이므로 $\alpha=-2$이다. $g(x)=k(x+2)^3$이다.

$f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $27k$를 가지므로 $k=-\dfrac{1}{9}$, $g(x)=-\dfrac{1}{9}(x+2)^3$이다.

COMMENT 35

정사각형 ABCD의 네 변이 모두 기울기가 1 또는 -1이므로 네 꼭짓점은 $(5,\ 0)$, $(0,\ 5)$, $(-5,\ 0)$, $(0,\ -5)$이다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$$

이다.