[이주영/한성은 모의고사]

6월 모의고사 연습

이주영

이투스 온라인, 대치 명인학원, 목동 예섬학원, 중계 명인학원, 은평 사과나무

너네 자랑하고 싶은 거 있으면 얼마든지 해 난 괜찮어
왜냐면 나는 부럽지가 않어
이 모의고사 하나면 한 개도 부럽지가 않어 어?

한성은

5A ACADEMY

올해도 다 갔네요.

hansungeun.com/texta.html - 공개 자료 페이지.
smartstore.naver.com/hansungeun - 책 파는 데.
유튜브 한성은 / 인스타 hansungeun2

CCL

수학 영역

5지선다형

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)x$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

2. $\sin\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{6}$의 값은? [2점]

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

3. 방정식 $3^{x+2}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x-4}$을 만족시키는 실수 x의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=ax^2+6x, \quad f(0)=f(1)$$

을 만족시킬 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{6}(k+1)a_k=20,\quad \sum_{k=1}^{6}k(a_k+1)=30$$

일 때, $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

6. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+2$의 극댓값과 극솟값의 차이가 4일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

7. $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식

$$|3\sin 2x-1|=2$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{9\pi}{2}$ ② 5π ③ $\frac{11\pi}{2}$
④ 6π ⑤ $\frac{13\pi}{2}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2 & (x\le 1)\\ x-a & (x>1)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)f(x-b)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, ab의 값을 구하여라. (단 a, b는 양수이다.) [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

9. 곡선 $y=\log_2(ax)$가 두 직선 $x+y=5$, $x+y=8$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$이고 직선 AB의 기울기가 1보다 작을 때, 양수 a의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

10. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_{10}S_{11}\le 0,\quad S_{11}S_{12}\le 0$$

이고 S_n의 최댓값이 60일 때, a_1의 값은? [4점]

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le t \le 4$일 때 $v(t)=(t-1)(t-3)$이다.
> (나) $0 \le t$일 때 $v(t)=v(t+4)$이다.

시각 $t=0$에서 $t=12$까지 점 P의 위치의 변화량을 a, 점 P가 움직인 거리를 b라 할 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

12. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{f(x)}-x^2}{x}=2,\quad \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=2$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

13. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \ge 0) \\ 2-2a_n & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3+a_5=2$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(1)=1$
(나) $\{x \mid f(x) \le |x|\}=\{x \mid -1 \le x \le 1\}$

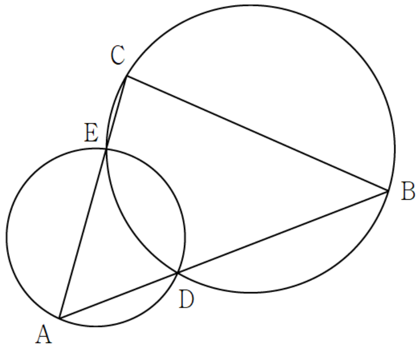
$f(3)$의 값은? [4점]

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

15. 예각삼각형 ABC와 선분 AB 위의 점 D, 선분 AC 위의 점 E에 대하여

$$\overline{\mathrm{AD}}=5,\quad \overline{\mathrm{BD}}=9,\quad \angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{4}$$

이고, 세 점 A, D, E를 지나는 원의 넓이와 네 점 D, B, C, E를 지나는 원의 넓이의 비가 5 : 13일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]



① 49 ② 56 ③ 63 ④ 70 ⑤ 77

단답형

16. $\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2+2x)dx$의 값을 구하여라. [3점]

17. $0<x<y$인 두 실수 x, y에 대하여

$$\log_2 x^2y=0,\quad \log_2 x\times\log_2 y=-8$$

일 때, xy^2의 값을 구하여라. [3점]

18. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{xf(x)-4}{x-2} = 8$$

를 만족시킬 때, $f'(2)$의 값을 구하여라. [3점]

19. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{6} a_n = 42, \quad \sum_{n=1}^{6} |a_n| = 126$$

을 만족시킨다. $|a_1 a_6|$의 값을 구하여라. [3점]

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) = 3g(x) + 6x$
(나) $\int_{2}^{x} f(t)dt = xg(x)$

$f(3)$의 값을 구하여라. [4점]

21. 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=a-f(b-x)$와 실수 t에 대하여 방정식

$$(f(x)-t)(g(x)-t)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 모든 k의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이

$$0,\ 2,\ 8,\ c$$

일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라. [4점]

22. 최고차항의 계수가 양수 k인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|x^2-2x|g(x)=(x^2-2x)\{|f(x)|-4\}$$

를 만족시킨다. $f(0)f(2)>0$이고

$$\{a,\ a+4\}=\{t\,|\,\text{함수 } g(x)\text{가 } x=t\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

일 때, $9(k-a)$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

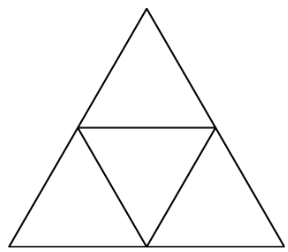
24. 다항식 $(x^2+x)(x+1)^6$의 전개식에서 x^5의 계수는? [3점]

① 26 ② 29 ③ 32
④ 35 ⑤ 38

25. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 2명이 있다. 이 6명을 일렬로 임의로 일렬로 나열할 때, 같은 학년의 학생끼리는 모두 이웃할 확률은? [3점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

26. 그림과 같이 정삼각형과 삼각형의 세 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 정삼각형으로 만들어지는 4개의 영역에 서로 다른 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠하고 이웃한 영역에는 서로 다른 색을 칠할 때 , 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



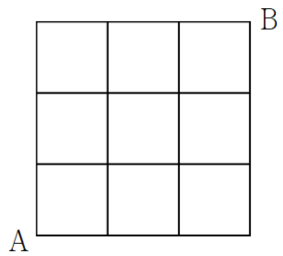
① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

27. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

$f(1) \le f(2)$이거나 $f(3) \le f(4)$이다.

① $\frac{15}{16}$ ② $\frac{55}{64}$ ③ $\frac{25}{32}$ ④ $\frac{45}{64}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

28. 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 갑은 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경로 중 하나를 임의로 선택하여 이동하고, 을은 B지점에서 출발하여 A지점까지 최단거리로 가는 경로 중 하나를 임의로 선택하여 이동한다. 갑과 을이 동시에 출발하고 둘의 속력이 서로 같을 때, 갑과 을이 이동 중에 서로 만날 확률은? [4점]



① $\frac{19}{50}$ ② $\frac{79}{200}$ ③ $\frac{41}{100}$ ④ $\frac{85}{200}$ ⑤ $\frac{11}{25}$

단답형

29. 파란색 공 1개, 빨간색 공 1개, 흰색 공 6개가 있다. 이 8개의 공 중에서 6개를 선택하여 다음 조건을 만족시키도록 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하여라. (단, 흰색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 하나도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 파란색 공을 받은 학생이 받은 흰 색 공의 개수는 1 이하이다.
> (나) 빨간색 공을 받은 학생이 받은 흰 색 공의 개수는 1 이상이다.

30. 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4라 하자. $a_1a_2a_3a_4$가 6의 배수일 때, $a_1a_2a_3$가 6의 배수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+\sqrt{n^2+1}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

24. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\frac{ax-b}{\ln x} & (x\neq 1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, ab의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

25. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n} = 2a_{2n-1}$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 18, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} = 4$$

를 만족시킨다. a_1의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26. 함수 $e^x(x^2+4x+a)$의 극값이 존재하지 않도록 하는 실수 a의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

27. 양수 t에 대하여 $x \geq 0$에서 정의된 함수

$$f(x) = txe^x$$

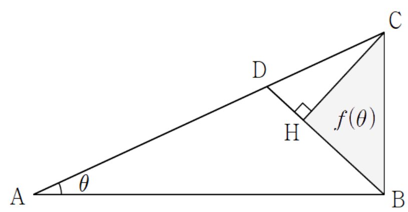
의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $h(t) = g(1)$이라 하자.
$h(\alpha) = 2$일 때, $\alpha \times h'(\alpha)$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ -1

④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 1$, $\angle \mathrm{A} = \theta$, $\angle \mathrm{B} = \frac{\pi}{2}$인 삼각형이 있다. 선분 AC를 2:1로 내분하는 점을 D, 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 BCH의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 4

단답형

29. 좌표평면에서 점 P_1은 $(1,\ 1)$이고, 모든 자연수 n에 대하여 점 P_n은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 P_n은 곡선 $y=x^2$ 위의 점이다.
> (나) 직선 $\mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n}$의 기울기는 -1이다.
> (다) 직선 $\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1}$사이의 기울기는 1이다.

곡선 $y=x^2$ 및 두 선분 $\mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n}$, $\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1}$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}\sum_{k=1}^{n}S_k=b\ (b\neq 0)$$

이다. ab의 값을 구하여라. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|x|e^{-kx}\ (k>0)$$

에 대하여 $h(x)=g(f(x))$이다. 함수 $h(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이

$$0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

라 할 때, $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)\times h(-x)}{x^2}=81$
> (나) $h(\alpha_1)-h(\alpha_2)\geq\dfrac{1}{ke}$

$k\times\alpha_3\times f(8)$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ 0)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$에 대하여 $|\vec{a}-2\vec{b}|$의 값은? [2점]

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

24. 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$에 접하는 기울기 2인 직선의 y절편 중 양수인 것은? [3점]

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

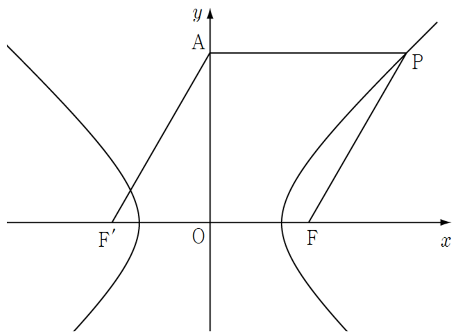
25. 좌표평면 위의 두 점 A(2, 0), B(0, 4)에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$
(나) $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$

$|\overrightarrow{OP}|$의 값을 a라 할 때, 모든 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

26. 그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{2\sqrt{3}} = 1$이 있다. y축 위의 점 A와 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 사각형 F$'$APF가 마름모일 때, a^2의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]

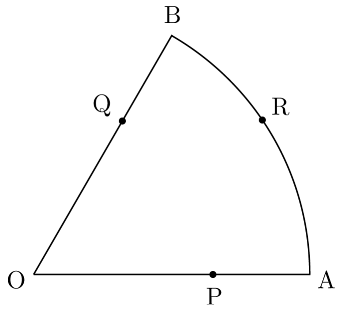


① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB가 있다. 세 점 P, Q, R은 각각 선분 OA, 선분 OB, 호 AB 위를 움직일 때,

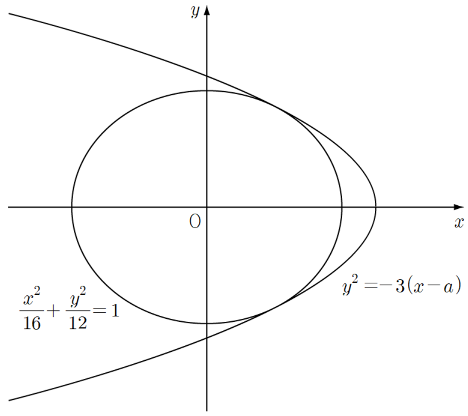
$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이는? [3점]



① $2\sqrt{3}$ ② $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

28. 그림과 같이 포물선 $y^2=-3(x-a)$와 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$이 서로 다른 두 점에서 만난다. a의 값은? (단, $a>4$이다.) [4점]



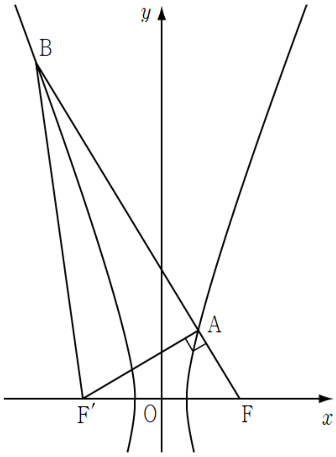
① $\frac{14}{3}$ ② 5 ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ 6

단답형

29. 그림과 같이 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{15}=1$과 점 F을 지나는 직선 l이 두 점 A, B에서 만난다.

$$\angle F'AF=\frac{\pi}{2},\quad 5\overline{FA}=\overline{FB}$$

일 때, $\overline{AB}$의 값을 구하여라. [4점]



30. 좌표평면에서 점 $A(3,\ 3)$과 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{OP}|=2$, $\overrightarrow{OP}\cdot(1,\ 0)\geq 0$
(나) $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ}|=1$, $|\overrightarrow{OQ}|\leq 5$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값을 구하여라. [4점]

[이주영/한성은 모의고사 6월 연습 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	③	03	②	04	①	05	①
06	②	07	⑤	08	⑤	09	③	10	②
11	④	12	①	13	④	14	⑤	15	②
16	16	17	64	18	3	19	128	20	45
21	24	22	13						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	③	24	④	25	①	26	⑤	27	②
28	③	29	160	30	591				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	③	24	①	25	②	26	⑤	27	④
28	③	29	16	30	200				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	⑤	25	③	26	④	27	②
28	②	29	12	30	164				

COMMENT 09

점 A를 x축의 방향으로 2, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이 점 B이다.
이는 로그의 그래프와는 무관하다.

COMMENT 11

$a=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$

$b=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$

COMMENT 12

$f(x)=x^4+ax^3+\cdots$인 각이다.

$$\frac{\sqrt{f(x)}-x^2}{x}=\frac{f(x)-x^4}{x\{\sqrt{f(x)}+x^2\}}=\frac{ax^3+\cdots}{x\sqrt{x^4+\cdots}+x^3}$$

는 $\frac{a}{2}$로 수렴하므로 $a=4$이다.

$f(0)=0$인 각이다. $f(x)=\cdots+bx$라 하면

$$\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{\cdots+bx}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{\cdots+b}-1}{x}$$

이므로 $b=1$인 각이다. $f(x)=\cdots+cx^2+x$라 하면

$$\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{\cdots+cx+1}-1}{x}=\frac{\cdots+c}{\sqrt{\cdots+1}+1}$$

은 $\frac{c}{2}$로 수렴하므로 $c=4$이다. $f(x)=x^4+4x^3+4x^2+x$이다.

COMMENT 13

$a_3=a$라 하자. a_4의 값은 $a-2$ 또는 $2-2a$이고 a_5의 값은 $a-4$ 또는 $4-2a$ 또는 $-2a$ 또는 $4a-2$이다.
(불가능한 경우가 있더라도 일단 계산 때리고 나중에 조건에 맞는지 체크하는 것이 편하다.)

$$a+(a-4)=2,\ a+(4-2a)=2,\ a+(-2a)=2,\ 2+(4a-2)=2$$

에서 a의 값은 각각 3, 2, -2, $\frac{1}{2}$이고 이 중 조건을 만족시키는 것은 3과 -2이다.

잘 거슬러 올라가보면 a_1의 값으로 가능한 수는 7, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, 2이다.

COMMENT 14

두 함수 $y=f(x)$, $y=|x|$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$에서 만나야 한다.
$f(-1)=1$, $f(1)=1$이고 $f(x)=x$가 $x=1$을 삼중근으로 가져야 한다.
$f(x)=(x-1)^3(x-a)+x$에서 $f(-1)=1$을 얹어주면, $a=-\frac{3}{4}$이다. $f(x)=(x-1)^3\left(x+\frac{3}{4}\right)+x$이다.

COMMENT 15

$\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 하자. 원에 내접하는 사각형에서 $\angle\mathrm{AED}=\frac{\pi}{4}$이다.

삼각형 ADE에서 사인법칙을 돌리면 $\overline{\mathrm{DE}}=5\sqrt{2}\sin\theta$이고, 작은 원의 반지름의 길이는 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$이다.

넓이 비에서 큰 원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{130}}{2}$이고 $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{65}$이다.

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 돌리면 $\overline{\mathrm{BC}}=8\sqrt{2}$이다.

COMMENT 20

$$\int_2^x \{3g(t)+6t\}dt = xg(x)$$

에서 $g(2)=0$이고 미분하여 $2g(x)+6x=xg'(x)$에서 $g(x)=ax^n+\cdots$라 하면 $n=2$이다.
$g(x)=ax^2+bx+c$로 두고 다시 대입하면 $g(x)=ax^2-6x$이다. $g(2)=0$이므로 $g(x)=3x^2-6x$이다.

COMMENT 21

$y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 $\left(\frac{b}{2},\ \frac{a}{2}\right)$에 대하여 점대칭 시킨 것이다.
$h(t)$가 불연속이 뜰 때는 두 그래프가 만날 때거나 t값이 점근선의 y값일 때다.
두 함수의 그래프를 째려보면 $f(1)=g(1)=2$, $f(3)=g(3)=8$, $a=c$임을 알 수 있다.
두 점 $(1,\ 2)$, $(3,\ 8)$이 점 $\left(\frac{b}{2},\ \frac{a}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로 $b=4$, $a=10$이다.

COMMENT 22

x^2-2x의 부호를 고려하면,

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-4 & (x<0 \text{ 또는 } 2\le x) \\ -|f(x)|+4 & (0\le x<2) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 연속이려면 $|f(0)|=|f(2)|=4$이다.

이 때, $f'(0)\neq 0$이면 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하지 않고,
$f'(2)\neq 0$이면 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하지 않다.
함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 값이 2개이고 간격이 4이므로

$\{a,\ a+4\}\neq\{0,\ 2\}$

이다. 따라서 $f'(0)=0$ 또는 $f'(2)=0$이다.
$f'(0)=0$과 $f'(2)=0$ 중에서 하나만을 만족시킬 때, 나머지 미분불가능한 x값은
함수 $|f(x)|$가 미분불가능할 때이다. 이 때는 하나가 아니라 2개가 더 떠서 모순이다.

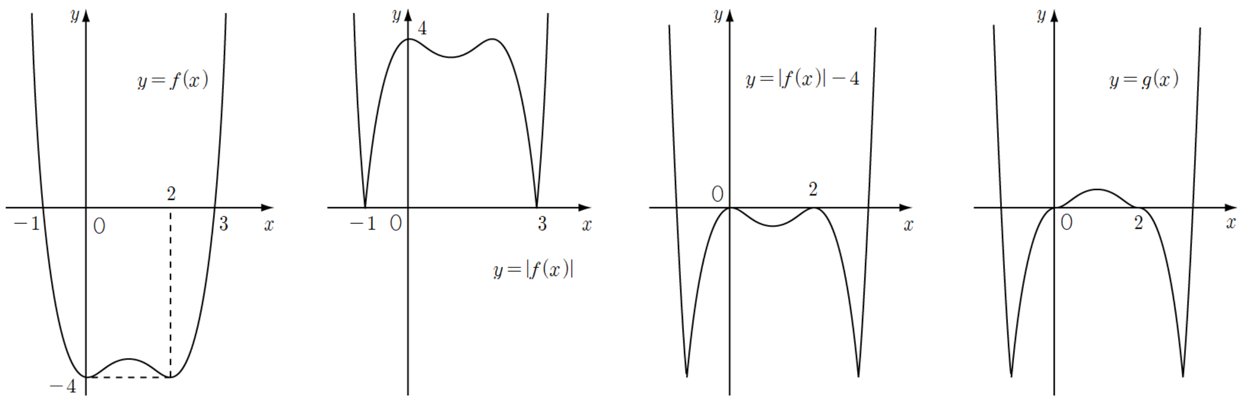
* 방정식 $f(x)=0$이 삼중근을 갖는 모양은 $f(0)f(2)>0$를 만족시킬 수 없다.

따라서 $f'(0)=f'(2)=0$이다. 개형을 따져보면

$f(x)=kx^2(x-2)^2-4$

만 남는다. a와 $a+4$는 $f(x)=0$의 근이므로 $a=-1$이고 $k=\frac{4}{9}$이다.

* 헷갈리라고 낸 문항이다. 아래 그래프들을 살펴보자.



COMMENT 확률과 통계 29

Case1) 흰 공 6개 선택 : ${}_{3}\mathrm{H}_{6}=28$

Case2) 파란 공 1개, 흰 공 5개 선택 : $3\times({}_{2}\mathrm{H}_{5}+{}_{2}\mathrm{H}_{4})=33$

Case3) 빨간 공 1개, 흰 공 5개 선택 : $3\times{}_{3}\mathrm{H}_{4}=45$

Case4) 파란 공 1개, 빨간 공 1개, 흰 공 4개 선택

Case4-1) 파란 공과 빨간 공을 같은 학생에게 : $3\times{}_{2}\mathrm{H}_{3}=12$

Case4-1) 파란 공과 빨간 공을 다른 학생에게 : $3\times2\times({}_{2}\mathrm{H}_{3}+{}_{2}\mathrm{H}_{2})=42$

COMMENT 확률과 통계 30

$a_1a_2a_3$를 살펴보면,

① $a_1a_2a_3$가 2의 배수가 아니고 3의 배수가 아닌 확률은 $\dfrac{8}{6^3}$

② $a_1a_2a_3$가 2의 배수이고 3의 배수가 아닌 확률은 $\dfrac{56}{6^3}$

③ $a_1a_2a_3$가 2의 배수가 아니고 3의 배수일 확률은 $\dfrac{19}{6^3}$

④ $a_1a_2a_3$가 6의 배수일 확률은 $\dfrac{133}{6^3}$

이다. 따라서 $a_1a_2a_3a_4$가 6의 배수일 확률은

$$\frac{8}{6^3}\times\frac{1}{6}+\frac{56}{6^3}\times\frac{2}{6}+\frac{19}{6^3}\times\frac{3}{6}+\frac{133}{6^3}\times\frac{6}{6}=\frac{975}{6^4}$$

이다. 구하는 확률은 $\dfrac{266}{325}$이다.

COMMENT 미적분 27

$h(t)=g(1)$에서 $f(h(t))=1$이다.

$$t\times h(t)\times e^{h(t)}=1$$

이다. $h(\alpha)=2$에서 $\alpha=\dfrac{1}{2e^2}$이고, 미분하면

$$h(t)+e^{h(t)}+th'(t)e^{h(t)}+th'(t)h(t)e^{h(t)}=0$$

에 잘 대입해라.

COMMENT 미적분 28

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하자. $\overline{\mathrm{DM}}=\dfrac{2}{3}\tan\theta$, $\overline{\mathrm{MB}}=\dfrac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{\dfrac{4}{9}\tan^2\theta+\dfrac{1}{9}}$ 이다.

삼각형 BDM과 삼각형 CBH가 서로 닮음이고 닮음비는 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{\dfrac{4}{9}\tan^2\theta+\dfrac{1}{9}}:\tan\theta$이다. 삼각형 BDM의 넓이가 $\dfrac{1}{9}\tan\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{9}\tan\theta\times\frac{\tan^2\theta}{\dfrac{4}{9}\tan^2\theta+\dfrac{1}{9}}$$

이다.

COMMENT 미적분 29

$P_2(-2,\ 4)$, $P_3(3,\ 9)$, $P_4(-4,\ 16)$, $\cdots$이다. 딱 봐도 P_n의 x좌표가 $(-1)^{n+1}\times n$인 각이다.
S_n은 곡선 $y=x^2$와 선분 $P_{2n}P_{2n+1}$으로 둘러싸인 도형의 넓이에서
곡선 $y=x^2$와 선분 $P_{2n-1}P_{2n}$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것이다.

곡선 $y=x^2$와 선분 $P_{2n}P_{2n+1}$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{6}(4n+1)^3$,

곡선 $y=x^2$와 선분 $P_{2n-1}P_{2n}$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{6}(4n-1)^3$

이므로

$$S_n=\frac{1}{6}(4n+1)^3-\frac{1}{6}(4n-1)^3=16n^2+\cdots$$

이고 $\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{16}{3}n^3+\cdots$이다. 따라서, $a=3$, $b=\frac{16}{3}$이다.

COMMENT 미적분 30

$f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0을, $x=\frac{1}{k}$에서 극댓값 $\frac{1}{ke}$을 가진다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)\times h(-x)}{x^2}=-\lim_{x\to 0+}\left\{\frac{h(x)}{x}\times\frac{h(-x)}{-x}\right\}$$

에서 $h(0)=0$이고 좌미분계수와 우미분계수의 곱이 음수이므로
$h(x)$는 $x=0$에서 미분불가능, 좌미, 우미의 절댓값은 9이다.

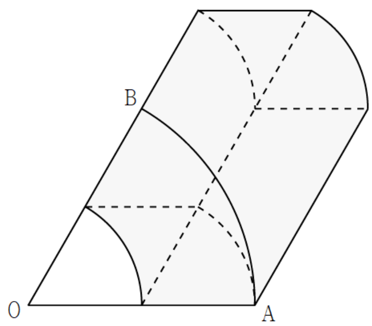
$h(\alpha_1)-h(\alpha_2)\geq\frac{1}{ke}$에서 $f(x)$의 극대, 극솟값을 째려보면, $h(\alpha_1)=\frac{1}{ke}$, $h(\alpha_2)=0$인 각이다.

$h(\alpha_2)=0$에서 $f(\alpha_2)=0$이므로 $f(x)=x(x-\alpha_2)^2$이다. 미분계수 째려보면 $\alpha_2=3$이다.

$\alpha_1=1$이고 $h(1)=g(f(1))=g\left(\frac{1}{k}\right)$에서 $\frac{1}{k}=4$이다.

따라서, $k=\frac{1}{4}$, $\alpha_3=4$, $f(x)=x(x-3)^2$이다.

COMMENT 기하 27



COMMENT 기하 28

제1사분면의 접점을 $(\alpha,\ \beta)$라 하자.

$$\frac{\alpha^2}{16}+\frac{\beta^2}{12}=1,\quad \beta^2=-3(\alpha-3),\quad -\frac{3}{2\beta}=-\frac{12\alpha}{16\beta}\text{(기울기)}$$

에서 $\alpha=2$, $\beta=3$, $a=5$이다.

COMMENT 기하 29

$\overline{\mathrm{FA}}=x$라 하자. $\overline{\mathrm{F'A}}=x+2a$, $\overline{\mathrm{FB}}=5x$, $\overline{\mathrm{F'B}}=5x-2a$이다.

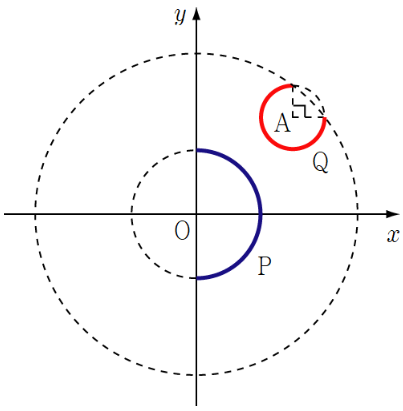
직각삼각형 $\mathrm{F'AB}$에서 $(x+2a)^2+(4x)^2=(5x-2a)^2$이므로 $x=3a$이고,

직각삼각형 $\mathrm{FAF'}$에서 $\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{34}a$이다.

쌍곡선의 $a^2+b^2=c^2$에서 $a^2+\frac{15}{2}=\left(\frac{\sqrt{34}a}{2}\right)^2$이므로 $a=1$이다.

COMMENT 기하 30

두 점 P, Q의 자취는 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$가 최대일 때, 점 Q가 $(4,\ 3)$ 또는 $(3,\ 4)$일 때 얻을 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 방향을 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$와 같게 할 수 있으므로, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값은 $5\times2=10$이다.

아래 그림을 째려보면 점 Q의 위치와 관계 없이 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 $(0,\ -2)$일 때 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 최소임을 알 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ -2)$로 고정하고,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

에서 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$를 $(0,\ -1)$로 잡아야 최소각이 뜬다. 최솟값은 $(0,\ -2)\cdot(3,\ 4)=-8$이다.