

# [니네가 만든 모의고사]

| 한성은 & 5A수학학원(2023) |

## | 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

5A수학학원 학생들이 출제, 제가 수정/검수한 문항들입니다.

문항마다 번호(난이도)를 포함한 코멘트를 달았습니다.

문항에서 이용된 공부할만한 소재에 밑줄을 쳐 놨어요.

## | 한동훈 (KAIST)

5A ACADEMY

5A수학학원 클리닉 선생님입니다.

동훈 쌤이 고등학생일 때 제가 가르쳤어요.

그 때는 똑똑했는데.

출제 학생 명단입니다.

[백석고 광재호], [운정고 권도은], [안곡고 김승래], [저현고 김정현], [백신고 김한수],

[백석고 박유찬], [백석고 서지호], [화수고 신준], [백마고 이지민] [백석고 임찬영],

[백신고 최민서], [상산고 최세영]

1번~4번은 수학1, 5번~8번은 수학2, 9번~10번은 확통, 11번~14번은 미적분입니다.

## | CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

[백석고 박유찬]

1. 수열  $\{a_n\}$ 은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = 2n - 1$$

을 만족시킨다.  $\sum_{k=1}^{10} a_k = 325$ 일 때,  $a_1$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3
- ④ 4                      ⑤ 5

[백마고 이지민]

2. 공차가 자연수인 등차수열  $\{a_n\}$ 과 자연수  $m$ 이

$$\sum_{k=1}^{2m} a_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{2m} |a_k| = 392$$

를 만족시킬 때,  $a_{2m}$ 의 최솟값을 구하여라.

[한성은의 점수]

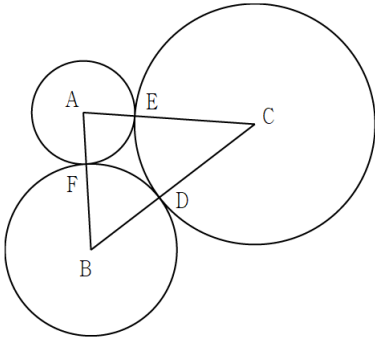
쉬운 4점, 9번~10번. 지금은 교과서에 없는  
계차수열. 점화식 풀이  
가 강하게 들어와서 어렵지만 한 번쯤 다뤄볼만.

[한성은의 점수]

11번~13번. 깔끔한 등차수열의 합 문항.  
약수 종류로 케이스 분류해야 하는 기출 문항은  
[2022학년도 9월 13번]이 있다.

[진산과고 한동훈]

3. 그림과 같이 어느 두 원도 서로 외접하는 세 원의 중심을 각각 A, B, C라 하고 세 원과 선분 BC, CA, AB의 교점을 각각 D, E, F라 하자.  $\overline{AB}=8$ ,  $\overline{BC}=12$ ,  $\overline{CA}=10$ 일 때,  $\overline{EF}$ 의 값은?



- ①  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
- ②  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$
- ③  $\frac{3\sqrt{7}}{2}$
- ④  $3\sqrt{2}$
- ⑤  $\frac{9}{2}$

[한성은의 점수]

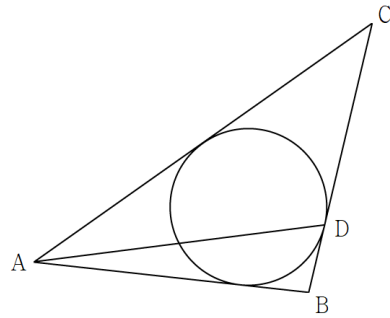
쉬운 4점. 9번~10번. 세 원의 반지름의 길이를 구하지 못하거나 코사인법칙이 떠오르지 않으면 수능 점수의 큰 위기이다.

[윤정교 권도은]

4. 삼각형 ABC에 내접하는 원과 선분 BC의 교점을 D라 하자.

$$\overline{AB}=4, \overline{AC}=6, \overline{AD}=3\sqrt{2}$$

일 때,  $\overline{BD}$ 의 값은? (단,  $\overline{BC}>3$ 이다.)



- ①  $\frac{2}{3}$
- ②  $\frac{5}{6}$
- ③ 1
- ④  $\frac{7}{6}$
- ⑤  $\frac{4}{3}$

[한성은의 점수]

11번~13번. 좋은 문제. 밖으로 돌리는 것도 봐줄 만 하고, 코사인법칙을 때리면 삼차식이 나오는 것이 묘하게 어색(신선)해서 재미있었다.  
\* 원본은 풀다 뒤지라는 수준으로 복잡했다. 풀이 과정을 1/3 정도로 줄인 것이다.

[백신교 김한수]

5. 최고차항의 계수가  $\frac{1}{4}$ 인 사차함수  $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{x-u}{\int_u^x |f'(t)| dt}$$

의 값이 존재하지 않도록 하는 실수  $u$ 의 값이  $\alpha$ ,  $\beta(\alpha < \beta)$  뿐이고  $f(\beta) - f(\alpha) = \frac{4}{3}$ 이다.  $f'(0) = -9$ 일 때,  $f'(6)$ 의 값을 구하여라.

[저현교 김정현]

6. 최고차항의 계수가 1인 사차함수  $f(x)$ 와 실수  $t$ 에 대하여 함수  $g(x) = |f(x)|$ 와 집합

$$S = \{x \mid g(x) = t\}$$

의 원소의 개수  $h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $\lim_{x \rightarrow a^+} g'(x) \times \lim_{x \rightarrow a^-} g'(x) \leq 0$ 이 되도록 하는 모든 실수  $a$ 의 값의 합은 14이다.  
 (나) 함수  $h(t)$ 가  $t=0$ 과  $t=8$ 에서만 불연속이다.

$h(9) + 1 < h(0)$ 일 때,  $f(6)$ 의 값을 구하여라.

[한성은의 점수]

13번. 정적분으로 정의된 함수의 미분을 이용하여  $f'(u) = 0$ 을 어렵게 적어냈다.  $f(\beta) - f(\alpha)$ 의 값에서  $\beta - \alpha$ 의 값을 구할 수 있어야 한다.  $f(x)$ 에서 비율관계 쳐도 좋고,  $y = f'(x)$ 의 그래프와  $x$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이로 봐도 좋다.  
 \* 문항이  $f(x)$ 가 아니라  $f'(x)$ 에서 만들어졌다.

[한성은의 점수]

어려운 13번 또는 아주 쉬운 22번. 근의 개수로 그래프 개형 찾는 문항이야 많이 봐 왔을 것이고, (가)에서 좌/우미분계수(같은 것) 관련된 조건 읽는 것도 연습해 둘 만 하다.  $y$ 값 차이를  $x$ 값 차이로 둘러싸면 인수를 이용한 식의 구성이 필요하다.

[상산고 최세영]

7. 양수  $a$ 와 함수  $f(x)$ 가  $x \leq a$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x) = x^2(a-x), \quad f(x) + f(2a-x) = 0$$

를 만족시킨다. 모든 자연수  $n$ 에서  $a_n < a_{n+1}$ 인

수열  $\{a_n\}$ 과 함수  $g(x) = \int_b^x |f'(t)|dt$ 에 대하여 함수

$$h(x) = \sum_{k=1}^4 |g(x) - a_k|$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.  $a_1 = -4$ 이고  $a_3 = 8$ 일 때,  $ab \times a_4$ 의 값을 구하여라.

[백석고 광재호]

8.  $f'(x) = 0$ 의 세 실근이 등차수열 이루고 최고차항의 계수가 양수인 사차함수  $f(x)$ 와 양수  $k$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식  $f'(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.

(나)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)f(x-k)}{(x-2)^3}$ 의 값이 존재한다.

$f(k)$ 의 값을 구하여라.

[한성은의 점수]

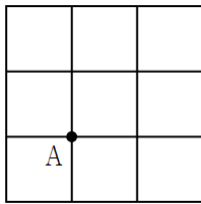
13번 또는 20번. 대칭성을 나타낸 식임을 알고 있어야 하고,  $g(x)$ 에서 정적분으로 정의된 함수,  $x$ 축 결정,  $|f'(x)|$ 의 적분의 세 가지 요소가 모두 공부할 만 하다. 그 외에  $a_k$ 가 될 수 있는 값이 4개 뿐인 것을 잡아내야 한다. 짜맞추는 재미가 있는 문항.

[한성은의 점수]

약간 쉬운 22번. 핵심이 되는 출제 요소는 (특이한) 사차함수의 개형을 깔고 합성함수가 포함된 방정식의 근의 개수,  $n$ 축이 쓰임직 하다. (나)에서,  $f(x) = 0$ 와  $f'(x) = 0$ 이 모두 삼중근이 나올 수 없음에서부터 풀어나가야 한다.

[백석고 임찬영]

9. 그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1km인 바둑판 모양의 도로망이 있다. A지점에서 출발하여 이 도로망을 따라 6km를 이동하여 다시 A지점으로 돌아오는 경우의 수를 구하여라. (단, 이동방향은 교차로에서만 바꿀 수 있으며, 한 번 지난 도로를 다시 지날 수 있다.)



[백석고 서지호]

10. A, B, C, D, E를 포함한 10명을 5명씩 2개의 조를 만들고 각 조의 대표를 1명씩 정할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하여라.

- (가) A와 D는 같은 조에 편성된다.  
 (나) 각 조의 대표는 모두 A, B, C, D, E 중에서 뽑는다.

[한성은의 점수]

28번~29번. 조건이 꽤 재미있다. 풀이에 따라 다르겠지만 해설 기준으로 하면, 여사건 발라내는 것도 공부가 되고 (일부가) 같은 것이 있는 순열로 처리되는 것도 재미있다.

[한성은의 점수]

27번. 조 편성은 분할/분배라 직접 출제범위는 아니다. 해야 되는 것은 알고 있지? 이런 문제는 항상 그렇듯, 기준 잡는 방법에 따라 난이도가 달라진다. 당장 출제자도 좀 어렵게 풀었더라구.

[안곡고 김승래]

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 의 역함수  $g(x)$ 가

$$g(4) = 0, \quad g'(4) = \frac{2}{3}, \quad \int_0^4 g(x) dx = -\frac{5}{2}$$

를 만족시킨다.  $f(4)$ 의 값을 구하여라.

[백신교 최민서]

12. 자연수  $n$ 에 대하여 함수  $f_n(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $0 \leq x \leq n$ 일 때  $f_n(x) = \sin \pi x$ 이다.
- (나) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f_n(x) = f_n(x+n)$ 이다.

$x$ 에 대한 방정식  $\int_0^x f_n(t) dt = \frac{4}{\pi}$ 의 서로 다른 실근의

개수를  $g(n)$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n g(k)$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{8}$
- ②  $\frac{1}{4}$
- ③  $\frac{1}{2}$
- ④ 1
- ⑤ 2

[한성은의 점수]

26번~27번. 기울기는 역함수의 미분법으로 처리하는 것이 어렵지 않았을 듯. 넓이를 돌려 그려놓고 보면,  $x$ 절편 설정이 필요하고, 두 식을 연립하여 계산하는 과정이 꽤 괴롭다. 재미있기도 하고.

[한성은의 점수]

어려운 27번, 쉬운 28번.  $f_n(x)$ 와  $\int_0^x f_n(t) dt$ 를 그리고  $g(n)$ 을 구할 때, **홀짝 케이스 분류**가 필요했다. 여기까지가 재미있었음.  $\sum_{k=1}^n g(k)$ 은 케이스별로 계산해야 해서 좀 귀찮아.



[저현고 김정현]

13. 함수  $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ 와 자연수  $n$ 에 대하여

$$g(x) = \int_0^x |f'(t)|dt, \quad h(n) = \int_0^n g(2t)dt$$

이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n h(k)}{n^a} = b \quad (b \neq 0)$$

일 때,  $ab$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{2}$                       ② 1                      ③  $\frac{3}{2}$   
 ④ 2                          ⑤  $\frac{5}{2}$

[화수고 신준]

14. 함수  $f(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$ 와 최고차항의 계수가 음수인 사차함수  $g(x)$ 에 대하여 함수  $h(x)$ 가

$$h(x) = |f(g(x))|$$

이다. 방정식  $h(x) = 0$ 의 모든 실근이  $a, 0, 3, b, c$ 이고 함수  $h(x)$ 가  $x = k$ 에서 미분가능하지 않은 모든  $k$ 의 값이  $a, b, c$ 일 때,  $|g(6)|$ 의 값을 구하여라.  
 (단,  $a < 0 < 3 < b < c$ )

[한성은의 점수]

쉽게 출제된 28번.

$$\int_0^x |f'(t)|dt \text{ 나 } \int_0^n g(2t)dt$$

는 다뤄볼 만 하다.  $|f'(x)|$ 를 적분하는 것은 자주 보이는 소재고,  $g(2x)$ 의 적분은 헛갈리기 좋다. 아주 특별한 것은 없지만 함수가 3중으로 정의되어 있고 시그마까지 시키고 있으니 답까지 가려면 기본기가 좀 필요하다.

[한성은의 점수]

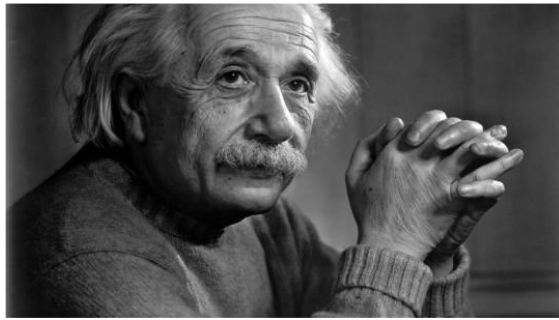
유치하게 출제된 30번. 소재를 분류하면

함성함수의 개형과 미분가능성

이다. 미분가능성은 대충 [거길 지나가면 꺾인다.]

정도로 처리될 것이고,  $n$ 축 등 함성함수 문항을

좀 다뤄봤으면 무난했을 듯.



저는 천재가 아닙니다.  
그저 \_\_\_\_\_ 입니다.

**니들이 별거아닐 뿐**

## [2023 니네가 만든 모의고사 정답표]

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	27	03	③	04	③	05	45
06	136	07	72	08	18	09	326	10	300
11	50	12	②	13	④	14	48		

## COMMENT 01

축차대입 돌리면

$$a_n = a_1 + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) = a_1 + (n-1)^2$$

이고

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10a_1 + \sum_{k=1}^9 k^2 = 10a_1 + 285$$

이다.

\* 약간 점화식, 계차수열의 요소가 있지만 대충 풀자.

## COMMENT 02

$a_m + a_{m+1} = 0$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{2m} |a_k| = -2 \sum_{k=1}^m a_k = 2 \times \left( \frac{1}{2}d + \frac{3}{2}d + \frac{5}{2}d + \dots + \frac{2m-1}{2}d \right) = m^2d$$

이다.  $m^2d = 392 = 2^3 \times 7^2$ 에서  $m$ 의 값은 1, 2, 7, 14가 가능하다.

대응되는  $a_{2m}$ 의 값은 각각 196, 147, 56, 27이다.

## COMMENT 03

세 원의 반지름의 길이를 각각  $r_1, r_2, r_3$ 라 하면  $2(r_1 + r_2 + r_3) = 30$ 이므로  $r_1 = 3, r_2 = 5, r_3 = 7$ 이다.

삼각형 ABC에서  $\cos(\angle CAB) = \frac{1}{8}$ 이므로  $\overline{EF} = \sqrt{3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \frac{1}{8}}$ 이다.

## COMMENT 04

원과 선분 CA의 교점을 E, 원과 선분 AB의 교점을 F라 하자.

$\overline{BD} = a$ 라 하면,  $\overline{BF} = a, \overline{AF} = 4-a, \overline{AE} = 4-a, \overline{CE} = a+2, \overline{CD} = a+2$ 이다.

$$\cos(\angle ADB) = \frac{(3\sqrt{2})^2 + a^2 - 4^2}{2 \times 3\sqrt{2} \times a} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + (a+2)^2 - 6^2}{2 \times 3\sqrt{2} \times (a+2)}$$

에서  $a^3 + 3a^2 - 6a + 2 = 0$ 이므로  $a = 1$ 이다.

\* 방정식  $a^3 + 3a^2 - 6a + 2 = 0$ 의 근  $-2 + \sqrt{6}$ 는  $\overline{BC} > 3$ 를 만족시키지 않는다.

## COMMENT 05

$g(x) = \int_u^x |f'(t)| dt$ 라 할 때,  $\lim_{x \rightarrow u} \frac{x-u}{\int_u^x |f'(t)| dt}$ 는  $g'(u) = |f'(u)| \neq 0$ 이면  $\frac{1}{g'(u)}$ 이다.

이 값이 존재하지 않을 때는  $|f'(u)| = 0$ 일 때다.  $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 곡선  $y = f'(x)$ 는  $x$ 축과 두 점에서 만난다. 곡선  $y = f'(x)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가

$\frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4 = \frac{4}{3}$ 이므로  $\beta - \alpha = 2$ 이다.  $f'(0) = -9$ 을 없으면  $f'(x) = (x-1)(x-3)^2$ 이다.

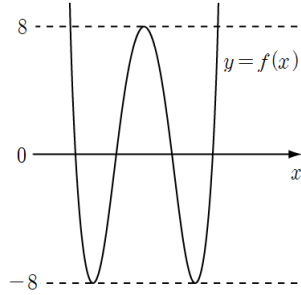
## COMMENT 06

함수  $f(x)$ 는 극값으로  $-8$  또는  $0$  또는  $8$ 을 가질 수 있다.

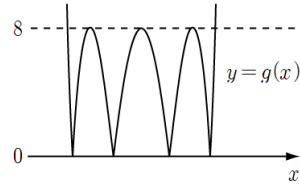
대충  $h(9)=2$ 인 각이므로  $3 < h(0)$ 에서  $h(0)=4$ 이다.  $f(x)$ 는 두 극소점의 함수값이 모두  $-8$ , 극댓값이  $8$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow a^+} g'(x) \times \lim_{x \rightarrow a^-} g'(x) \leq 0$ 는  $g(x)$ 가  $x=a$ 에서 첨점 또는 극점일 때이므로  $a$ 는 7개이고  $f(x)$ 가 극대인  $x$ 값(평균)은 2이다.

[그림1]과 [그림2] 참고. 대충  $k(x)=(x-a)^2(x+a)^2$ 에서  $k(0)=a^4$ 이므로  $f(x)=x^2(x-4)^2-8$ 인 각이다.



[그림1]



[그림2]

## COMMENT 07

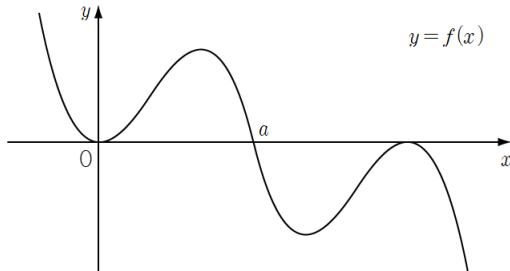
[그림1]은  $y=f(x)$ 의 그래프, [그림2]는  $y=g(x)$ 의 그래프이다.

함수  $h(x)$ 가 미분가능하려면 네 함수  $|g(x)-a_1|, |g(x)-a_2|, |g(x)-a_3|, |g(x)-a_4|$ 가 모두 미분가능해야 한다.

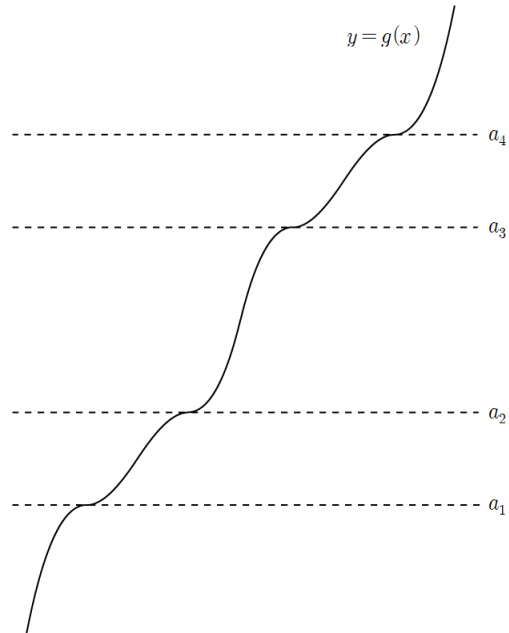
네 수  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 는 모두  $g(x)$ 의  $g'(x)=0$ 일 때의 함수값이다.

$a_3 - a_1 = 12$ 에서  $f(x)$ 의  $x \leq a$ 인 부분의 극댓값과 극솟값의 차이가 4이므로  $a=3$ 이다.

$a_2 = 0$ 이므로  $b=2, a_4 = a_3 + 4 = 12$ 이다.



[그림1]



[그림2]

## COMMENT 08

$f'(x)=0$ 의 세 근을  $a, b, c$ 라 하자. (단,  $a < b < c$ )

$f'(f(x))=0$ 의 근이 5개  $f(x)$ 의 두 극소점의 함숫값이  $b$ , 극댓값이  $c$ 이다.

방정식  $f'(x)=0$ 은 중근을 가지지 않고  $f(x)=0$ 은 삼중근 또는 사중근을 가지지 않는다.

따라서  $f'(2)=0$ 인데,  $a=2$  또는  $b=2$ 이면  $f(x)=0$ 의 실근이 존재하지 않으므로  $c=2$ 이다.

방정식  $f(x)=0$ 이 중근을 가지므로  $b=0$ ,  $f(x)=\frac{1}{8}(x-2)^2(x+2)^2$ 이다.

또, 방정식  $f(x)=0$ 이 중근  $2-k$ 를 가지므로  $k=4$ 이다.

## COMMENT 확률과 통계 09

Case1)  $\uparrow \uparrow \uparrow \downarrow \downarrow \downarrow$ 를 나열하는 경우의 수 : 13

전체 경우의 수  $\frac{6!}{3!3!}$ 에서  $\uparrow \uparrow \uparrow \downarrow \downarrow \downarrow$ ,  $\downarrow \downarrow \downarrow$ 로 시작하는 경우의 수 4,  $\downarrow \uparrow \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow$ ,  $\uparrow \downarrow \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow$ 을 뺀다.

Case2)  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow$ 을 나열하는 경우의 수 : 13

Case3)  $\uparrow \uparrow \downarrow \downarrow \rightarrow \leftarrow$ 을 나열하는 경우의 수 : 150

$\uparrow \uparrow \downarrow \downarrow$ 을 잘 배열하는 경우의 수 5,  $\rightarrow$ 을 끼워넣는 경우의 수 5,  $\leftarrow$ 을 끼워넣는 경우의 수 6을 곱한다.

Case4)  $\uparrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \leftarrow \leftarrow$ 을 나열하는 경우의 수 : 150

## COMMENT 확률과 통계 10

A, B, C, D, E를

Case1) 1/4로 나눌 때 :  ${}_3C_1 \times 1 \times 4 \times {}_5C_4 = 60$

Case2) 2/3으로 나누고 A와 D가 2에 속할 때 :  $2 \times 3 \times {}_5C_3 = 60$

Case2) 2/3으로 나누고 A와 D가 3에 속할 때 :  ${}_3C_2 \times 2 \times 3 \times {}_5C_3 = 180$

## COMMENT 미적분 11

$f(0)=4$ ,  $f'(0)=\frac{3}{2}$ 이므로  $f(x)=x^3+ax^2+\frac{3}{2}x+4$ 이다.  $f(k)=0$ 이라 할 때,

$$\int_k^0 f(x)dx = \frac{5}{2}$$

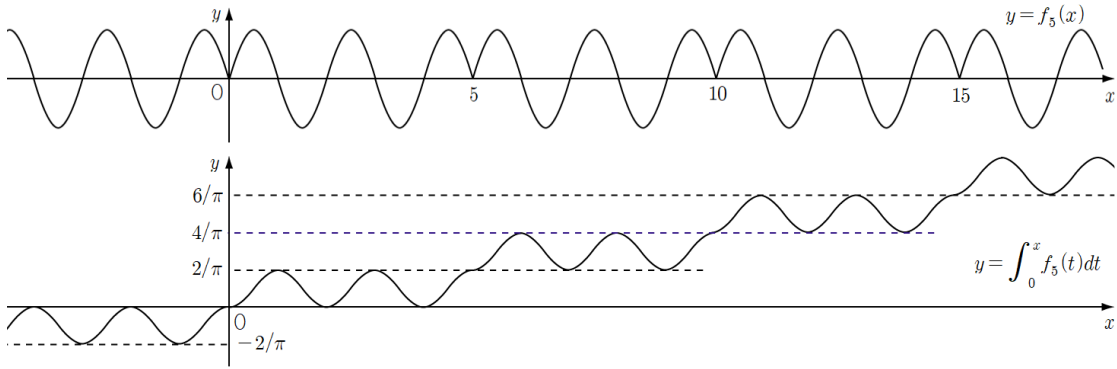
이다. 연립하여 풀면  $k=-1$ ,  $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+4$ 이다.

\*  $a$ 를 소거하고  $k$ 에 대한 사차방정식을 풀어야 한다.

## COMMENT 미적분 12

$n$ 이 짝수일 때,  $f_n(x) = \sin \pi x$ 이므로  $\int_0^x f_n(t) dt$ 의 최댓값은  $\frac{\pi}{2}$ 이다.

$n$ 이 홀수일 때, 아 설명하기 귀찮은데,  $n=5$ 일 때를 그려보면  $g(5)=5$ 임을 알 수 있다.



따라서,

$$g(n) = \begin{cases} n & (n \text{이 홀수}) \\ 0 & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^n g(k) = \begin{cases} \frac{n^2 + 2n + 1}{4} & (n \text{이 홀수}) \\ \frac{n^2 + 2n}{4} & (n \text{이 짝수}) \end{cases} \text{이다.}$$

## COMMENT 미적분 13

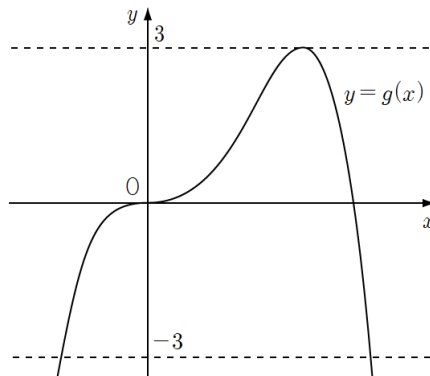
$$h(n) = \frac{1}{2} \int_0^{2n} g(t) dt = \frac{1}{2} \times 2n \times 2n = 2n^2$$

$$\sum_{k=1}^n h(k) = \sum_{k=1}^n 2k^2 = 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{2}{3}n^3$$

## COMMENT 미적분 14

$h(x)=0$ 이면  $|g(x)|=0$  또는  $|g(x)|=3$ 이므로  $g(x)$ 의 값은  $-3$  또는  $0$  또는  $3$ 이다.

또,  $x=0$ 과  $x=3$ 에서  $h(x)$ 가 미분가능하므로  $g(x)$ 는 다음 그림과 같은 각이다.



귀찮으니 비율관계로 가자.  $b=4$ 이고  $g(x) = mx^3(x-4)$ 에서  $g(3)=3$ 이므로  $m = -\frac{1}{9}$ 이다.

$g(x) = -\frac{1}{9}x^3(x-4)$ 에서  $g(6) = -48$ 이다.