[권구승/한성은 모의고사]

대학수학능력시험 수학 연습 (4/4)

권구승 (서울대)

대찬학원(분당), 미래탐구(목동), 이투스앤써

너희들 덕에 올해도 행복했어. 정말 고마워.

한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

고생 많았어요.
행복하세요.

hansungeun.com/texta.html – 공개 모의고사 페이지
써밋 N제(미적분), 써밋 N제(수학2) 출간 – 책 사주세요.

수학 영역

5지선다형

1. $\left(3\times3^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

2. $\lim_{x\to0}\frac{x(x+5)}{2x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

3. $\int_{-2}^{0}(x^2+x)dx+\int_{0}^{2}(x^2+x)dx$의 값은? [3점]

① 6 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{10}{3}$

4. $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_{1}^{x}(t^2+t+4)dt$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ \log_9 a)$, $(3,\ \log_3 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a \neq 1$) [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

6. 모든 실수 x에 대하여

$$x^4 - 4x^3 + k \geq 0$$

일 때, 실수 k의 최솟값은? [3점]

① 27 ② $\frac{63}{2}$ ③ 36 ④ $\frac{81}{2}$ ⑤ 45

7. 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = 3x^2 + \int_0^1 (x-1)f(t)dt$$

일 때, $\int_0^1 f(t)dt$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{2}{3}$

8. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = 1 + \frac{1}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{98}(a_k - a_{k+1})$의 값은? [3점]

① $\frac{23}{50}$ ② $\frac{47}{100}$ ③ $\frac{12}{25}$
④ $\frac{49}{100}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

9. 함수 $f(x) = x^2(1-ax)$ 위의 한 점 P에서의 접선의 방정식이 $y = x$이다. a의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

10. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{f(x)}-x^2}{x} = 2$
(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 6$

$f(1)$의 값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

11. $0 \le x < 4b\pi$일 때, 방정식 $a\sin\frac{x}{b} = k$는 네 개의 실근을 갖고, 이 네 실근의 합이 θ이다.

$$a\sin\frac{\theta}{6b} = 6$$

일 때, a의 값은? [4점]

① $-8\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $8\sqrt{6}$

12. 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} |x-b| & (|x-b| \le 2) \\ |x-b|-2 & (|x-b| > 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x) = x^2 - 6x + a$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

13. $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 이차함수 $f(x)$에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\cos x \le \cos f(x)$$

이 성립한다. $f(0) = 2\pi$일 때 $f(\pi)$의 최댓값은? [4점]

① $\frac{13}{4}\pi$ ② 3π ③ $\frac{11}{4}\pi$ ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{4}\pi$

14. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 모든 실수 x에 대하여 두 수

$$x,\ f(x)$$

중 크지 않은 것을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 미분가능하지 않을 때, $\int_0^4 g(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{16}{3}$ ② 6 ③ $\frac{20}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 8

15. 모든 항이 0이 아닌 정수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n \times |a_{n+3}| = a_{n+1} \times |a_{n+4}|$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $3a_1 = 2a_2 = a_4$
(나) $a_4 a_7 = a_5 + 40$

$\sum_{k=1}^{9} a_k$의 최댓값은? [4점]

① 131 ② 133 ③ 135
④ 137 ⑤ 139

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+6) = 4$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하여라. [3점]

17. 함수 $f(x) = 4(x^4 + x^3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하여라. [3점]

18. 첫째항이 5인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=2$$

일 때, a_7의 값을 구하여라. [3점]

19. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} a_k = 3^n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k$의 값을 구하여라. [3점]

20. $f(x)=x^3-4x^2+bx+c$에 대하여 함수

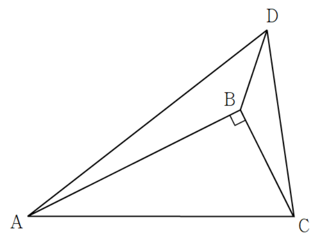
$$g(x)=\frac{f(x)}{x-1}$$

이 $x=3$에서 극솟값 $\frac{1}{2}$를 가질 때, $b+c$의 값을 구하여라. [4점]

21. $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$이고 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC와 삼각형 ABC 밖의 점 D는 다음을 만족시킨다.

(가) $\angle ABD=\angle CBD$
(나) $\overline{BD}=\sqrt{2}$

$\cos^2(\angle ADC)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



22. 음이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le 2$일 때, $f(x)=ax(x-2)$이다.
(단, $a<0$이다.)
(나) 모든 양수 x에 대하여 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 $\int_{\alpha}^{s} f(x)dx=0$인 양수 s의 개수가 n이 되도록 하는 양수 α 중 가장 큰 수를 a_n이라 하자. $\int_{a_4}^{a_5} f(x)dx=\frac{10}{3}$일 때, $\int_{a_2}^{a_8} f(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5지선다형

23. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},\quad \mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

24. $(2x^2+x)^4$의 전개식에서 x^6의 계수는? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

25. 이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=kx-\frac{1}{8}\quad(x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

26. A, A, B, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, A가 적힌 두 장의 카드가 서로 이웃할 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

27. 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ 2^2)$를 따르는 확률변수 X와, 정규분포 $\mathrm{N}(b,\ 3^2)$를 따르는 확률변수 Y가 다음을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 12) = \mathrm{P}(Y \geq 12)$
(나) $\mathrm{P}(12 \leq X \leq 18) = \mathrm{P}(15 \leq Y \leq 24)$

$a+b$의 값은? [3점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

28. 한 개의 주사위를 4번 던져서 가장 큰 눈의 수를 a, 가장 작은 눈의 수를 b라 하자. 처음 던진 주사위의 눈의 수가 5일 때, $a-b=3$일 확률은? [4점]

① $\frac{55}{216}$ ② $\frac{29}{108}$ ③ $\frac{61}{216}$ ④ $\frac{8}{27}$ ⑤ $\frac{67}{216}$

단답형

29. 어느 학교 학생들의 지능 지수는 평균이 m, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 학생 중 25명을 임의추출하여 구한 지능 지수의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 이 학교 학생 중 16명을 다시 임의추출하여 구한 지능 지수의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $59 \le m \le d$이다. $b=d$일 때, $a+\overline{x_1}$의 값을 구하여라. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2)=0.95$로 계산한다.) [4점]

30. 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각각 하나씩 적혀 있는 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열한다. 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 오직 한 번만 나타날 때, 가장 오른쪽에 놓은 카드에 적힌 수가 5일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+5x)}{2x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

24. 곡선 $x^2-3xy+y^2=x$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

25. $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k\sqrt[n]{e^k}}{n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2e}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1
④ e ⑤ $2e$

26. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{2n}}{a_n + 4^n} = 4$$

일 때, a_5의 값은? [3점]

① 8 ② 16 ③ 32
④ 64 ⑤ 128

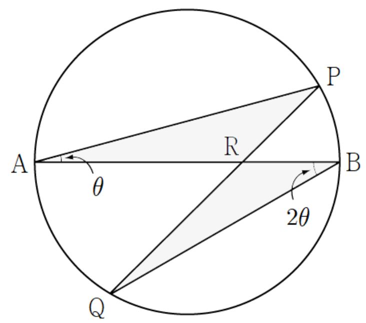
27. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_{a}^{x}\frac{1}{1+t^2}dt$$

이고, $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(b)=1$이다. $g'(b)$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 C 위의 두 점 P, Q는 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$, $\angle\mathrm{QBA}=2\theta$를 만족시키고, 두 선분 AB와 PQ이 만나는 점 R은 원 C의 내부의 점이다. 두 삼각형 APR, BQR의 넓이의 합을 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? [4점]



① $\frac{4}{3}$ ② 2 ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

단답형

29. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_1^9 f(x)\,dx=6,\quad \int_1^9 \sqrt{1+\{f(x)\}^2}\,dx=10$$

일 때, $\int_1^5 xf(x)dx$의 값을 구하여라. [4점]

30. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 각각

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2\{(x-a)^2+a\},$$
$$g(x)=|e^{x+|x|}-e^c|$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $g(f(x)+t)$가 미분가능하지 않은 x값의 개수를 $h(t)$라 하자. $h(t)$가 불연속인 t값의 개수가 3일 때, $a+c$의 값을 구하여라.
(단, a와 c는 양의 실수이다.) [4점]

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(5,\ -6)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24. 좌표평면에서 점 $\mathrm{F}(1,\ 0)$과 직선 $x=-1$에 이르는 거리가 같은 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 나타내는 도형은 점 $(a,\ 6)$을 지난다. a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

25. 좌표공간에 두 점 A$(2,\ 1,\ -1)$, B$(1,\ 0,\ 1)$이 있다. 삼각형 ABP가 정삼각형이 되도록 하는 xy평면 위의 점 P의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 음이 아닌 정수이다.) [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

26. 두 점 F$(0,\ 5)$, F$'(0,\ -5)$를 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$이 직선 $y=mx$와 만나지 않도록 하는 실수 m의 최댓값이 $\dfrac{3}{4}$일 때, a^2-b^2의 값은? [3점]

① 7 ② $\dfrac{13}{2}$ ③ 6 ④ $\dfrac{11}{2}$ ⑤ 5

27. 좌표평면에서 삼각형 ABC와 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$
(나) $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QA}$

삼각형 ABC의 넓이가 12일 때, 삼각형 PQC의 넓이는? [3점]

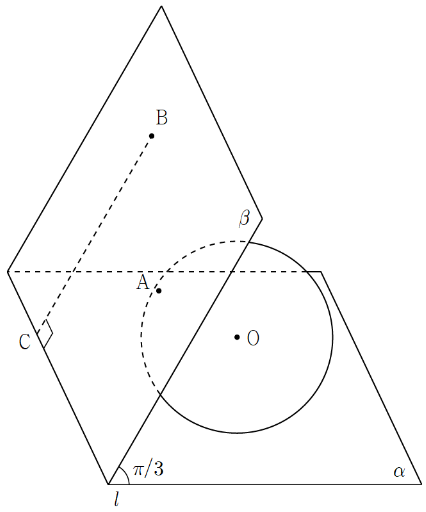
① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

28. 두 점 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$를 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$의 제1사분면 위의 점 P에 대하여 세 점 P, F, F'를 지나는 원의 중심을 C라 할 때, 직선 CF'이 선분 PF의 중점을 지난다. 세 점 P, F, F'를 지나는 원의 넓이가 $\frac{81}{8}\pi$일 때, $2a^2+b^2$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

단답형

29. 그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 두 평면 α와 β가 있고, 점 B는 평면 β 위의 점이다. 점 O를 중심으로 하고 평면 α 위에 놓인 반지름의 길이가 4인 구가 평면 β와 점 A에서 접하고 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 C라 할 때, $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=6\sqrt{3}$이다. 평면 OAB와 평면 α가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $100\cos^2\theta$의 값을 구하여라. [4점]



30. 좌표평면 위의 점 A(4, 0)에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PA}=0$
(나) $|\overrightarrow{PQ}|=1$이고 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}\geq\frac{12}{5}$이다.

점 B$(-1, 1)$에 대하여 $\overline{BQ}$의 최솟값과 최댓값의 합은 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+1$이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 자연수이다.) [4점]

[권구승/한성은 모의고사 수능 연습(4/4) 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	⑤	03	②	04	③	05	①
06	①	07	⑤	08	④	09	①	10	③
11	②	12	④	13	④	14	③	15	④
16	10	17	28	18	20	19	366	20	15
21	81	22	39						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	③	24	⑤	25	②	26	②	27	⑤
28	①	29	126	30	73				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	③	25	③	26	⑤	27	④
28	③	29	9	30	224				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	④	25	②	26	①	27	③
28	⑤	29	50	30	23				

COMMENT 10

(가)에서 $f(x)=x^4+4x^3+\cdots$이다.

(나)에서 $f(x)=\cdots+6x^2$이다.

COMMENT 11

$0\le x<b\pi$ 또는 $2b\pi\le x<3b\pi$에서 근을 가지는 경우는 $\sin\frac{\theta}{6b}=0$이므로 모순.

$b\pi\le x<2b\pi$ 또는 $3b\pi\le x<4b\pi$에서 근을 갖는 경우이다. 대칭성에 의해 $\theta=10b\pi$이다.

$a\sin\frac{\theta}{6b}=a\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로 $a=-4\sqrt{3}$이다.

COMMENT 12

$f(x)$가 $x=b-2$, $x=b+2$에서 불연속이므로 $g(b-2)=0$, $g(b+2)=0$이어야 한다.

$g(x)=0$의 두 근의 합이 $2b$이므로 $b=3$, $g(1)=0$이므로 $a=5$이다.

COMMENT 13

곡선 $y=\cos x$를 그리고 째려보자.

$0\le x\le\pi$이면 부등식 $\cos x\le\cos f(x)$는 $2\pi-x\le f(x)\le 2\pi+x$이고,

$\pi\le x\le 2\pi$이면 부등식 $\cos x\le\cos f(x)$는 $x\le f(x)\le 4\pi-x$이다.

곡선 $y=f(x)$는 네 선분 $y=2\pi-x$, $y=2\pi+x$, $y=x$, $y=x+2\pi$로 둘러싸인 부분의 안쪽(경계 포함)에 존재한다.

※ 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$나 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$를 건너 다른 사각형으로 넘어가는 경우는 이차함수로 사각형 안에 집어넣을 수가 없다.

$f(0)=f(2\pi)=2\pi$이므로 $f(x)=a(x-\pi)^2-a\pi^2+2\pi$이다.

$f(\pi)$는 $f'(0)=1$일 때 $a=-\frac{1}{2\pi}$일 때 최댓값 $\frac{5}{2}\pi$를 갖는다.

COMMENT 14

직선 $y=x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$, $x=3$에서 서로 만나야 한다.

$f(x)=(x-1)(x-3)+x$이고 $g(x)=\begin{cases} x & (x<1 \text{ 또는 } 30\le x) \\ f(x) & (1\le x<3) \end{cases}$이다.

COMMENT 15

$a_1=2a$, $a_2=3a$, $a_4=6a$라 하고, $a_3=ka$라 하자.

대충 $a>0$이라 하면, 조건 식에서 $|a_5|=4a$, $|a_6|=\frac{12}{k}a$, $|a_7|=2a$, $|a_8|=3a$, $|a_9|=ka$이다.

$$a_4a_7=a_5+40 \Leftrightarrow \pm 12a^2=\pm 4a+40 \Leftrightarrow \pm 3a^2=\pm a+10$$

이므로 $a=\pm 2$이다. $|a_6|=\frac{12}{k}a$가 정수이므로 k는 24의 약수이다.

$\sum_{k=1}^{9}a_k=\left(20+2k+\frac{12}{k}\right)a$는 $a=2$, $k=24$일 때 최댓값 137을 가진다.

COMMENT 19

$\{a_n\}$: $3,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \cdots$

COMMENT 20

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$은 두 점 $(1,\ 0)$과 $(x,\ f(x))$을 지나는 직선의 기울기이다. $x=3$에서 극솟값 $\dfrac{1}{2}$을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이다.

$f(3)=1,\ f'(3)=\dfrac{1}{2}$에서 $b=-\dfrac{5}{2},\ c=\dfrac{35}{2}$에서 $b+c=15$이다.

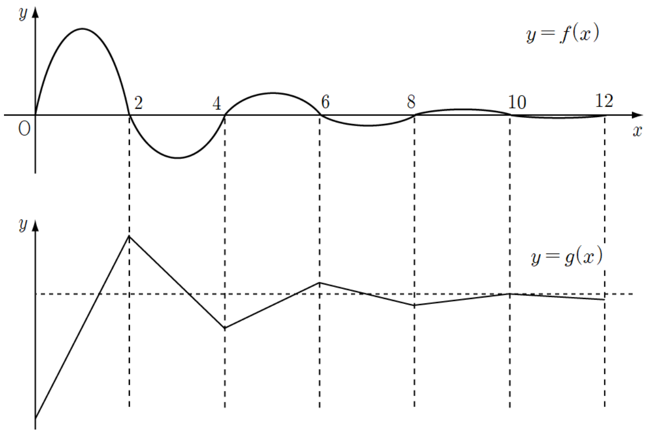
COMMENT 21

$\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{26},\ \overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$이다.

코사인법칙에 의해 $\cos(\angle\mathrm{ADC})=\dfrac{4}{\sqrt{65}}$이다.

COMMENT 22

대충 $f(x)$와 $g(x)=\displaystyle\int_{\alpha}^{x}f(t)dt$의 그래프를 그려보면 다음과 같다. $g(x)$는 증감만을 나타낸 것이다.



함수 $f(x)$가 y축 방향으로 반씩 눌리는데, $f(x)$의 넓이가 $g(x)$의 변화량이므로
$g(x)$의 변화량이 반반반 씩이다.

점선 걸릴 때가 $a_5=10$을 나타낸다.

$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=-\frac{4a}{3}$이고, $\displaystyle\int_2^4 f(x)dx=\frac{2a}{3}$, $\displaystyle\int_4^6 f(x)dx=-\frac{a}{3}$, $\displaystyle\int_6^8 f(x)dx=\frac{a}{6}$, $\cdots$이다.

$\displaystyle\int_{\alpha_4}^{\alpha_5} f(x)dx=-\frac{a}{12}=\frac{10}{3}$이므로, $a=-40$, $\displaystyle\int_{\alpha_2}^{\alpha_8} f(x)dx=\int_4^{16} f(x)dx=-\frac{a}{3}+\frac{a}{6}-\frac{a}{12}+\frac{a}{24}-\frac{a}{48}+\frac{a}{96}=\frac{35}{4}$이다.

COMMENT 확률과 통계 27

(가)에서 $\dfrac{12-a}{2}=\dfrac{12-b}{3}$이고, (나)에서 $\begin{cases}\dfrac{12-a}{2}=\dfrac{15-b}{3}\\[2mm] \dfrac{18-a}{2}=\dfrac{24-b}{3}\end{cases}$이거나 $\begin{cases}\dfrac{12-a}{2}=-\dfrac{24-b}{3}\\[2mm] \dfrac{18-a}{2}=-\dfrac{15-b}{3}\end{cases}$이다.

출제자의 성격상 당연히 두 번째 케이스.

COMMENT 확률과 통계 28

전체 경우의 수는 6^3이다.

최소 3, 최대 6인 경우의 수는 $4^3-(3^3+3^3-2^3)$,

최소 2, 최대 5인 경우의 수는 4^3-3^3이다.

COMMENT 확률과 통계 30

전체 경우의 수는 57이다.

6____ : 1가지, _6____ : 5가지, __6___ : 10가지, ___6__ : 10가지, ____6_ : 5가지

5____6 : 1가지, _5___6 : 4가지, __5__6 : 6가지, ___5_6 : 4가지,

4___56 : 1가지, _4__56 : 3가지, __4_56 : 3가지,

3__456 : 1가지, _3_456 : 2가지,

213456 : 1가지

사건의 경우의 수는 16이다.

6____5 : 1가지, _6___5 : 4가지, __6__5 : 6가지, ___6_5 : 4가지, ____65 : 1가지

전체 경우의 수 다른 풀이) 숫자가 작아지기 직전까지의 묶음과 직후부터의 묶음으로 구분하자.

두 묶음에 숫자를 나눠넣는 경우의 수는 (2^6-2)이다. 여기서 앞쪽 묶음의 최댓값이 뒤쪽 묶음의 최솟값보자 작은 $(1)|(23456)$, $(12)|(3456)$, $(123)|(456)$, $(1234)|(56)$, $(12345)|(6)$ 다섯 경우를 제외해야 한다.

COMMENT 미적분 29

$F(x)=\int_1^x f(t)dt$라 하면 $F(1)=0$, $F(9)=6$이고, $x=1$부터 $x=9$까지 곡선 $y=F(x)$의 길이가 10이다.

$y=F(x)$는 직선각. $F(x)=\frac{3}{4}(x-1)$이므로 $\int_1^5 xf(x)dx=\int_1^5 \frac{3}{4}xdx=9$이다.

※ $\int_1^5 xf(x)dx$는 부분적분법에 의해 $[xF(x)]_1^5-\int_1^x F(x)dx$이다.

이쪽이 의도였는데 직선이 방정식으로 딱 나오는 것을 간과했지 뭐야.

COMMENT 미적분 30

$g(x)$는 $x=0$과 $x=\frac{c}{2}$에서 미분불가능하다.

망하는 Case1) $f'(x)=0$의 실근이 1개일 때 $h(t)$가 불연속인 t값의 개수는 2이다.

망하는 Case2) $f'(x)=0$의 실근이 3개일 때 $h(t)$가 불연속인 t값의 개수는 최소 4이다.

이 경우 함수 $f(x)$의 두 극소점의 y값이 같을 수 없음을 확인해야 한다.

남는 것은 함수 $f(x)$의 도함수가 중근을 가지는 그모양이다.

$$f'(x)=\frac{1}{2}x\{2x^2-3ax+(a^2+a)\}$$

에서 $2x^2-3ax+(a^2+a)=0$이 중근을 가져야 하므로 $a=8$이다.

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-4x^3+18x^2$이고 그 y값은 108이다. 이 값이 $\frac{c}{2}$ 각이므로 $c=216$이다.

COMMENT 기하 28

선분 PF의 중점을 M이라 하자. 원이 F, F′을 지나므로 원의 중심 C는 y축 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CF}}$이므로 삼각형 CFP는 이등변삼각형이고 직선 CM은 직선 PF와 서로 수직이다.

$\overline{\mathrm{FM}}=p$, $\overline{\mathrm{CM}}=q$라 하자. 직각삼각형 FMC, FMF′에서 $p^2+q^2=\frac{81}{8}$, $p^2+\left(q+\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2=36$이다.

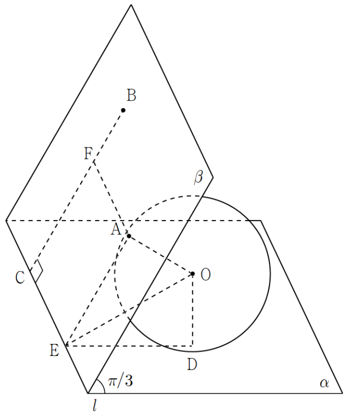
연립하여 풀면 $p=2$, $q=\frac{7\sqrt{2}}{4}$이다. 점 P가 쌍곡선 위의 점이고, $\overline{\mathrm{PF'}}=6$, $\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로 양수 $a=1$, $b=2\sqrt{2}$이다.

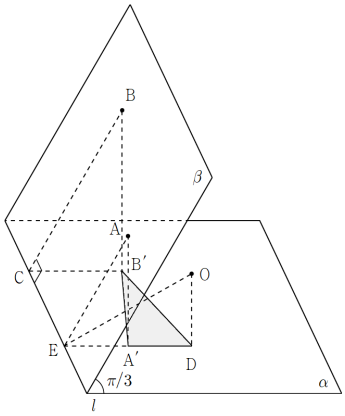
COMMENT 기하 29

점 O에서 평면 α, 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.
두 삼각형 OAE, ODE가 서로 합동이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=4\sqrt{3}$이다.
점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 F라 하면 $\overline{\mathrm{BF}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{6}$이다.

$\mathrm{OA}\perp\beta$이므로 $\mathrm{OA}\perp\mathrm{AB}$이다. 삼각형 OAB의 넓이는 12, 아래 그림에서

삼각형 OAB의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 $\mathrm{DA'B'}$이고 넓이는 $6\sqrt{2}$이므로 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.





COMMENT 기하 30

점 P는 원 $(x-2)^2+y^2=4$ 위의 점이다. 점 C(2, 0)라 하자. 점 Q는 점 P를 중심으로 하고

반지름의 길이가 1인 원의 호 중 x좌표가 점 P의 x좌표보다 $\frac{3}{5}$ 이상 큰 부분 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{BQ}}$의 최댓값은 세 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 모두 같은 방향일 때 얻을 수 있다.
각을 째려보자. 세 벡터를 쫙 펴는 것이 가능하다. 최댓값은 $\sqrt{10}+2+1$이다.

최솟값이 개어렵다. 점 P가 원점 근처에서 놀 때를 째려보자.
아무리 째려봐도 $\overline{\mathrm{BQ}}$의 최솟값은 어떤 P에 대하여 Q의 y좌표가 가장 클 때 얻는다.
어떤 P에 대하여 y좌표가 가장 큰 Q를 Q′이라 하면 Q′의 자취의 방정식은
$\left(x-\frac{3}{5}-2\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=4$이다. (원점 근처에서. 아래 그림 참고)
$\overline{\mathrm{BQ}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{BQ'}}$의 최솟값이므로 $\sqrt{13}-2$이다.