

# [나승민/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학 연습 (3/4) |

## | 나승민 (성균관대 수학과)

이투스 네오, 미래탐구목동  
수고하셨습니다.  
인생에서 주인공이 되세요.  
instagram @cremath\_david

## | 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY  
항상 감사합니다.  
행복하세요.  
hansungeun.com/texta.html - 공개 자료 페이지.  
smartstore.naver.com/hansungeun - 책 파는 데.  
유튜브 한성은 / 인스타 hansungeun2

## | CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

# 수학 영역

1

5지선다형

1.  $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$ 의 값은? [2점]

- ① 2                      ② 3                      ③ 4  
④ 5                      ⑤ 6

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1}$ 의 값은? [2점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

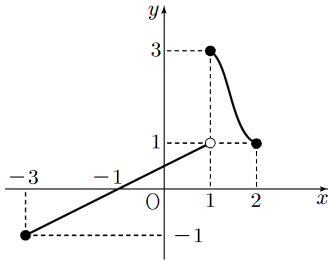
3.  $\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{3}$                       ② 1                      ③ 3  
④ 6                      ⑤ 9

4. 곡선  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$  위의 점  $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① 3                      ② 4                      ③ 5  
④ 6                      ⑤ 7

5. 닫힌 구간  $[-3, 2]$ 에서 정의된 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -3                      ② -1                      ③ 1
- ④ 3                        ⑤ 5

6. 첫째항이  $\frac{1}{3}$ 인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 + a_5 = 30, \quad a_5 > a_3 > a_4$$

일 때,  $a_8$ 의 값은? [3점]

- ① -729                    ② -243                    ③ 81
- ④ 243                     ⑤ 729

7. 곡선  $y=x^2-ax+1$ 과 직선  $y=2x+1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 36이 되도록 하는 모든 상수  $a$ 의 값의 곱은? [3점]

- ① -32                      ② -28                      ③ -24
- ④ -20                      ⑤ -16

8. 함수

$$f(x) = 2x^2 + \int_1^x |2t-2| dt$$

의 최솟값은? [3점]

- ① -4                      ② -2                      ③ 0  
 ④ 2                        ⑤ 4

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t(t \geq 0)$ 에서의 속도  $v(t)$ 가

$$v(t) = (t-2)(t-a) \quad (a > 2)$$

이다.  $t=2$ 에서의 점 P의 위치와  $t=8$ 에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 상수  $a$ 의 값은? [4점]

- ① 4                      ② 5                      ③ 6  
 ④ 7                      ⑤ 8

10. 점근선이  $3x-2=0$ 인 곡선  $y=\log_2(ax+b)$ 과 직선  $x-2y+4=0$ 이 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때,  $\overline{AB}=2\sqrt{5}$ 이다.  $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
 ④ 4                      ⑤ 5

11. 함수  $f(x) = \log_2 \frac{x}{8} \times \log_2 \frac{1}{2x}$ 가  $x=a$ 에서 최댓값  $M$ 을

가질 때,  $a+M$ 의 값은? [4점]

- ① 6                      ② 7                      ③ 8  
 ④ 9                      ⑤ 10

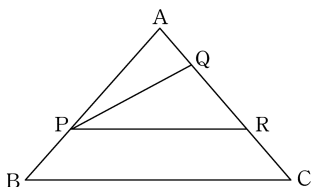
12. 최고차항의 계수가  $a$ 인 이차함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$|f'(x)| \leq x^2 - 2x + 4$$

를 만족시킨다. 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 직선  $x=2$ 일 때, 실수  $a$ 의 최댓값은? [4점]

- ① 1                      ②  $\frac{3}{2}$                       ③ 2  
 ④  $\frac{5}{2}$                       ⑤ 3

13. 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 점 P는 선분 AB의 2:1 내분점이고, 두 점 Q, R은 모두 선분 AC 위의 점이다. 두 삼각형 APQ, PRQ와 사각형 PBCR의 넓이가 차례로 첫째항이  $2a$ , 공차가  $a$ 인 등차수열을 이룰 때, 다음은  $\frac{\overline{CQ}}{\overline{AR}}$ 의 값을  $a$ 와  $d$ 로 나타내는 과정이다.



삼각형 APQ의 넓이는  $2a$ 이므로  
 삼각형 APR의 넓이는  $\boxed{\text{(가)}}$ 가 되어  
 $2a : \boxed{\text{(가)}} = \triangle APQ : \triangle APR$   
 $= \frac{1}{2} \overline{AP} \overline{AQ} \sin A : \frac{1}{2} \overline{AP} \overline{AR} \sin A$

이다. 따라서

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \frac{2a}{\boxed{\text{(가)}}} \dots \textcircled{\text{㉑}}$$

이다. 같은 방법으로,

삼각형 ABC의 넓이는  $9a$ 이므로

$$2a : 9a = \triangle APQ : \triangle ABC$$

$$= \frac{1}{2} \overline{AP} \overline{AQ} \sin A : \frac{1}{2} \overline{AB} \overline{AC} \sin A$$

이고, 또

$$\overline{AP} = \frac{2}{3} \overline{AB}, \quad \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AC} - \overline{AQ}}{\overline{AQ}}$$

이므로

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = \boxed{\text{(나)}} \dots \textcircled{\text{㉒}}$$

㉑, ㉒에 의해

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} \times \frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 식을  $f(a)$ , (나), (다)에 알맞은 수를 각각  $p$ ,  $q$ 라 하자.  $pq \times f(2)$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{104}{5}$       ②  $\frac{96}{5}$       ③  $\frac{88}{5}$   
 ④ 16      ⑤  $\frac{72}{5}$

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $f(x) \geq 0$

(나)  $\{f(x)\}^2 = (x-1)^2(x-3)^2$

$\int_0^4 f(x)dx$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{4}{3}$       ② 2      ③  $\frac{8}{3}$   
 ④  $\frac{10}{3}$       ⑤ 4

15. 모든 항이 자연수인 수열  $\{a_n\}$ 은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \\ \frac{a_n+1}{2} & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 5 이하의 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n a_{n+1}$ 이

짝수일 때,  $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 40                      ② 43                      ③ 46  
 ④ 49                      ⑤ 52

단답형

16. 함수  $f(x)$ 가 상수  $a$ 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 - ax + 2, \quad f(1) = f(2) = -2$$

을 만족시킬 때,  $a$ 의 값을 구하여라. [3점]

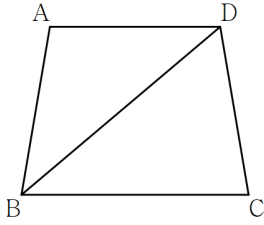
17. 부등식

$$\log_2(x-2) + \log_2(x-4) \leq 3$$

를 만족시키는 모든 정수  $x$  값의 합을 구하여라. [3점]



18. 두 변  $AD$ 와  $BC$ 가 서로 평행한 사다리꼴  $ABCD$ 에 대하여  $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = 6$ 이고  $\overline{BD} = 2\sqrt{21}$  일 때, 선분  $BC$ 의 길이를 구하여라. [3점]



19.  $a_1 > 0$  이고 공비가  $-2$ 인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{11} (|a_k| + a_k) = 65$$

일 때,  $\frac{1}{a_1}$ 의 값을 구하여라. [3점]

20. 함수  $f(x) = x^2 - 6x + a$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수  $a$ 의 최솟값을 구하여라. [4점]

21.  $0 \leq x \leq 2^{n+1}$ 에서  $x$ 에 대한 방정식

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}x\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

의 서로 다른 모든 실근의 합을  $a_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^6 a_n$ 의 값을 구하여라. [4점]

22. 최고차항의 계수가 1이고  $f(2)=0$ 인 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_2^x f(t)dt$$

와 실수  $a$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수  $|g(x+a)|$ 는 오직  $x=4$ 에서만 미분가능하지 않다.  
 (나) 함수  $|g(x)g(2a-x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$|f(a)|$ 의 값을 구하여라. [4점]

# 수학 영역 (확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식  $(x-2)^5$ 의 전개식에서  $x^3$ 의 계수는? [2점]

- ① 36                      ② 40                      ③ 44  
④ 48                      ⑤ 52

24. 서로 독립인 두 사건  $A, B$ 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(A^c \cup B^c) = \frac{11}{12}$$

일 때,  $P(A^c \cap B)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{6}$                       ②  $\frac{1}{4}$                       ③  $\frac{1}{3}$   
④  $\frac{5}{12}$                       ⑤  $\frac{1}{2}$

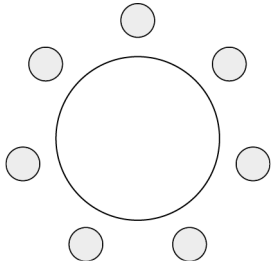
25. 다항식  $(x+y+z+w)^{10}$ 의 전개식에서  $x$ 가 포함된 항의 개수는? [3점]

- ① 120                      ② 165                      ③ 220  
 ④ 286                      ⑤ 392

26. 어느 배달업체 고객의 주문 대기 시간은 평균이  $m$ 분, 표준편차가  $\sigma$ 분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 배달업체 고객 중 16명을 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균  $m$ 에 대한 신뢰 구간이  $a \leq m \leq b$ 이다.  $b-a=4.9$ 일 때,  $\sigma$ 의 값은? (단,  $Z$ 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,  $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.) [3점]

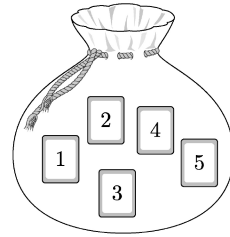
- ① 5                              ② 10                              ③ 15  
 ④ 20                              ⑤ 25

27. 7명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 여학생 3명, 남학생 4명이 있다. 이 7명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, 여학생들 중 어느 2명은 이웃하고, 남은 1명은 어느 여학생과도 이웃하지 않게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 108                      ② 420                      ③ 432  
 ④ 444                      ⑤ 456

28. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를  $a_1$ , 큰 수를  $a_2$ 라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를  $b_1$ , 큰 수를  $b_2$ 라 할 때,  $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ 를 만족시킬 확률은? [4점]



- ①  $\frac{2}{25}$                       ②  $\frac{1}{10}$                       ③  $\frac{3}{25}$   
 ④  $\frac{7}{50}$                       ⑤  $\frac{4}{25}$

단답형

29. 확률변수  $X$ 가 가지는 값이 1부터 4까지의 자연수이고 확률변수  $Y$ 가

$$P(X=x) = P(Y=2x+1) \quad (x=1, 2, 3, 4)$$

를 만족시킨다.  $E(X)=2$ ,  $V(X)=1$ 일 때,  $E(Y^2)$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 서로 다른 사탕 5개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 서로 구별할 수 없는 3개의 상자에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하여라. [4점]

(가) 각 상자에 들어가는 사탕의 개수는 3 이하이다.

(나) 각 상자에 들어가는 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 2 이상이다.

# 수학 영역(미적분)

5지선다형

23.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{e}$       ②  $\frac{2}{e}$       ③ 1  
④  $\frac{e}{2}$       ⑤  $e$

24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$ 의 값은? [3점]

- ①  $2\sqrt{2}-1$       ②  $2\sqrt{2}-2$       ③  $4\sqrt{2}-1$   
④  $4\sqrt{2}-2$       ⑤  $4\sqrt{2}-4$

25.  $a_3 = 8$ 인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+3}$$

일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n}$ 의 값은? [3점]

- ① 16                      ② 14                      ③ 12  
 ④ 10                      ⑤ 8

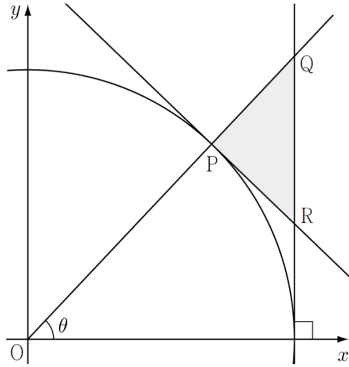
26. 역함수가  $g(x)$ 인 함수  $f(x) = \ln x + a$ 에 대하여 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 함수  $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는 1이다. 두 곡선  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 와  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ①  $4 - \frac{1}{e}$                       ②  $2 - \frac{2}{e}$                       ③  $2 - \frac{1}{e}$   
 ④  $1 - \frac{2}{e}$                       ⑤  $1 - \frac{1}{e}$



27. 그림과 같이 중심이 원점  $O$ 이고 반지름의 길이가 1인 원  $C$  위의 점  $P$ 가 있다. 직선  $x=1$ 과 직선  $OP$ 의 교점을  $Q$ , 직선  $x=1$ 과 점  $P$ 에서 원  $C$ 에 접하는 직선의 교점을  $R$ 이라 하자. 동경  $OP$ 가  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 할 때, 삼각형  $PQR$ 의 넓이는  $S(\theta)$ 이다.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) [3점]



- ①  $\frac{1}{16}$                       ②  $\frac{1}{12}$                       ③  $\frac{1}{8}$
- ④  $\frac{1}{6}$                          ⑤  $\frac{1}{4}$

28. 최고차항의 계수가 3인 이차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $f(f(x))$ 는  $x=1$ 에서 극솟값을 갖고,  $x=2$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

일 때, 함수  $g(f(x))$ 의 최솟값은? [4점]

- ①  $-6$                               ②  $-9$                               ③  $-12$
- ④  $-15$                              ⑤  $-18$

단답형
-----

29. 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x$$

에 대하여  $x$ 에 대한 방정식

$$f(x) = \frac{f(t)}{t}x$$

의 서로 다른 실근의 개수를  $g(t)$ 라 하자.  $g(t)$ 가 불연속이 되는 양수  $t$ 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 이라 할 때,  $n + \ln(\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{4 + \{f(t)\}^2} dt$$

를 만족시킨다.  $f'(a) = 5$ 인 실수  $a$ 에 대하여

$$\int_0^a \{f(x)\}^3 dx$$
의 값을 구하여라. [4점]

# 수학 영역(기하)

5지선다형

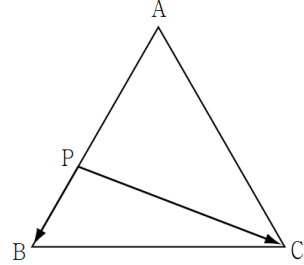
23. 두 벡터  $\vec{a}=(2, k)$ 와  $\vec{b}=(4, k+2)$ 가 서로 평행할 때, 실수  $k$ 의 값은? [2점]
- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

24. 좌표공간의 두 점  $A(2, 4, 6)$ ,  $B(a, b, 0)$ 에 대하여 선분  $AB$ 를 2:1로 내분하는 점  $z$ 축 위의 점일 때,  $a+b$ 의 값은? [3점]
- ① -5                      ② -4                      ③ -3  
④ -2                      ⑤ -1

25. 점  $(-4, 0)$ 에서 포물선  $y^2 = 4px$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱이  $-1$ 이다.  $p$ 의 값은? [3점]

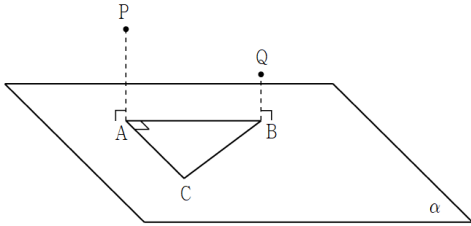
- ① 1                      ② 2                      ③ 3
- ④ 4                      ⑤ 5

26. 한 변의 길이가 6인 정삼각형  $ABC$ 와 선분  $AB$  위를 움직이는 점  $P$ 에 대하여  $|\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|$ 의 최솟값은  $m$ , 최댓값은  $M$ 이다.  $m+M$ 의 값은? [3점]



- ①  $3\sqrt{3}$                       ② 6                      ③  $6\sqrt{3}$
- ④ 9                      ⑤  $9\sqrt{3}$

27.  $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{5}$  이고  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$  인 삼각형 ABC가 평면  $\alpha$  위에 놓여 있다. 두 점 P, Q에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발이 각각 A, B이고  $\overline{PA} = 4$ ,  $\overline{QB} = 2$ 이다. 평면 CPQ와 평면  $\alpha$ 가 이루는 예각의 크기가  $\theta$ 일 때,  $\tan\theta$ 의 값은? [3점]



- ①  $\frac{1}{2}$                       ② 1                      ③  $\frac{3}{2}$   
 ④ 2                      ⑤  $\frac{5}{2}$

28. 두 초점이  $F(4, 0)$ ,  $F'(-4, 0)$ 인 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 있다. 원  $x^2 + (y-3)^2 = 1$  위를 움직이는 점 P에 대하여 직선  $F'P$ 가 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 Q라 하자.  $\overline{FQ} - \overline{PQ}$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $Mm = 8$ 이다.  $a^2b^2$ 의 값은? [4점]

- ① 15                      ② 16                      ③ 17  
 ④ 18                      ⑤ 19

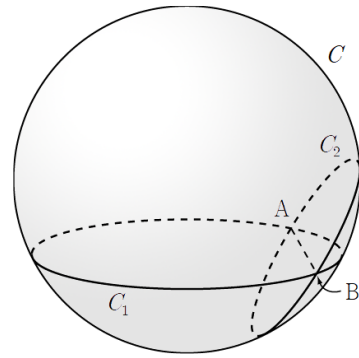
단답형

29. 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD와  $0 \leq a \leq 1$ 인 실수  $a$ 에 대하여 점 E는  $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{BC}$ 를 만족시킨다. 점 P가 선분 AD 위를 움직일 때,  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PE}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 점 P', 점 Q가 선분 CD 위를 움직일 때,  $|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QE}|$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 Q를 Q'라 하자.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{P'Q'}$ 의 값이 28일 때,  $60a$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 중심이 O이고 반지름의 길이가  $2\sqrt{5}$ 인 구 S와 이루는 각의 크기가  $60^\circ$ 인 두 평면  $\alpha, \beta$ 가 만나서 생기는 두 원을 각각  $C_1, C_2$ 라 하고, 두 원  $C_1, C_2$ 의 두 교점을 A, B라 하자. 선분 AB와 두 원  $C_1, C_2$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 선분 AB는 원  $C_2$ 의 지름이다.
- (나) 두 원  $C_1, C_2$ 의 넓이의 곱은  $64\pi^2$ 이다.

원  $C_2$  위를 움직이는 점 P에 대하여, 직선 OP가 구 S와 만나는 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 ABQ의 평면  $\alpha$  위로의 정사영의 넓이의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $Mm$ 의 값을 구하여라. [4점]



# [나승민/한성은 모의고사 수능 연습(3/4) 정답표]

## 〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	⑤	03	③	04	④	05	④
06	①	07	①	08	②	09	③	10	②
11	①	12	①	13	④	14	⑤	15	④
16	6	17	11	18	8	19	42	20	9
21	375	22	32						

## 〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	②	24	⑤	25	③	26	①	27	③
28	⑤	29	29	30	425				

## 〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	②	25	①	26	④	27	③
28	⑤	29	11	30	27				

## 〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	②	24	③	25	④	26	⑤	27	④
28	①	29	40	30	188				

## COMMENT 08

$f'(x) = 4x + |2x - 2|$ 는  $x < -1$ 일 때 음수,  $x > -1$ 일 때 양수이므로

$f(x)$ 는  $x = -1$ 에서 최솟값을 가진다.  $f(-1) = 2 + \int_1^{-1} |2t - 2| dt = -2$ 이다.

## COMMENT 10

직선의 기울기가  $\frac{1}{2}$ 이므로  $A(p, q)$ 라 하면  $B(p+4, q+2)$ 이다.

접근선이  $x = \frac{2}{3}$ 이므로  $-\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ 에서  $b = -\frac{2}{3}a$ 이다.  $\log_2\left(ap - \frac{2}{3}a\right) = q$ ,  $\log_2\left(a(p+4) - \frac{2}{3}a\right) = q+2$ 에서

$\log_2\left(a(p+4) - \frac{2}{3}a\right) - \log_2\left(ap - \frac{2}{3}a\right) = 2$ 이므로  $p=2, q=3, a=6, b=-4$ 이다.

## COMMENT 12

$-x^2 + 2x - 4 \leq f'(x) \leq x^2 - 2x + 4$ 이고  $f'(x) = 2a(x-2)$ 이다.

직선  $y = 2a(x-2)$ 가 곡선  $y = -x^2 + 2x - 4$ 에 접할 때  $a$ 의 최댓값을 얻는다.

## COMMENT 13

$$f(a) = 5a, p = 2, q = \frac{4}{5}$$

## COMMENT 14

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-3) & (x < 1 \text{ 또는 } 3 < x) \\ -(x-1)(x-3) & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

## COMMENT 15

아무 자연수나  $a_n$ 에 넣고 뒤로 진행시켜봐. 나중에는 1, 1, 1, 1, ... 이 나온다.

그 바로 전 항은 2이다. 그 전 항은 3 또는 4, ... 이런 식이라는 것을 눈치 까야 한다.

$\sum_{k=1}^{10} a_k$ 가 최소가 되려면 그냥  $a_1 = 1, 1, 1, \dots, a_{10} = 1$ 이면 좋겠는데

‘5 이하의 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n a_{n+1}$ 이 짝수’

조건이 그것을 허락하지 않는군.  $a_5 = 2$ 로 두는 것이 최소값이다.

이제  $a_4$ 는 3 또는 4인데 최소로 가려면  $a_4 = 3$ 이고,  $a_3$ 는 5 또는 6인데  $a_3 a_4$ 가 짝수로 가야 하므로  $a_3 = 6$ 이고, ...

뭐 이런 식으로.  $a_2 = 11, a_1 = 22$ 일 때가 최소이다. 다른 길로 가보려니까.. 그냥 망한다.

## COMMENT 18

$\angle ABD = \theta$ 라 하자.  $\angle ADB = \angle DBC = \theta$ 이다. 이등변삼각형 ABD에서  $\cos\theta = \frac{\sqrt{21}}{6}$ 이다.

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면  $\overline{BH} = \overline{BD} \times \cos\theta = 7$ 이다.

대충 대칭성에 의해  $\overline{CH} = 1, \overline{BC} = 8$ 이다.



## COMMENT 19

$$\sum_{k=1}^{11} (|a_k| + a_k) = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) = 2 \times \frac{a_1(4^6 - 1)}{4 - 1} = \frac{2(4^3 - 1)(4^3 + 1)a_1}{3} = 4^3 - 1$$

에서  $a_1 = \frac{1}{42}$ 이다.

## COMMENT 20

$g'(x) = f(x) = x^2 - 6x + a$ 이다.  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면  $g'(x) \geq 0$ 이다.

※ 혹시라도  $g'(x) > 0$ 라 생각했다면 반성하자. 언제나 끊임 없이 나오는 착각.

## COMMENT 21

$n = 1$ 일 때 서로 다른 실근의 개수는 2이고 합은 3이다.

$n \geq 2$ 일 때 서로 다른 실근의 개수는 4이고 합은  $3 \times 2^n$ 이다.

$$\sum_{n=1}^6 a_n = 3 + 3 \times \frac{4(2^5 - 1)}{2 - 1} = 375 \text{이다.}$$

## COMMENT 22

(가)에서 함수  $g(a+4) = 0$ 이고  $g'(a+4) \neq 0$ 이다.

$$g(2) = 0, \quad g'(2) = 0 \text{이므로 } g(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3(x-a-4) \text{가 되겠군.}$$

곡선  $y = g(2a-x)$ 는 곡선  $y = g(x)$ 를 직선  $x = a$ 에 대하여 대칭이동 시킨 것이다.

$|g(x)g(2a-x)|$ 가 미분가능하려면  $a$ 가 2와  $a+4$ 의 가운데 놓여야겠다.  $2a = 2 + (a+4)$ 에서  $a = 6$ 이다.

$$g(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3(x-10) \text{이고 } f(x) = (x-2)^2(x-8) \text{이다.}$$

## COMMENT 확률과 통계 27

(가)에서  $\frac{12-a}{2} = \frac{12-b}{3}$  이고, (나)에서  $\begin{cases} \frac{12-a}{2} = \frac{15-b}{3} \\ \frac{18-a}{2} = \frac{24-b}{3} \end{cases}$  이거나  $\begin{cases} \frac{12-a}{2} = -\frac{24-b}{3} \\ \frac{18-a}{2} = -\frac{15-b}{3} \end{cases}$  이다.

출제자의 성격상 당연히 두 번째 케이스.

## COMMENT 확률과 통계 28

$a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ 의 값이 3, 4, 8, 9일 확률은 각각  $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ 이고,

$a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ 의 값이 5, 6, 7일 확률은 각각  $\frac{2}{10} \times \frac{2}{10}$ 이다.

## COMMENT 확률과 통계 30

사탕을 나누어 넣는 개수로 분할하면

$$\text{Case1) } 3/2/0 \Rightarrow {}_5C_3 \times {}_3H_3$$

$$\text{Case2) } 3/1/1 \Rightarrow {}_5C_3 \times {}_2C_1 \times \frac{1}{2!} \times {}_3H_3$$

$$\text{Case3) } 2/2/1 \Rightarrow {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times \frac{1}{2!} \times {}_3H_4$$

※ 서로 구별할 수 없는 상자이므로 사탕을 넣을 때는 분배가 아니라 분할만 하면 되고, 사탕을 넣고 나면 서로 구별 가능한 상자가 된다.

## COMMENT 미적분 26

곡선  $y=f(x)$ 가 직선  $y=x$ 에 접해야 한다. 접점을  $(t, t)$ 라 하면

$f'(t)=1, f(t)=t$ 에서  $t=1, a=1$ 이다. 구하는 넓이는  $2\int_0^1(e^{x-1}-x)dx=1-\frac{2}{e}$ 이다.

※  $2\int_0^1\{x-(\ln x)+1\}dx$  아닌 것 주의.  $x$ 축 아래쪽으로 뚫려서.

## COMMENT 미적분 27

$A(1, 0)$ 이라 하면  $\overline{RA}=\overline{RP}=\tan\frac{\theta}{2}, \overline{PQ}=\tan\frac{\theta}{2}\times\tan\theta$ 이므로  $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\tan^2\frac{\theta}{2}\times\tan\theta$ 이다.

## COMMENT 미적분 28

함수  $f(f(x))$ 의 도함수  $f'(f(x))f'(x)$ 가 0일 때는  $f'(f(x))=0$  또는  $f'(x)=0$ 일 때이다.

$f'(f(x))=0$ 는 2개의 근을 가지고 대칭성을 켜려보면  $x=1$ 과  $x=3$ 을 근으로 갖는다.

$x=2$ 가 방정식  $f'(x)=0$ 의 근이므로  $f(x)=3(x-2)^2+b$ 이고  $f(1)=2$ 이므로  $b=-1$ 이다.

함수  $g(x)$ 의 도함수는  $f(x)$ 이다. 개형이 증감증이긴 한데  $g(f(x))$ 의 최솟값은  $f(x)$ 가 최솟값  $-1$ 을 가질 때겠다.

(대충 봐도 차이가 많이 나지만, 엄밀하게는  $g(x)$ 의 극솟값과 비교해 줘야 한다.) 최솟값은  $\int_0^{-1}f(t)dt=-18$ 이다.

## COMMENT 미적분 29

함수  $f(x)$ 의 그래프는 [그림1]과 같다.  $y=\frac{f(t)}{t}x$ 는 원점과 점  $(t, f(t))$ 를 지나는 직선이다.

애가 곡선  $y=f(x)$ 에 위아래로 접할 때와  $x$ 축이 될 때가 필요하다.  $x$ 축이 될 때는  $f(t)=0$ 일 때다.

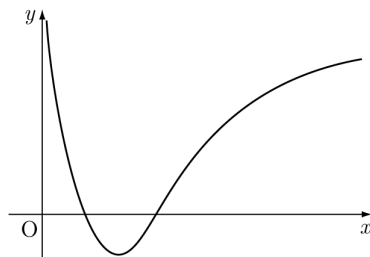
$(\ln t)^2-2\ln t=0$ 에서  $t=1$  또는  $t=e^2$ 이다. 접할 때는 접선  $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 가 원점을 지날 때다.

직선  $y=\frac{2\ln t-2}{t}(x-t)+\{(\ln t)^2-2\ln t\}$ 가  $(0, 0)$ 을 지나므로,

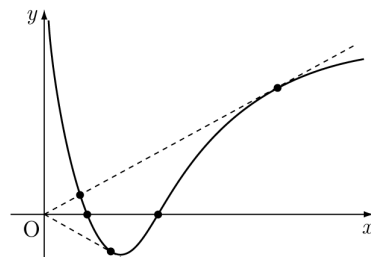
$0=(\ln t)^2-4\ln t+2$ 에서  $\ln t=2\pm\sqrt{2}, t=e^{2+\sqrt{2}}$  또는  $t=e^{2-\sqrt{2}}$ 이다.

위쪽 접선과 곡선  $y=f(x)$ 는 접점이 아닌 교점을 가지며,  $(t, f(t))$ 가 애가 될 때도  $g(t)$ 가 불연속이 된다.

이를 그래프에 나타내면 [그림2]와 같다.  $n=5$ 이며,  $\alpha_2=1, \alpha_3=e^{2-\sqrt{2}}, \alpha_4=e^2, \alpha_5=e^{2+\sqrt{2}}$ 이다.  $\alpha_1$ 은 값을 구할 수 없다.



[그림1]



[그림2]

## COMMENT 미적분 30

$f(x)=\int_0^x\sqrt{4+\{f(t)\}^2}dt$ 에서  $f(0)=0, f'(x)=\sqrt{4+\{f(x)\}^2}$ 이다.

$f'(x)>0$ 이고  $\{f'(x)\}^2=4+\{f(x)\}^2$ 의 양 변을 미분하면  $f''(x)=f(x)$ 이다.

$$\begin{aligned}
\int_0^a \{f(x)\}^3 dx &= \int_0^a \{f(x)\}^2 f''(x) dx = [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - \int_0^a 2f(x)\{f'(x)\}^2 dx \quad (\{f(x)\}^2 \text{을 미분, } f''(x) \text{를 적분하는 부분적분}) \\
&= [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - \int_0^a 2f(x)[4 + \{f(x)\}^2] dx \\
&= [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - 2 \int_0^a \{f(x)\}^3 dx - 8 \int_0^a f(x) dx \\
&= [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - 2 \int_0^a \{f(x)\}^3 dx - 8 \int_0^a f''(x) dx \\
&= [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - 2 \int_0^a \{f(x)\}^3 dx - 8[f'(x)]_0^a \\
&= [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - 2 \int_0^a \{f(x)\}^3 dx - 8[f'(x)]_0^a
\end{aligned}$$

이다. 이항하고 정리하면  $3 \int_0^a \{f(x)\}^3 dx = \{f(a)\}^2 f'(a) - 8f'(a) + 16$ 이므로  $\int_0^a \{f(x)\}^3 dx = 27$ 이다.

## COMMENT 기하 28

쌍곡선의 정의에서  $\overline{FQ} - \overline{PQ} = \overline{F'Q} - \overline{PQ} - 2a$ 이다. ( $a > 0$ )

$\overline{F'P} = \overline{F'Q} - \overline{PQ}$ 이므로  $\overline{F'P} - 2a$ 의 최대최소는  $\overline{F'P}$ 가 최대최소일 때 얻어진다.

$M = 6 - 2a$ ,  $m = 4 - 2a$ 이다.  $(6 - 2a)(4 - 2a) = 8$ 에서  $a = 1$ 이다.

## COMMENT 기하 29

$\overline{BE} = x$ 라 하자. 점 P'는 선분 AE의 중점에서 가장 가까운 때이므로  $\overline{AP'} = \frac{x}{2}$ 이다.

점 Q'는 선분 AE의 1:2 내분점에서 가장 가까운 때이므로  $\overline{DQ'} = 2$ 이다.

$\overline{AE} \cdot \overline{P'Q'}$ 의 값은  $(2, 6 - \frac{x}{2}) \cdot (6, x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x + 12$ 이다.  $x = 4$ ,  $a = \frac{2}{3}$ 이다.

## COMMENT 기하 30

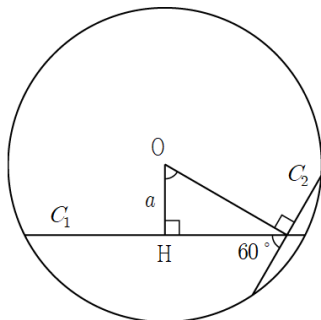
점 O에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 H, 선분 AB의 중점을 M라 하자.  $\overline{OH} = a$ 라 하면

원  $C_1$ 의 반지름의 길이는  $\sqrt{20 - a^2}$ 이고 각도 찢어보면  $\overline{OM} = 2a$ 이므로([그림1] 참고)

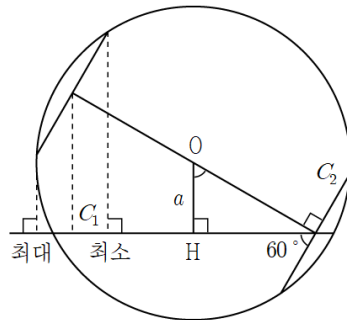
원  $C_2$ 의 반지름의 길이는  $\sqrt{20 - 4a^2}$ 이다.  $(20 - a^2)(20 - 4a^2) = 64$ 에서  $a = 2$ 이다.

점 Q는 원  $C_2$ 를 점 O에 대하여 대칭이동시킨 원이다. AB를 밑변으로 할 때 삼각형의 높이의 최댓값은  $4\sqrt{3} + 1$ , 최솟값은  $4\sqrt{3} - 1$ 이다. ([그림2] 참고)

$M = 2(4\sqrt{3} + 1)$ ,  $m = 2(4\sqrt{3} - 1)$ 이므로  $Mm = 188$ 이다.



[그림1]



[그림2]