

# [나승민/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학 연습 (2/4) |

## | 나승민 (성균관대 수학과)

이투스앤써, 이투스 네오

중간맛, 매운맛도 연습합시다

9평 잘보세요.

instagram @cremath\_david

## | 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

일해라 평가원.

[hansungeun.com/texta.html](https://hansungeun.com/texta.html) - 공개 자료 페이지.

[smartstore.naver.com/hansungeun](https://smartstore.naver.com/hansungeun) - 책 파는 데.

유튜브 한성은 / 인스타 hansungeun2

## | CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

# 수학 영역

1

5지선다형

1.  $2^2 \times 4^{\frac{3}{4}}$ 의 값은? [2점]

- ① 2                      ② 3                      ③ 4  
④ 5                      ⑤ 6

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x} - 2 - 1}$ 의 값은? [2점]

- ① 8                      ② 9                      ③ 10  
④ 11                     ⑤ 12

3.  $\int_{-2}^2 6(x^3 + x^2)dx$ 의 값은? [3점]

- ① 8                      ② 16                      ③ 24  
④ 32                     ⑤ 40

4.  $\theta$ 가 제2사분면의 각이고  $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 일 때,

$\tan\theta + \cos(\pi - \theta)$ 의 값은 [3점]

- ①  $-\frac{1}{10}$                 ②  $-\frac{1}{20}$                 ③  $\frac{1}{20}$   
④  $\frac{1}{10}$                     ⑤  $\frac{3}{20}$

5. 함수  $f(x)$ 가

$$f(x) = \int (x^3 + 2x + 1)dx - \int (x^3 + x)dx$$

이고  $f(1) = 3$ 일 때,  $f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 5                      ② 6                      ③ 7  
 ④ 8                      ⑤ 9

6. 부등식

$$\log_2(x+1) + \log_2(2-x) < 2$$

을 만족시키는 정수  $x$ 의 개수는? [3점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
 ④ 4                      ⑤ 5

7. 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1 = 8$ ,  $a_{10} = -10$ 일 때,  
 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{15}|$ 의 값은? [3점]

- ① 124                      ② 126                      ③ 128  
 ④ 130                      ⑤ 132

8. 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식  $2^{2x} - 2^{a+x} + 4 \geq 0$ 이 성립한다. 실수  $a$ 의 최댓값은? [3점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
 ④ 4                      ⑤ 5

10. 함수  $f(x) = \int_{x-2}^{x+4} (t-4)^2 dt$ 의  $x=a$ 일 때 최솟값  $m$ 을

- 찾는다.  $a+m$ 의 값은? [4점]  
 ① 13                      ② 15                      ③ 17  
 ④ 19                      ⑤ 21

9. 모든 항이 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k a_{k+1}} = 4\sqrt{2}(2^n - 1)$$

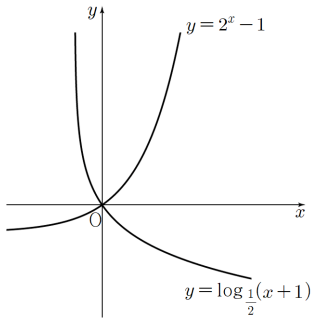
일 때,  $a_4$ 의 값은? [4점]

- ① 8                      ②  $8\sqrt{2}$                       ③ 16  
 ④  $16\sqrt{2}$                       ⑤ 32

11. 곡선  $y = 2^x - 1$  위의 점  $P(x_1, y_1)$ 와  
곡선  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$  위의 점  $Q(x_2, y_2)$ 에 대하여

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0, \quad x_1 - y_2 = 6$$

이다.  $x_2 + y_1$ 의 값은? (단,  $x_1, x_2$ 는 양의 정수이다.)  
[4점]

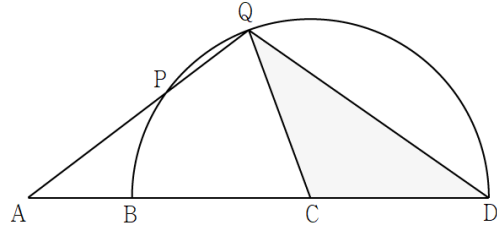


- ① 10
- ② 12
- ③ 14
- ④ 16
- ⑤ 18

12. 한 직선 위의 네 점 A, B, C, D와 선분 BD를  
지름으로 하는 반원 C 위의 점 P가

$$\overline{AC} = 5, \quad \overline{BC} = \overline{CD} = \sqrt{10}, \quad \overline{AP} = 3$$

를 만족시킨다. 직선 AP와 반원 C가 만나는 점 중 P가  
아닌 것을 Q라고 할 때, 삼각형 CDQ의 넓이는? [4점]



- ①  $\sqrt{10}$
- ②  $\frac{5\sqrt{10}}{4}$
- ③  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$
- ④  $\frac{7\sqrt{10}}{4}$
- ⑤  $2\sqrt{10}$

13. 방정식

$$|4\sin 2x + 1| = t \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

의 서로 다른 실근의 개수를  $f(t)$ 라 할 때,  
함수  $y = f(t)$ 가  $t = \alpha$ 에서 불연속인 모든  $\alpha$ 를

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$$

라 하자.  $k + f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_k)$ 의 값은? [4점]

- ① 25                      ② 22                      ③ 19  
④ 16                      ⑤ 13

14. 삼차함수  $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = xf(x)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(0) \leq g(4) \leq g(x)$ 이다.

$\int_0^4 f(x)dx = \frac{4}{3}$ 일 때,  $f'(8)$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{9}{2}$                       ② 5                      ③  $\frac{11}{2}$   
④ 6                      ⑤  $\frac{13}{2}$

15. 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여 함수  $y = \log_2 x$ 의 그래프와 함수  $y = |x - n|$ 의 그래프가 만나는 두 점의  $x$ 좌표를 각각  $a_n, b_n$ 이라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단,  $a_n < b_n$ 이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ.  $b_6 - a_6 < 5$   
 ㄴ. 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $2n < a_n + b_n$ 이다.  
 ㄷ. 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $(a_n + b_n - n)^2 < a_n b_n$ 이다.

- ① ㄴ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16. 함수  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ 에 대하여  $f'(2)$ 의 값을 구하여라. [3점]

17.  $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 12, \angle ABC = \frac{\pi}{6}$ 인 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라. [3점]



18. 함수  $y = -x^2 + 6x$ 의 그래프와 직선  $y = mx$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선  $x = 2$ 에 의하여 이등분될 때  $m$ 의 값을 구하여라. [3점]

19. 다항함수  $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - f(x)}{x^3} = 1$$

을 만족시킬 때,  $f(-2)$ 의 값을 구하여라. [3점]

20. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간  $t (t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = t^2 - 2t + 2, \quad v_2(t) = 2t - 1$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 처음으로 같아지는 순간 두 점이 만난다. 이후  $t = a$ 에서 두 점 P, Q가 다시 만날 때,  $a$ 의 값을 구하여라. [4점]

21. 등차수열  $\{a_n\}$ 과  $b_1 = 2$ 인 수열  $\{b_n\}$ 은 모든 자연수  $n$ 에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$(가) \quad b_{2n} = b_{2n-1} - a_{2n}$$

$$(나) \quad b_{2n+1} = b_{2n} + a_{2n+2}$$

$\sum_{k=1}^5 b_k = 5b_3$ 이고  $\sum_{k=1}^{10} b_k = 50$ 일 때,  $a_8 \times a_{10}$ 의 값을 구하여라. [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ 0 & (f(x) < 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수  $g(x)g(2a-x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는  $a$ 값들의 집합이

$$\{5\} \cup \{a \mid a \leq 2\}$$

이다.  $f(6)$ 이 가질 수 있는 모든 값의 범위가  $p \leq f(6) < q$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. 두 사건  $A, B$ 에 대하여

$$P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A \cap B^c) = \frac{1}{3}$$

일 때,  $P(A)$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{2}$                       ②  $\frac{3}{4}$                       ③  $\frac{5}{6}$   
④  $\frac{6}{7}$                       ⑤  $\frac{7}{8}$

24.  $(x^2 + \frac{a}{x})^4$ 의 전개식에서  $x^5$ 의 계수가  $-8$ 일 때,

$x^2$ 의 계수를 구하면? [3점]

- ①  $-24$                       ②  $-16$                       ③  $8$   
④  $16$                       ⑤  $24$

25. 이산확률변수  $X$ 가 갖는 값은 1, 2, 3, 4이고 이산확률변수  $Y$ 가 갖는 값은 3, 5, 7, 9이다. 상수  $a$ 에 대하여

$$P(Y=2k+1) = a \times P(X=k) + \frac{a}{2} \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

이고  $E(X)=2$ 일 때,  $E(3Y+2)$ 의 값은? [3점]

- ① 17                      ② 19                      ③ 21
- ④ 23                      ⑤ 25

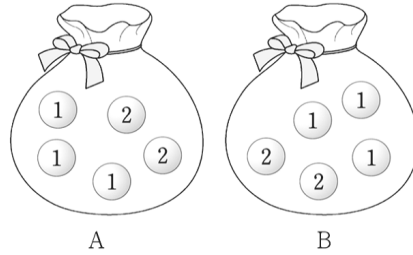
26. 어느 대학의 모집인원이 28명인 A학과는 올해 수능 4개 영역 표준점수의 총합을 기준으로 하여 성적순으로 신입생을 선발한다고 한다. 올해 A학과에 지원한 수험생이 400명이고 이들의 성적은 평균 480점, 표준편차 28점인 정규분포를 따른다고 할 때, 이 학과에 합격하기 위한 최저점수를 아래 표준정규분포표를 이용하여 구하면? [3점]

$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

- ① 518                      ② 522                      ③ 526
- ④ 530                      ⑤ 534

27. 서로 같은 사탕 4개와 서로 다른 초콜릿 3개를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?  
(단, 모든 학생은 사탕을 1개 이상 받고, 초콜릿을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)
- ① 24                      ② 27                      ③ 36  
④ 45                      ⑤ 48

28. 두 주머니 A, B에는 각각 숫자 1이 적혀 있는 공 3개와 숫자 2가 적혀 있는 공 2개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 하나의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 하나의 공을 꺼내는 시행에서 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 1일 때 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 1이었을 확률은?  
[4점]



- ①  $\frac{1}{6}$                       ②  $\frac{1}{3}$                       ③  $\frac{1}{2}$   
④  $\frac{2}{3}$                       ⑤  $\frac{5}{6}$

단답형

29. A, A, A, B, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 이웃하지 않게 나열되는 경우의 수를 구하여라. [4점]

30. 1부터 30까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 30장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 동시에 3장을 선택할 때, 카드에 적힌 세 수의 합이 30이 되는 경우의 수를 구하여라. [4점]

# 수학 영역(미적분)

5지선다형

23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{2}$                       ② 1                      ③  $\frac{3}{2}$   
④ 2                      ⑤  $\frac{5}{2}$

24. 함수  $f(x) = \ln(x^2 + x)$ 에 대하여  $f'(2)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{2}{3}$                       ②  $\frac{3}{4}$                       ③  $\frac{4}{5}$   
④  $\frac{5}{6}$                       ⑤  $\frac{6}{7}$

25. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가

$$x = 2t^3, \quad y = 3t^2$$

일 때, 시간  $t=0$ 에서  $t=2\sqrt{2}$ 까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

- ① 44                      ② 48                      ③ 52  
④ 56                      ⑤ 60

26.  $a_1 > 0$ 인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 12, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 36$$

일 때  $a_1$ 의 값은? [3점]

- ① 16                      ② 18                      ③ 20  
④ 22                      ⑤ 24



27. 함수  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-a)^2}$  의 극솟값이 1일 때,

양수  $a$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ② 1      ③  $\sqrt{2}$   
 ④ 2      ⑤  $2\sqrt{2}$

28. 함수  $f(t)$ 는 모든 실수  $t$ 에서 연속이고

$$t^2 - 4t + 5 \leq \{f(t)\}^2 \leq 2t^2 - 6t + 6$$

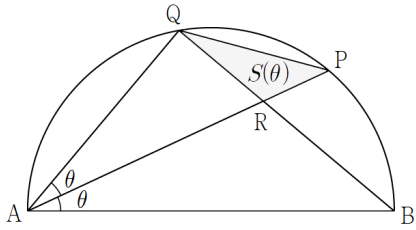
이 항상 성립한다. 원점에서 점  $P(t, f(t))$ 까지의 거리의 최솟값은? [4점]

- ①  $\sqrt{2}$       ②  $\sqrt{3}$       ③ 2  
 ④  $\sqrt{5}$       ⑤  $\sqrt{6}$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 C의 호 위의 두 점 P가 Q가  $\widehat{BP}=\widehat{PQ}$ 를 만족시킨다. 두 선분 AP와 BQ의 교점을 R,  $\angle PAB=\theta$ 라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를  $S(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값을 구하여라. [4점]



30. 양의 실수  $t$ 와 함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1) \\ x^2 \ln x & (x > 1) \end{cases}$$

에 대하여 부등식

$$mx \leq f(x) + t$$

가 항상 성립하는  $m$ 의 최댓값을  $g(t)$ 라 하자. 실수  $a$ 에 대하여  $g(a) \times e = f(e) + a$ 가 성립할 때,  $\frac{a}{g'(a)} \times g\left(\frac{6}{e^3}\right)$ 의 값을 구하여라. [4점]

# 수학 영역(기하)

5지선다형

23. 타원  $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 장축의 길이는? [2점]

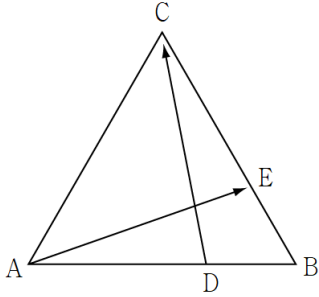
- ① 4                      ② 5                      ③ 6  
④ 7                      ⑤ 8

24. 좌표공간의 구  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 9$ 과

$z$ 축이 만나는 두 점 사이의 거리는? [3점]

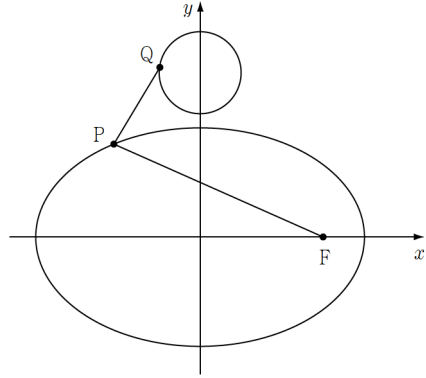
- ① 4                      ② 6                      ③ 8  
④ 10                    ⑤ 12

25. 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 1:2로 내분하는 점을 E라 하자.  $|\vec{AE} + \vec{DC}|^2$ 의 값은? [3점]



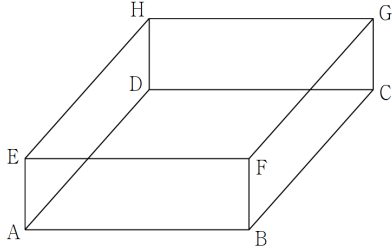
- ① 64                      ② 60                      ③ 56
- ④ 52                      ⑤ 48

26. 그림과 같이 두 초점이 F, F'인 타원  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$  위를 움직이는 점 P와 원  $x^2 + (y-4)^2 = 1$  위를 움직이는 점 Q에 대하여  $|\vec{FP} - \vec{PQ}|$ 의 최댓값은? [3점]



- ① 1                              ② 2                              ③ 3
- ④ 4                              ⑤ 5

27. 그림과 같이  $\overline{AB}=6$ ,  $\overline{AD}=8$ ,  $\overline{AE}=2$ 인 직육면체  $ABCD-EFGH$ 가 있다. 선분  $HF$  위를 움직이는 점  $P$ 에 대하여 삼각형  $AEP$ 의 둘레의 길이의 최솟값은? [3점]



- ① 8                      ② 10                      ③ 12
- ④ 14                     ⑤ 16

28.  $\overline{AB}=5$ 인 정사각형  $ABCD$ 가 있다. 선분  $CD$  위를 움직이는 점  $X$ 와 부채꼴  $ABD$ 의 호  $BD$  위를 움직이는 점  $Y$ 에 대하여

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AY}$$

를 만족시키는 점  $P$ 가 나타내는 영역을  $R$ 이라 하자.

호  $BD$  위의 한 점  $E$ 와 영역  $R$ 에 속하여 움직이는

점  $Q$ 에 대하여  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최솟값이 5일 때,

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값은? [4점]

- ① 20                      ② 25                      ③ 30
- ④ 35                      ⑤ 40

단답형

29. 좌표평면에서 초점이  $A(a, 0) (a > 0)$ 이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이  $F(c, 0), F'(-c, 0) (c > a)$ 인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을  $P$ 라 하자.

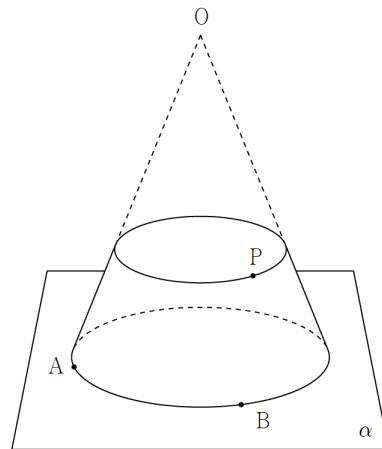
$$\overline{AF} = 8, \overline{PA} = \overline{PF}, \overline{PF'} = 2\overline{PF}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는  $p+q\sqrt{10}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하여라. (단,  $p$ 와  $q$ 는 정수이다.) [4점]

30. 그림과 같이 꼭짓점이  $O$ , 평면  $\alpha$  위에 놓여 있는 밑면  $C$ 의 반지름의 길이가 6인 원뿔을  $\alpha$ 와 평행한 한 평면으로 잘라서 생기는 원뿔대가 있다. 밑면  $C$ 의 둘레 위의 두 점  $A, B$ 와 원뿔대의  $C$ 가 아닌 밑면의 둘레 위를 움직이는 점  $P$ 에 대하여 평면  $ABP$ 와 평면  $\alpha$ 가 이루는 예각의 크기가 최대가 되도록 하는 점  $P$ 를  $Q$ , 최소가 되도록 하는 점  $P$ 를  $R$ 라 할 때,  $Q, R$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 점  $Q$ 의 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발은 선분  $AB$ 의 중점이다.
- (나) 삼각형  $ABR$ 의 넓이는  $16\sqrt{10}$ 이다.
- (다) 평면  $ABR$ 와 평면  $\alpha$ 가 이루는 예각의 크기는  $45^\circ$ 이다.

$\overline{AQ} \times \overline{BQ}$ 의 값을 구하여라. (단, 꼭짓점  $O$ 에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발은 밑면  $C$ 의 중심이고,  $\overline{AB} > 8$ 이다.) [4점]



# [나승민/한성은 모의고사 수능 연습(2/4) 정답표]

## 〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	①	03	④	04	③	05	⑤
06	②	07	④	08	②	09	⑤	10	⑤
11	③	12	③	13	①	14	②	15	①
16	4	17	12	18	2	19	27	20	4
21	24	22	80						

## 〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	⑤	25	②	26	②	27	①
28	④	29	96	30	61				

## 〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	④	25	③	26	②	27	⑤
28	②	29	2	30	12				

## 〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	②	25	①	26	④	27	③
28	④	29	18	30	84				

## COMMENT 10

$y = (t-4)^2$ 을 구간의 길이 6만큼 적분해서 최소가 되려면 구간을  $[1, 7]$ 로 잡아야 하는 각이다. 따라서  $a=3$ 이다.

## COMMENT 11

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ 는  $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1$ 이므로  $OP \perp OQ$ 이다. 곡선  $y = 2^x - 1$ 를 직선  $y = x$ 에 대하여

대칭이동시킨 다음  $x$ 축에 대하여 대칭이동시키면 곡선  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 가 된다.

대칭  $P(a, 2^a - 1)$ 이면  $Q(2^a - 1, -a)$ 이다. 직선  $OP$ 와 곡선  $y = 2^x - 1$ 가 만나는 점을  $P$ 가 유일하므로 가능.

$x_1 - y_2 = 2a = 6$ 에서  $a = 3$ 이다.  $x_2 + y_1 = 2(2^a - 1) = 14$ 이다.

## COMMENT 12

삼각형  $ACP$ 에서 코사인을 돌리면  $\cos(\angle PAC) = \frac{4}{5}$ 이다.

삼각형  $ACQ$ 에서 코사인을 돌리면  $\overline{AQ} = 5$ 이고,  $\sin(\angle QCA) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 이다.

삼각형  $CDQ$ 의 넓이는  $\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{CQ} \times \sin(\angle QCD) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ 이다.

※ 점  $C$ 에서 현  $PQ$ 에 수선의 발, 점  $Q$ 에서 선분  $BD$ 에 수선의 발 내려서 풀어도 좋다.

## COMMENT 13

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 5$ 이다.  $k = 4$ 이고

$f(\alpha_1) = 4, f(\alpha_2) = 9, f(\alpha_3) = 6, f(\alpha_4) = 2$ 이므로 답은 25이다.

## COMMENT 14

$g(0) = 0, g'(0) = 0$ 이고 (나)의 조건에서

함수  $g(x)$ 는  $x = 0, x = 4$ 에서 최솟값을 갖는다.

따라서 양수  $k$ 에 대하여  $g(x) = kx^2(x-4)^2$ 이다.

$f(x) = kx(x-4)^2$ 이고  $\int_0^4 kx(x-4)^2 dx = \frac{64k}{3}$ 이므로  $k = \frac{1}{16}$ 이다.

$f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - x + 1$ 이므로  $f'(8) = 5$ 이다.

## COMMENT 15

기역 :  $a_6 = 4$ 이고 곡선  $y = \log_2 x$ 는 두 점  $(9, 3), (10, 4)$  사이를 지나기에  $9 < b_6 < 10$ 이다.

니은 :  $\log_2 a_n = n - a_n, \log_2 b_n = b_n - n$ 이고  $\log_2 a_n < \log_2 b_n$ 이므로  $n - a_n < b_n - n$ 이다.

디글 : 두 교점의 중점의  $y$ 좌표는  $\frac{\log_2 a_n + \log_2 b_n}{2} = \log_2 \sqrt{a_n b_n}$ 이다.

점  $(n, 0)$ 을 직선  $x = \frac{a_n + b_n}{2}$ 에 대하여 대칭이동시킨 점은  $(a_n + b_n - n, 0)$ 이다.

여기서 위로 그으면  $\log_2(a_n + b_n - n)$ 의 값이  $\log_2 \sqrt{a_n b_n}$ 보다 크다.



## COMMENT 21

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하자.  $b_{2n+1} = b_{2n-1} + 2d$ 이고  $b_{2n+2} = b_{2n}$ 이다.  $b_{2n} = b$ 라 하자.

$$\sum_{k=1}^5 b_k = (b_1 + b_3 + b_5) + (b_2 + b_4) = 3b_3 + 2b \text{에서 } b_3 = b \text{이다.}$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = (b_1 + b_3 + b_5 + b_7 + b_9) + (b_2 + b_4 + b_6 + b_8 + b_{10}) = 5b_5 + 5b = 50 \text{이므로 } b_5 = 10 - b \text{이다.}$$

세 수  $b_1 = 2$ ,  $b_3 = b$ ,  $b_5 = 10 - b$ 가 등차수열을 이루므로  $b = 4$ 이다.  $d = 1$ 이구요,  $a_2 = -2$ 이다.

$a_n = n - 4$ 이므로  $a_8 a_{10} = 4 \times 6 = 24$ 이다.

## COMMENT 22

$f(x) = 0$ 이 3개의 근을 갖는 경우부터 조사하자. 작은 것부터 순서대로  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 라 하자.

함수  $g(x)$ 는  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ ,  $x = \gamma$ 에서 미분가능하지 않고,  $x \leq \alpha$  또는  $\beta \leq x \leq \gamma$ 에서  $g(x) = 0$ 이다.

함수  $g(2a - x)$ 의 그래프는  $g(x)$ 의 그래프를  $x = a$ 에 대하여 대칭시킨 것이다. 함수  $g(x)g(2a - x)$ 가 미분가능하려면  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ ,  $x = \gamma$ 에서  $g(2a - x) = 0$ 이 되어야 한다. 되면 반대쪽, 함수  $g(2a - x)$ 가 미분일 때는 자동으로 처리된다.

나는  $a$ 가 매우 큰 수일 때부터 줄여나가면서 생각했다. 잘 생각해서 아래의 결론을 얻어보시라. 케이스를 나누어

Case1)  $\beta - \alpha < \gamma - \beta$ 일 때, 구하는  $a$ 값들의 집합은  $\left\{ a \mid \beta \leq a \leq \frac{\alpha + \gamma}{2} \text{ 또는 } a \leq \alpha \right\}$ 이다. 모양 안 맞음.

Case2)  $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ 일 때, 구하는  $a$ 값들의 집합은  $\left\{ a \mid a = \beta \text{ 또는 } a = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ 또는 } a \leq \alpha \right\}$ 이다. 모양 안 맞음.

Case3)  $\beta - \alpha > \gamma - \beta$ 일 때, 구하는  $a$ 값들의 집합은  $\left\{ a \mid a = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ 또는 } a \leq \alpha \right\}$ 이다. 이거군.

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 5, \alpha = 2 \text{이므로 } \alpha = 2, \beta = 8 \text{이다.}$$

$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x - 8)(x - \gamma)$ 에서  $8 < \gamma < 14$ 이다.

$f(x) = 0$ 이 1개의 실근  $\alpha$ 를 가질 때, 구하는  $a$ 값들의 집합은  $\{a \mid a \leq \alpha\}$ 이다. 모양 안 맞음.

$f(x) = 0$ 이 2개의 실근  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ )를 가질 때,

Case1)  $f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$ 일 때, 구하는  $a$ 값들의 집합은  $\{a \mid a \leq \beta\}$ 이다. 모양 안 맞음.

Case1)  $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)^2$ 일 때, 구하는  $a$ 값들의 집합은  $\left\{ a \mid a = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ 또는 } a \leq \alpha \right\}$ 이다.

$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x - 8)^2$ 인 경우도 가능하다.  $f(x) = (x - 2)(x - 8)(x - \gamma)$ 에서  $8 \leq \gamma < 14$ 라 보면 되겠군.

$f(6) = 8(\gamma - 6)$ 에서  $8 \leq \gamma < 14$ 이므로  $16 \leq f(6) < 64$ 이다.

## COMMENT 확률과 통계 29

(전체 배열) - (A 이웃) - (B 이웃) + (A 이웃  $\cap$  B 이웃)

$$= \frac{7!}{3!2!} - \left( \frac{4!}{2!} \times 5 + \frac{4!}{2!} \times 5 \times 4 \right) - \frac{6!}{3!} + (3! \times 4 + 3! \times 4 \times 3)$$

※  $\frac{4!}{2!} \times 5$ 는 A가 모두 이웃하는 경우의 수,  $\frac{4!}{2!} \times 5 \times 4$ 는 A 중 2개만 이웃하는 경우의 수이다.

## COMMENT 확률과 통계 30

풀이1) 세 자연수  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 가  $a + b + c = 30$ 를 만족시키는 경우의 수는  ${}_3H_{27} = 406$ 이다.

여기서 두 개 이상이 같은 경우의 수를 세면 40이므로  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 가 서로 다른 수인 경우의 수는 366이다.

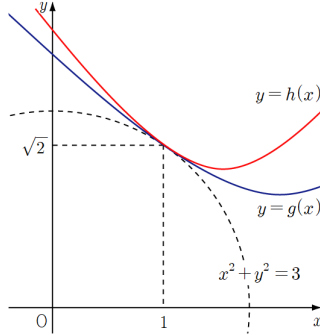
구하는 것은 세 수의 선택하는 경우의 수, 즉,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 의 집합  $\{a, b, c\}$ 의 수이다. 이는  $3!$ 으로 나눈 61이다.

풀이2) 가장 작은 수가 1일 때, 13경우, 2일 때 11경우, 3일 때 10경우, ...로 삼질해보면,

구하는 경우의 수는  $13 + 11 + 10 + 8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1 = 61$ 이다.

## COMMENT 미적분 28

$\sqrt{t^2 - 4t + 5} \leq f(t) \leq \sqrt{2t^2 - 6t + 6}$  이다.  $g(t) = \sqrt{t^2 - 4t + 5}$  와  $h(t) = \sqrt{2t^2 - 6t + 6}$  는  $g(1) = h(1) = \sqrt{2}$  이고  $g'(1) = h'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  이므로 대충 원그리면 답이  $\sqrt{3}$  이다.



## COMMENT 미적분 29

$\angle QRP = \frac{\pi}{2} + \theta$  이고  $\overline{AQ} = 2\cos 2\theta$ ,  $\overline{QR} = 2\cos 2\theta \tan \theta$  이다.

삼각형 ABR에서 사인법칙을 돌리면  $\overline{PR} = \frac{2\cos 2\theta}{\cos \theta}$  이므로  $\overline{AP} = 2\cos \theta - \frac{2\cos 2\theta}{\cos \theta}$  이다.

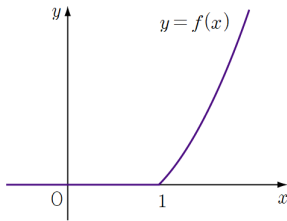
삼각형의 넓이는  $\frac{1}{2} \times 2\cos 2\theta \tan \theta \times \left(2\cos \theta - \frac{2\cos 2\theta}{\cos \theta}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$  이다.

$2\cos \theta - \frac{2\cos 2\theta}{\cos \theta} = \frac{2(\cos^2 \theta - \cos 2\theta)}{\cos \theta} = \frac{2(1 - \cos 2\theta - \sin^2 \theta)}{\cos \theta}$  이므로 대충  $2\theta^2$  이다.

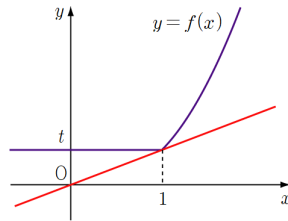
※ 풀이는 [사인법칙]과 [직각삼각형] 중 어느 쪽을 중심으로 가져가도 좋다. 의도적으로 반쯤 걸친 문항.

## COMMENT 미적분 30

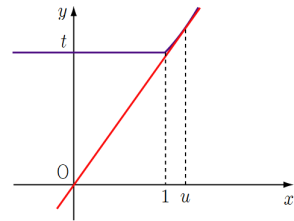
함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림1]과 같다.  $x=1$ 에서의 우접선(?)의 기울기는 1이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

$t \leq 1$  일 때,  $g(t) = t$  이다. 따라서  $g\left(\frac{6}{e^3}\right) = \frac{6}{e^3}$  이다. [그림 2] 참고.

$t > 1$  일 때,  $g(t)$ 는 직선  $y=mx$ 가 곡선  $y=f(x)+t$ 에 접할 때 얻어진다. [그림 3] 참고.

접점의  $x$ 좌표를  $u$ 라 하면  $mu = u^2 \ln u + t$  이고  $m = 2u \ln u + u$  이다. 연립하면  $u^2 \ln u + u^2 = t$  이다.

$g(a) \times e = f(e) + a$ 에서 직선  $y=g(a) \times x$ 가 곡선  $y=f(x)+a$ 이  $x=e$ 에서 서로 만나므로  $t=a$ 일 때 직선  $y=mx$ 와 곡선  $y=f(x)+t$ 는  $x=e$ 에서 서로 접한다.

따라서  $t=a$ 일 때  $u=e$ 이므로  $a=2e^2$ ,  $g(a)=3e$ 이다.

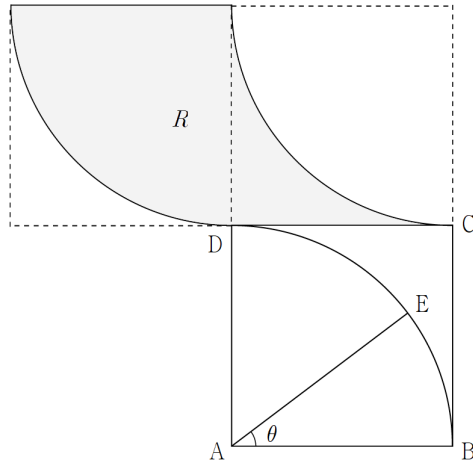
$u^2 \ln u + u^2 = t$ 를 미분하면  $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2u \ln u + 3u}$  이고

$m = 2u \ln u + u$ 를 미분하면  $\frac{dm}{dt} = (2 \ln u + 3) \times \frac{du}{dt} = \frac{1}{u}$  이다.

$t=a$ 일 때  $\frac{dm}{dt}$ 의 값은  $\frac{1}{e}$ 이다.

## COMMENT 기하 28

잘 생각해서 그리면 다음 그림과 같다.



$A(0, 0)$   $B(5, 0)$ ,  $E(5\cos\theta, 5\sin\theta)$ 라 하면 최솟값은  $50\sin\theta - 25$ 이다.

이 값이 5이므로  $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 이다. 최댓값은  $(5, 5) \cdot (5\cos\theta, 5\sin\theta) = 35$ 이다.

## COMMENT 기하 29

$c = a + 8$ , 점 P의  $x$ 좌표는  $a + 4$ 이다.

포물선의 정의에서  $\overline{PA} = 2a + 4$ 이다.  $\overline{PF} = 2a + 4$ ,  $\overline{PF'} = 4a + 8$ 이다.

점 P에서  $x$ 축에 수선의 발을 내리고 삼각형 2개에서 피타고라스 돌려보면

$$(4a + 8)^2 - (2a + 12)^2 = (2a + 4)^2 - 4^2$$

이다. 풀면  $a = \sqrt{10}$ , 장축의 길이는  $6a + 12 = 12 + 6\sqrt{10}$ 이다.

## COMMENT 기하 30

(가)에서  $C$ 가 아닌 밑면의 둘레의 평면  $\alpha$  위로의 정사영과 직선  $AB$ 가 서로 접한다.

$C$ 가 아닌 밑면의 반지름의 길이를  $r$ 이라 하자. (다)에서 원뿔대의 높이는  $2r$ 이다.

삼각형의 넓이는  $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{6^2 - r^2} \times 2\sqrt{2}r$ 이므로  $r = 4$ 이다.  $\overline{AQ} = \overline{BQ} = \sqrt{84}$ 이다.