[권구승/한성은 모의고사]

대학수학능력시험 수학 연습 (3/4)

권구승 (서울대)

대찬학원(분당), 미래탐구(목동), 이투스앤써

네 손으로 푼만큼 점수 나온다.

한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

사실 푼만큼은 아니고 맞힌만큼 나오죠.

hansungeun.com/texta.html – 공개 모의고사 페이지

써밋 N제(미적분), 써밋 N제(수학2) 출간 – 책 사주세요.

CCL

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{3}\times 3^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=x^3-2x-2$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

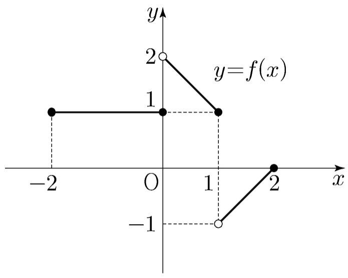
3. $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

6. 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 a_7 = 64, \quad a_8 < 0$$

일 때, a_5의 값은? [3점]

① -10　② -8　③ -6
④ -4　⑤ -2

7. $\overline{AB}=8$이고 $\angle A=45^\circ$, $\angle B=75^\circ$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{6}$　② $\frac{7\sqrt{6}}{3}$　③ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$
④ $3\sqrt{6}$　⑤ $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x \le 2) \\ -x^2+6x & (x>2) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

9. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2-nx-n=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{6}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)$의 값은? [4점]

① 117 ② 122 ③ 127
④ 133 ⑤ 138

10. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=30-2t$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리는? [4점]

① 210 ② 215 ③ 220
④ 225 ⑤ 230

11. 직선 $y=-x+b(b>0)$이 y축, 함수 $f(x)=a^x(a>1)$의 그래프, 직선 $y=x$와 만나는 점을 각각 A, B, C라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이다. $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{10}$일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

12. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1-x)=f(1+x)$
(나) $|f'(x)|\le x^2-4x+7$

실수 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

13. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$$

을 만족시킨다. $a_k>a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(x-3)g(x)\le 0$
(나) $\{g(x)-2\}^2=\{f(x)\}^2$
(다) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 a의 값은 0과 1 뿐이다.

$g(-1)-g(2)$의 값은? [4점]

① 14 ② 12 ③ 10
④ 8 ⑤ 6

15. 수열 $\{a_n\}$은 상수 a와 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+a & (a_n \le n) \\ a_n-n & (a_n>n) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4=6$, $a_8=8$이 되도록 하는 실수 a, a_2의 모든 순서쌍 $(a,\ a_2)$의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

단답형

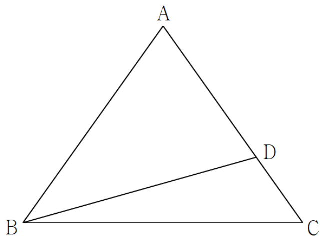
16. $\log_5 80+\log_5 \dfrac{5}{16}$의 값을 구하여라. [3점]

17. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=-x^3+3, \quad f(2)=8$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하여라. [3점]

18. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BD}}$가 되도록 잡는다. $\overline{\mathrm{AD}}=4$일 때, 선분 BC의 길이는 k이다. k^2의 값을 구하여라. [3점]



19. 등차수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{3n} a_k = 9n^2$$

일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_{3k}$의 값을 구하여라. [3점]

20. 함수 $f(x)=-x^2+4x$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_t^x f(s)\,ds$$

의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$의 치역의 모든 원소의 합을 S, 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수를 m이라 할 때, $S+m$의 값을 구하여라. [4점]

21. 자연수 k에 대하여 집합 A_k와 B_k를

$$A_k=\left\{\cos\frac{2(l-1)}{k}\pi \,\middle|\, l\text{은 자연수}\right\},$$
$$B_k=\left\{\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi \,\middle|\, m\text{은 자연수}\right\}$$

라 하자. $n(A_k)=21$일 때, $n(B_k)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라. [4점]

22. $f(0)=0$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

에 대하여 함수 $|g(x)g(x-2)|$는 오직 $x=6$에서만 미분가능하지 않다. $f(4)$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. $(1+x)^7$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 14 ② 21 ③ 28 ④ 35 ⑤ 42

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{9}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

25. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a, 네 개의 수 2, 4, 6, 8 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $1<\frac{b}{a}<3$일 확률은? [3점]

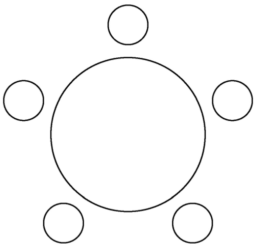
① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{9}{16}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{16}$

26. 어느 회사에서 일하는 플랫폼 근로자의 일주일 근무 시간은 평균이 m시간, 표준편차가 5시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 일하는 플랫폼 근로자 중에서 임의추출한 16명의 일주일 근무 시간의 표본평균이 38시간 이상일 확률을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 0.8413일 때, m의 값은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 39.25 ② 39.75 ③ 40.25
④ 40.75 ⑤ 41.25

27. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하지 않는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 240 ② 220 ③ 200 ④ 180 ⑤ 160

28. 집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 공집합이 아닌 부분집합 31개 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고 나열된 순서대로 A, B라 할 때, A, B가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$n(A\cap B)=2$이고 $A\cup B=U$이다.

① $\frac{2}{31}$ ② $\frac{7}{93}$ ③ $\frac{8}{93}$ ④ $\frac{3}{31}$ ⑤ $\frac{10}{93}$

단답형

29. 확률변수 X는 다음 시행의 결과에 의해 정해지는 점수이다.

> (가) 0점에서 시작한다.
> (나) 한 개의 동전을 8번 던져
> 앞면이 나올 때마다 4점을 얻고
> 뒷면이 나올 때마다 2점을 잃는다.

$\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하여라. [4점]

30. 빨간색, 파란색, 노란색 공 각각 1개씩과 흰 공 7개가 있다. 이 10개의 공을 세 개의 상자 A, B, C에 남김 없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 하는 경우의 수를 구하여라.
(단, 흰 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

5지선다형

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(3n-1)(3n+2)}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24. $\int_1^e x\ln\frac{1}{x}dx$의 값은? [3점]

① $-\frac{e^2+1}{6}$ ② $-\frac{e^2+1}{5}$ ③ $-\frac{e^2+1}{4}$
④ $-\frac{e^2+1}{3}$ ⑤ $-\frac{e^2+1}{2}$

25. 매개변수 t로 나타내어진 함수

$$x=\frac{1-t}{1+t},\quad y=\frac{t^2}{1-t}$$

에서 $t=-2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

26. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

27. 역함수 $g(x)$를 갖는 함수

$$f(x)=ax+3\sin x \ (a>0)$$

에 대하여 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능하지 않은 실수 p가 존재한다. 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능하지 않은 모든 양수 $g(p)$를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 α_1, α_2, $\cdots$, α_n, $\cdots$라 할 때, $a\alpha_3$의 값은? [3점]

① 3π ② 6π ③ 9π ④ 12π ⑤ 15π

28. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 모든 실수 x에 대하여

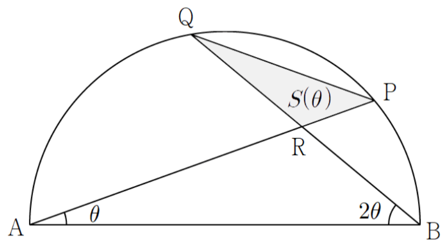
$$g'(x)=\int_0^1 x^3\sqrt{t}\,\sin(x\sqrt{t})dt$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대인 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $k\pi<a_6<(k+1)\pi$인 자연수 k의 값은? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 P, Q는 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$, $\angle \mathrm{QBA}=2\theta$를 만족시킨다. 두 선분 AP, BQ의 교점을 R, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{q}{p}$일 때, p^2+q^2의 값을 구하여라. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-ke^{-x} \le l(x) \le \frac{1}{4}e^x$$

을 만족시키는 일차함수 $l(x)$에 대하여 직선 $y=l(x)$의 기울기의 최댓값이 1이다. 위 부등식을 만족시키는 일차함수 $l(x)$에 대하여 직선 $y=l(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이의 최댓값이 M일 때, $e^5 \times kM$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(-1,\ 2,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, 점 Q를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 점 R의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, $a+b+c$의 값은? [2점]

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

24. 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $(4,\ 4\sqrt{2})$에서의 접선을 l이라 하자. 이 포물선의 준선과 직선 l의 교점의 y좌표는? [3점]

① -2　② $-\sqrt{2}$　③ 0　④ $\sqrt{2}$　⑤ 2

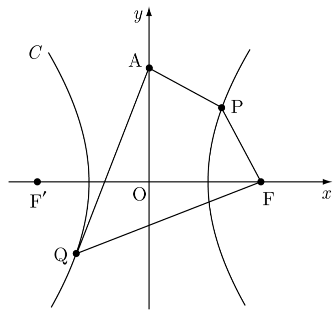
25. 좌표평면에 원 $x^2+(y-2)^2=1$이 있다. 점 A(2, 2)에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

26. 좌표평면에 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$이고 주축의 길이가 4인 쌍곡선 C가 있다. 점 A$(0, c)$에 대하여 쌍곡선 위의 두 점 P와 Q는

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{FP}}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{FQ}}$

를 만족시킨다. 사각형 APFQ의 둘레의 길이가 20일 때, $\overline{\mathrm{AP}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AP}}<\overline{\mathrm{AQ}}$) [3점]

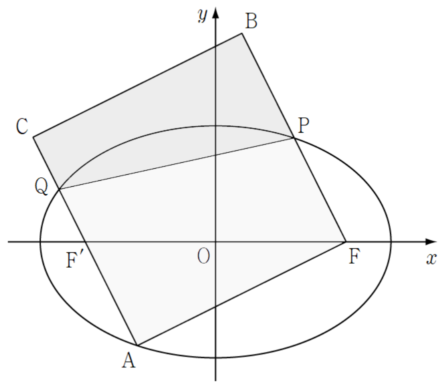


① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

27. 좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 구 S가 x축과 y축에 각각 접하고, z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S의 중심 P에서 z축, xy평면까지의 거리가 각각 $3\sqrt{2}$, 4일 때, 구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리는? [3점]

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{5}$
④ 8 ⑤ $2\sqrt{3}$

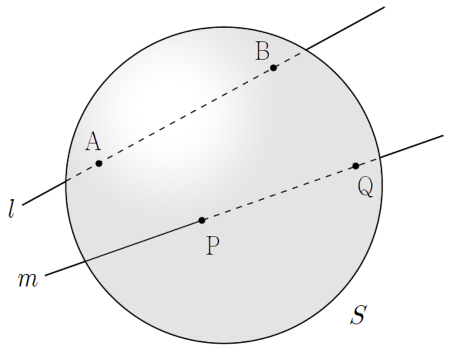
28. 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$$(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 위의 점 A와 타원 밖의 두 점 B, C에 대하여 사각형 AFBC가 정사각형이고 점 F$'$는 선분 AC 위의 점이다. 타원이 두 선분 FB, AC와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때 두 사각형 AFPQ, BCQP의 넓이는 각각 10, 6이다. b^2의 값은? [4점]



① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S와 두 직선 l, m이 있다. 구 S와 직선 l이 만나는 두 점을 각각 A, B, 구 S와 직선 m이 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ가 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고 $\angle\mathrm{ABQ}=\frac{\pi}{2}$, 사면체 ABPQ의 부피가 $2\sqrt{2}$이다. 삼각형 BPQ의 세 점 A, P, Q를 포함하는 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하여라. [4점]



30. 좌표평면 위의 두 점 A(2, 1), B(−1, −2)에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\left(\frac{2}{3}\le t\le 1\right)$
(나) $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\le 1$

점 R(1, 1)에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값은 $a+b\sqrt{5}$이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이고 a, b는 자연수이다.) [4점]

[권구승/한성은 모의고사 수능 연습(3/4) 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	①	03	④	04	②	05	②
06	①	07	③	08	⑤	09	④	10	④
11	⑤	12	③	13	④	14	⑤	15	④
16	2	17	6	18	48	19	120	20	10
21	62	22	8						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	④	24	②	25	⑤	26	①	27	①
28	③	29	136	30	390				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	③	25	②	26	②	27	⑤
28	①	29	25	30	32				

〈기하〉

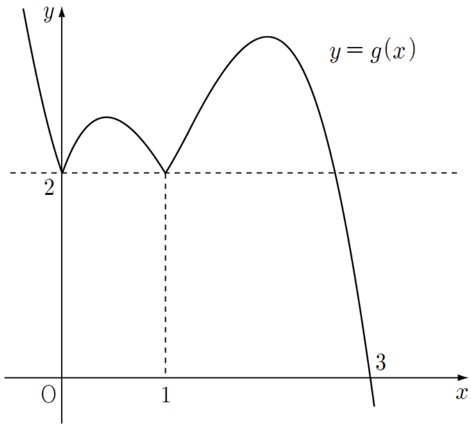
문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	②	24	④	25	④	26	③	27	①
28	②	29	6	30	17				

COMMENT 12

함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f'(1)=0$, $f'(x)=2a(x-1)$이다.
$-x^2+4x-7 \le f'(x) \le x^2-4x+7$이다. a의 최댓값은 직선 $y=2a(x-1)$이 곡선 $y=x^2-4x+7$와 접할 때이다.
※ $2a(x-1) \le x^2-4x+7$에서 $x^2-(4+2a)x+7+2a \ge 0$, 판별식의 부호를 조사하면 $-3 \le a \le 1$이다.

COMMENT 14

(가)에서 $x<3$일 때 $g(x) \ge 0$이고 $x>3$일 때 $g(x) \le 0$이다. $g(3)=0$이다.
(나)에서 $g(x)=2+f(x)$ 또는 $g(x)=2-f(x)$이다. 함수 $f(x)$는 0, 1을 근으로 가져야 한다.
$f(x)=x(x-1)(x-a)$이면 $g(x)$는 $0<x<1$일 때는 $2+f(x)$이고 나머지 구간에서는 $2-f(x)$이다.
$g(3)=0$이므로 $2-f(3)=0$에서 $f(x)=x(x-1)\left(x-\frac{8}{3}\right)$이다. $g(-1)=2-f(-1)=\frac{28}{3}$, $g(2)=2-f(2)=\frac{10}{3}$이다.



COMMENT 15

$a_5=2$, $a_6=a+2$이고, a_7은 $2a+2$ 또는 $a-4$,
a_8은 $3a+2$ 또는 $2a-5$ 또는 $2a-4$ 또는 $a-11$이다.
$a_8=8$에서 a의 값은 2, 6, 19가 가능하다.
6.5는 점화식을 선택하는 범위를 만족시키지 않는다.

a_3은 9 또는 $6-a$이고 a_2는 11 또는 $9-a$ 또는 $8-a$, $6-2a$이다. 이 중 점화식을 선택하는 범위를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ a_2)$는

$(2,\ 11)$, $(6,\ 11)$, $(6,\ -6)$, $(19,\ 11)$, $(19,\ -10)$, $(19,\ -32)$

가 가능하다.

COMMENT 19

$a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=9n^2-9(n-1)^2$에서 $a_n=2n-1$이다.

COMMENT 20

$g'(x)=f(x)$이므로 함수 $g(x)$는 $x<0$에서 감소, $0<x<4$에서 증가, $4<x$에서 감소한다.
삼차함수 $g(x)$의 비율관계를 치고 $y=g(x)-g(t)$의 근의 개수를 생각하면 $h(t)$의 값은

$t<-2$ 또는 $6<t$일 때 1,
$t=-2,\ 0,\ 4,\ 6$일 때 2,
$-2<t<0$ 또는 $0<t<4$ 또는 $4<t<6$일 때 3

이다.

COMMENT 21

$k=40$ 또는 $k=41$이다. 곡선 $y=\cos x$는 $x=\pi$에 대하여 대칭이고,

$$\cos\frac{0}{k}\pi,\ \cos\frac{2}{k}\pi,\ \cos\frac{4}{k}\pi,\ \cdots,\ \cos\frac{2(k-1)}{k}\pi,\ \cos\frac{2k}{k}\pi\left(=\cos\frac{0}{k}\pi\right)$$

중 k가 홀수이냐 짝수이냐에 따라 $\cos\pi$값이 있냐 없냐로 나눠서.

$n(B_{40})=21$, $n(B_{41})=41$이다.

$$\sin\frac{0}{k}\pi,\ \sin\frac{2}{k}\pi,\ \sin\frac{4}{k}\pi,\ \cdots,\ \sin\frac{2(k-1)}{k}\pi,\ \sin\frac{2k}{k}\pi\left(=\sin\frac{0}{k}\pi\right)$$

$k=40$일 때는 대충 2개씩 겹치고 $k=41$일 때는 대충 안 겹친다.

COMMENT 22

$g(0)=0$, $g'(0)=0$이므로 곡선 $y=g(x)$는 $x=0$에서 x축에 접한다.

$|g(x)g(x-2)|=|g(x)|\times|g(x-2)|$이다. 수 $|g(x)g(x-2)|$가 미분가능하려면
두 함수 $|g(x)|$, $|g(x-2)|$ 중 어느 한쪽이 미분불가능할 때 다른 한쪽은 함숫값이 0이 되어야 한다.

방정식 $g(x)=0$의 $x=0$이 아닌 실근의 개수는 최대 2이다.

Case1) 방정식 $g(x)=0$의 $x=0$이 아닌 실근이 없으면 함수 $|g(x)g(x-2)|$가 미분불가능한 x값이 발생하지 않는다.

Case2) 방정식 $g(x)=0$의 $x=0$이 아닌 실근의 개수가 1이면

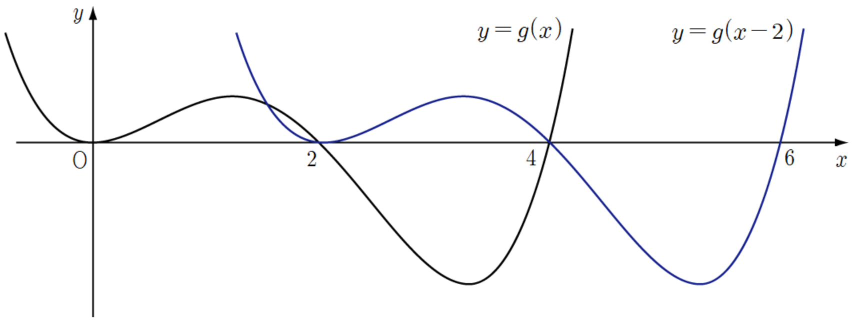
Case2-1) $g(x)=\frac{1}{4}x^2(x-a)^2$일 때는 함수 $|g(x)g(x-2)|$가 미분불가능한 x값이 발생하지 않는다.

Case2-2) $g(x)=\frac{1}{4}x^3(x-a)$일 때, $|g(x)|$는 $x=a$에서 미분불가능, $|g(x-2)|$는 $x=a+2$에서 미분불가능이다.

$a+2=6$이면 $|g(x-2)|$가 $x=a$에서 0이어야 하고 $a=6$이면 $|g(x)|$가 $x=a+2$에서 0이어야 한다. 잘 안되네.

Case3) 방정식 $g(x)=0$의 $x=0$이 아닌 실근의 개수가 1일 때 $g(x)=\frac{1}{4}x^2(x-a)(x-b)$라 하자.

$|g(x)|$는 $x=a$, $x=b$에서 미분불가능, $|g(x-2)|$는 $x=a+2$, $x=b+2$에서 미분불가능이다.
야, 대충 $\{a, b\}=\{2, 4\}$인 삘 오지? 일단 하나는 2를 더해서 6이 되어야 하니까 4이고,
이제 $x=4$에서의 미분불가능을 지워주는 근이 필요하니까 나머지 하나는 2이다.



COMMENT 확률과 통계 28

전체 경우의 수는 31×30이고, 사건의 경우의 수는 80이다.
벤 다이어그램에서 $A\cap B$ 영역에 오는 원소를 선택하는 경우의 수 ${}_5C_2$와,
나머지 원소를 $A-B$ 영역 또는 $B-A$ 영역에 넣는 경우의 수 2^3의 곱이다.

COMMENT 확률과 통계 29

앞면이 나온 횟수 $Y\sim B\left(8,\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 $X=4Y-2(8-Y)=6Y-16$이다.

COMMENT 확률과 통계 30

빨파노를 몇 개씩 묶는지에 따라 분류하자.

Case1) 3/0/0인 경우 : $3\times{}_3H_3=30$

Case2) 2/1/0인 경우 : ${}_3C_2\times 3!\times{}_3H_4=270$

Case3) 1/1/1인 경우 : $3!\times{}_3H_4=90$

COMMENT 미적분 28

$g'(x)=\int_0^1 x^3\sqrt{t}\sin(x\sqrt{t})dt$에서 $x\sqrt{t}=u$로 치환하면

$$g'(x)=\int_0^x 2u^2\sin u du$$

이다. $g''(x)=2x^2\sin x$는 $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=3\pi$, $\cdots$에서 0이고 사이사이의 넓이를 째려보면

$g'(x)=0$의 근이 구간 $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, $\cdots$에 각각 하나씩 존재한다.

이 중 $g(x)$가 극대가 되는 x값은 구간 $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, $(5\pi, 6\pi)$, $\cdots$에 있는 것들이다.

COMMENT 미적분 29

삼각형 ABR에서 사인법칙 쓰고 싶은 각이다. $\overline{PR}=\overline{AP}-\overline{AR}=2\cos\theta-\dfrac{2\sin2\theta}{\sin3\theta}$이다.

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\left(2\cos\theta-\dfrac{2\sin2\theta}{\sin3\theta}\right)\times\left(2\cos2\theta-\dfrac{2\sin\theta}{\sin3\theta}\right)\times\sin3\theta$이고 $\dfrac{q}{p}=\dfrac{4}{3}$이다.

COMMENT 미적분 30

기울기가 최대일 때는 직선이 두 곡선에 동시에 접할 때이다.

곡선 $y=-ke^{-x}$와의 접점을 $(s, -ke^{-s})$, 곡선 $y=\dfrac{1}{4}e^x$와의 접점을 $\left(t, \dfrac{1}{4}e^t\right)$라 하면

$$ke^{-s}=\frac{1}{4}e^t=\frac{\frac{1}{4}e^t+ke^{-s}}{t-s}$$

이다. 연립하여 풀면 $k=\dfrac{4}{e^2}$이다. 참고로 $s=\ln4-2$, $t=\ln4$이다.

※ 기울기가 1을 이용하여 $t=\ln4$를 먼저 뽑을 수도 있고,

곡선 $y=-e^{-(x-\ln k)}$와 곡선 $y=e^{x-\ln4}$가 서로 점대칭임을 이용할 수 있다.

직선 $y=l(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형이 언제 가장 넓어질지 생각하자.

곡선 $y=\dfrac{1}{4}e^x$보다 곡선 $y=-\dfrac{4}{e^2}e^{-x}$이 원점에서 멀어, 곡선 $y=-\dfrac{4}{e^2}e^{-x}$에 접할 때 답이 나온다.

아니면 굳이 k를 설정해서 구하게 하질 않았겠지.

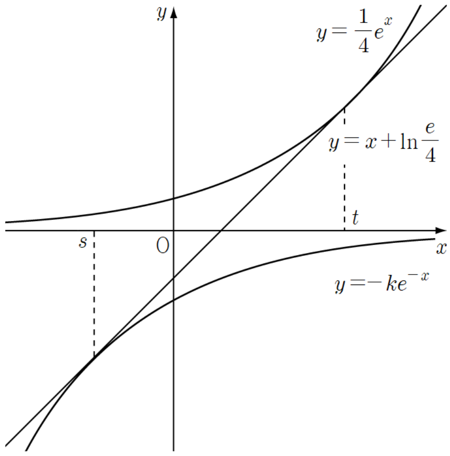
접점을 $(u, -ke^{-u})$라 하자. 접선의 방정식은 $y=ke^{-u}(x-u)-ke^{-u}$이고

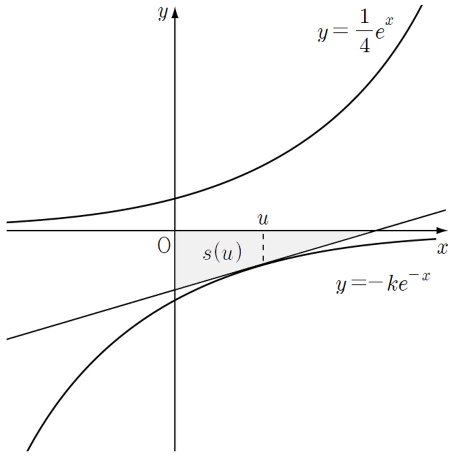
x절편은 $u+1$, y절편은 $-k(u+1)e^{-u}$, 삼각형의 넓이는 $s(u)=\left|\dfrac{k}{2}(u+1)^2e^{-u}\right|$이다.

k는 $\dfrac{4}{e^2}$이다. 쓰기 귀찮아서..

u는 두 곡선에 동시에 접할 때의 접점의 x값인 $s=\ln4-2$보다 크거나 같아야 한다.

범위에서 $s(u)=\left|\dfrac{2}{e^2}(u+1)^2e^{-u}\right|$의 값은 $u=1$일 때 최댓값 $\dfrac{8}{e^3}$을 가진다.





COMMENT 기하 28

정사각형 AFBC의 넓이가 16이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=4$이다. $\overline{\mathrm{AF'}}=l$이라 하자.

대칭 째려보면 $\overline{\mathrm{FP}}=l$이고 넓이에서 $\overline{\mathrm{AQ}}=5-l$, 직각삼각형 AFQ에서 $\overline{\mathrm{FQ}}=\sqrt{4^2+(5-l)^2}$이다.

타원의 정의에서 $\sqrt{4^2+(5-l)^2}+(5-2l)=4+l$이다. 풀면 $l=2$, $a=3$, $c=\sqrt{5}$, $b=2$이다.

COMMENT 기하 29

구의 중심 O는 삼각형 APQ의 무게중심이다. 점 B에 대하여

① $\overline{\mathrm{OB}}=2$이다.

② 선분 AQ를 지름으로 하는 구 위의 점이다.

$\Rightarrow$ 선분 AQ의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{MB}}=\sqrt{3}$이다.

③ $\angle\mathrm{OMB}=\frac{\pi}{2}$이므로 점 B는 OM에 수직인 평면 위의 선분 AQ를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

③ 평면 APQ까지의 거리가 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$이다.

점 B에서 APQ평면에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 $\overline{\mathrm{MB'}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

COMMENT 기하 30

$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\{\overrightarrow{\mathrm{RO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\}$에서 최소는 점 P가 점 A일 때 $-1-\sqrt{5}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RO}}$가 최소이고 점 Q를 점 $(-\sqrt{5},\ 0)$으로 박으면 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$도 최소이다.

최대일 때는 점 P가 점 $(1,\ 0)$, 점 Q가 점 B일 때 3이다.

이때가 $|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|\cos\theta$가 동시에 최대이다.