[나승민/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학 연습 (1/4) **|**

나승민 (성균관대 수학과)

이투스 네오, 미래탐구목동

방향성을 잃지않고, 밀도있게 나아가기

instagram @cremath_david

한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

[이제 어떻게 공부할까요?]라는 질문이 많아지는 시기입니다.
제대로 공부하고 있는 학생은 거의 하지 않는 질문입니다.

hansungeun.com/texta.html – 공개 자료 페이지.
smartstore.naver.com/hansungeun – 책 파는 데.
유튜브 한성은 / 인스타 hansungeun2

수학 영역

5지선다형

1. $\left(3\times3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

2. $\cos\frac{5}{6}\pi$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\int_{-1}^{2}4x^3dx$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

4. 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{33}\frac{3}{a_ka_{k+1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{93}{100}$ ② $\frac{24}{25}$ ③ $\frac{99}{100}$ ④ $\frac{51}{50}$ ⑤ $\frac{21}{20}$

5. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\frac{\log_a b}{2} = \frac{\log_b c}{3} = \frac{\log_c a}{4}$$

를 만족시킬 때, $2\log_b a + 3\log_c b + 4\log_a c$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ③ $\sqrt[3]{3}$
④ $2\sqrt[3]{3}$ ⑤ $6\sqrt[3]{3}$

6. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$f(t) = t^2 - 6t, \quad g(t) = 10t - t^2$$

이다. 두 점 P와 Q가 서로 같은 방향으로 움직이는 시각 t의 범위는? [3점]

① $6 < t < 8$ ② $5 < t < 7$ ③ $4 < t < 6$
④ $3 < t < 5$ ⑤ $2 < t < 4$

7. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - f(x)}{x - 3} = 4$$

를 만족시킬 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 y절편은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

8. 두 실수 α, β가

$$\alpha\beta = 32, \quad \log_2\alpha \times \log_2\beta = 6$$

를 만족시킬 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

9. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은

$$a_{n+1} = \begin{cases} -a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 1 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{42} a_k = \frac{1}{2}$일 때, a_1의 값은?
(단, $0 < a_1 < 1$이다.) [4점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

10. $0 < x < 2\pi$에서 부등식 $(\log_\pi x - 1)(2\cos x - 1) < 0$의 해가 $a < x < b$ 또는 $c < x < d$일 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, $a < b < c < d$이다.) [4점]

① 3π ② $\frac{10}{3}\pi$ ③ $\frac{11}{3}\pi$
④ 4π ⑤ $\frac{13}{3}\pi$

11. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=$(우변)$=1$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{m+1}\times\frac{m(m+1)}{2}$$

이다. $n=m+1$일 때

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2$$

$$=(-1)^{m+1}\times\frac{m(m+1)}{2}+\boxed{\text{(가)}}$$

$$=(-1)^{m+2}\left\{-\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)^2\right\}$$

$$=(-1)^{m+2}\times\left(\boxed{\text{(나)}}\right)$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(4)g(4)$의 값은? [4점]

① 275 ② 300 ③ 325 ④ 350 ⑤ 375

12. $f(0)=f'(0)$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 최댓값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq f'(2)$이다.

(나) 열린 구간 $(-1, 3)$에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $(x_1-x_2)\{f(x_1)-f(x_2)\}\leq 0$이다.

① -35 ② -30 ③ -25 ④ -20 ⑤ -15

13. 세 점 O(0, 0), A($2n$, 0), B(n, $\sqrt{3}n$)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이가 두 점 O, A를 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 의하여 이등분될 때, $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① $36\sqrt{3}$ ② $39\sqrt{3}$ ③ $42\sqrt{3}$
④ $45\sqrt{3}$ ⑤ $48\sqrt{3}$

14. 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=(x-1)-\int_{1}^{x} f(t)dt$$

는 다음 조건을 만족시킨다.

$x \ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge 0$이다.

$f(0)$의 최솟값은? [4점]

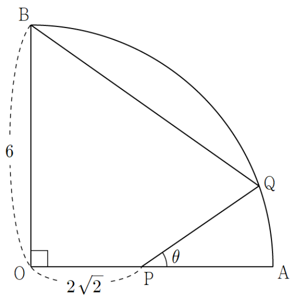
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA 위의 점 P와 호 AB 위의 점 Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{2}$

(나) $\angle \mathrm{QPA}=\theta$라 할 때 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\overline{\mathrm{BQ}}$의 값은? [4점]



① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ 8 ⑤ $4\sqrt{5}$

단답형

16. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_4+a_5=9$, $a_6=6$일 때, a_4+a_8의 값을 구하여라. [3점]

17. 함수 $f(x)=2|\sin\pi x|+4$는 주기가 a인 주기함수이고, $f(x)$의 최솟값은 m, 최댓값은 M이다. $a+m+M$의 값을 구하여라. [3점]

18. 곡선 $y=x^2-4x+5$의 접하는 직선 중 점 $(4,\ 2)$를 지나는 두 직선을 l_1, l_2라 할 때, 두 직선 l_1, l_2의 기울기의 곱을 구하여라. [3점]

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선 l이 점 $(6,\ f(6))$을 지날 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라. [3점]

20. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - n$

(나) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (n-2)2^n + 2$

$b_5 + b_6$의 값을 구하여라. [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 극한값

$$\lim_{x\to n}\frac{f(x)g(x)}{(x-n)^n} \quad (n=1,\ 2,\ 3)$$

가 존재하고 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $g(5)$의 값을 구하여라. [4점]

22. 최솟값이 2인 사차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$f(x)=f(t)$$

의 서로 다른 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a는 모두 5개이고 이를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열한 것이 a_1, a_2, $\cdots$, a_5이다.

$$a_3-a_2=2,\quad f(a_3)-f(a_2)=4,\quad g(a_3)-g(a_2)=3$$

일 때, $f(7)$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

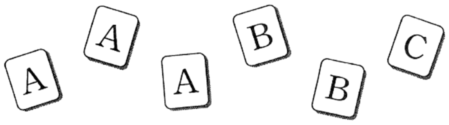
23. 다항식 $(2x+1)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는? [2점]

① 24 ② 22 ③ 20 ④ 18 ⑤ 16

24. 한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. ab가 6의 약수일 때, $a+b$도 6의 약수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

25. A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, B가 적힌 두 장의 카드가 서로 이웃할 확률은? [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

26. 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 하나를 택해 그 값을 X라 하고, 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(X \le 5\sigma) = \mathrm{P}(\overline{X} \ge 9\sigma)$를 만족시키는 σ의 값은? [3점]

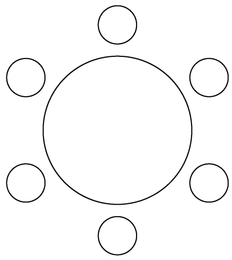
① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

27. 착한 의학자 석태는 전 세계에 확산된 바이러스 모르나19의 감염여부를 검사하는 진단키트를 개발하였다. 이 진단키트는 모르나19에 감염된 환자를 감염자로 진단할 확률이 98%이고, 감염되지 않은 환자를 비감염자로 진단할 확률이 95%라고 한다. 어느 진료소에서 모르나19에 감염된 환자 100명과 감염되지 않은 환자 300명을 대상으로 이 진단키트를 사용하였다. 이 400명 중 임의로 택한 한 명의 환자가 진단키트에서 감염자로 진단 당했을 때, 이 환자가 실제로 모르나19에 감염된 환자일 확률은? [3점]

① $\frac{92}{113}$ ② $\frac{94}{113}$ ③ $\frac{96}{113}$
④ $\frac{98}{113}$ ⑤ $\frac{100}{113}$

28. 1학년 학생 1명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) 2학년 학생끼리 이웃하지 않는다.
(나) 적어도 한 명의 3학년 학생은 다른 3학년 학생과 이웃하지 않는다.



① 48 ② 60 ③ 72
④ 84 ⑤ 96

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. [4점]

> (가) $x+y+z=19$
> (나) x, y, z는 어떤 삼각형의 세 변의 길이이다.

30. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 2만큼, 3 이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 18번 반복하여 이동된 점 P와 원점 사이의 거리의 제곱을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. $\int_{\ln 2}^{\ln 8} e^x dx$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

24. 실수 α에 대하여 $\tan\alpha = \frac{3}{4}$일 때, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$의 값은? [3점]

① 7 ② 6 ③ 5
④ 4 ⑤ 3

25. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{ax^{2n+2}+bx^{2n}+x^4}{x^{2n}+1}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a-b$의 값은? [3점]

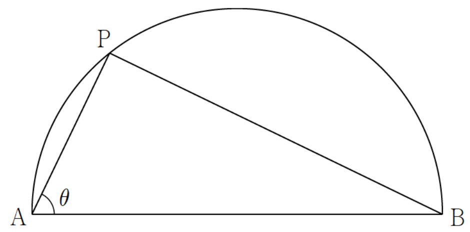
① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

26. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O가 있다. 반원의 호 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 할 때,

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{BP}}}{\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)^n}=\alpha \text{ (단, } n\text{은 자연수, } \alpha\neq 0)$$

이다. $n+\alpha$의 값은? [3점]



① 2 ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3

④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 4

27. 자연수 n에 대하여 $\frac{n}{2^k}$가 자연수가 되도록 하는 정수 k의 최댓값을 $\{a_n\}$,

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k = b_n$$

이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_n}$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\int_0^x e^t f(x-t)dt$$

이다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+g(x)=xe^{x^2}$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{e+1}{2}$ ② $\frac{2e+1}{2}$ ③ $\frac{3e+1}{2}$
④ $\frac{4e+1}{2}$ ⑤ $\frac{5e+1}{2}$

단답형

29. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=(\ln x)^n$

이 두 개의 변곡점을 가지며, 두 변곡점의 x좌표의 곱이 e^{10} 이하가 되도록 하는 자연수 n값의 합을 구하여라. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[-\pi, \pi]$에서 실수 a에 대하여

$f(x)=a\sin x$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x_1x_2<0$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)\le 0$이다.
(나) 방정식 $xf\left(\frac{1}{x}\right)-1=0$의 실근은 존재하지 않는다.

$f(2\pi)-f(-2\pi)=2\pi$일 때, $\frac{1}{\pi^2}\int_{-2\pi}^{6\pi} f(x)dx$의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 2,\ 4)$ 사이의 거리는? [2점]

① 3　② $2\sqrt{2}$　③ $\sqrt{7}$　④ $\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{5}$

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$에 접하며 기울기가 2인 두 직선의 y절편의 곱은? [3점]

① -3　② -4　③ -5　④ -6　⑤ -7

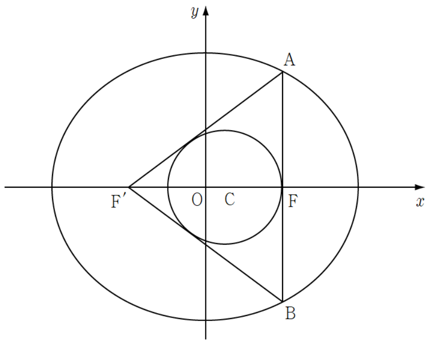
25. 좌표평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 4, \quad |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = 6$$

일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]

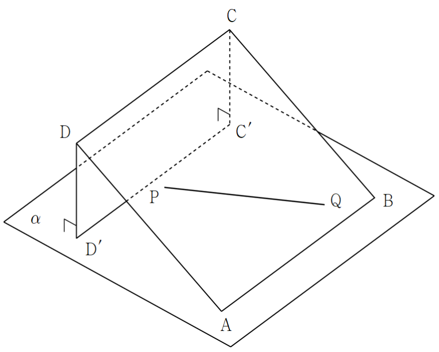
① $3\sqrt{7}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ 9
④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $3\sqrt{11}$

26. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{12}=1$과 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 ABF′에 내접하는 원의 중심 C가 선분 FF′를 $3:5$으로 내분하는 점일 때, $\overline{\mathrm{FF}'}$의 값은? [3점]



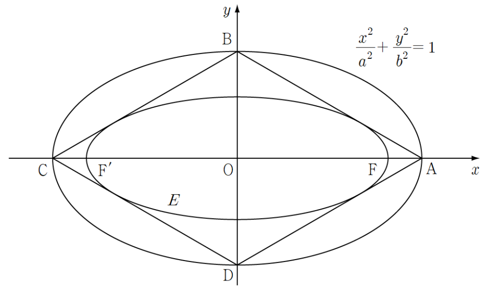
① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4
④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

27. 그림과 같이 직사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, B는 평면 α 위에 있고 두 꼭짓점 C, D는 평면 α 위에 있지 않다. 두 점 C, D에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이는 40, 사각형 CDD′C′의 넓이는 $8\sqrt{5}$이다. 평면 ABCD 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=3$이고, 선분 PQ의 평면 α 위로의 정사영의 길이가 $2\sqrt{2}$일 때, 선분 PQ의 평면 CDD′C′ 위로의 정사영의 길이는? [3점]



① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

28. 그림과 같이 두 초점이 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 네 꼭짓점 A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$, C$(-a,\ 0)$, D$(0,\ -b)$을 연결하여 만든 사각형 ABCD에 내접하고 장축이 FF′인 타원 E의 단축의 길이가 4이다. 타원 E가 선분 AB와 만나는 점이 선분 AB를 1 : 2로 내분할 때, ab의 값은? (단, a, b, c는 모두 양수이다.) [4점]



① $4\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ 12
④ $12\sqrt{2}$ ⑤ $12\sqrt{3}$

단답형

29. 좌표평면의 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$인 서로 다른 세 점 A, B, C가 있다. $|2\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}-2\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=2$를 만족시키며 움직이는 점 P와, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$을 만족시키며 움직이는 점 Q에 대하여 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값이 6이다. $\overline{\mathrm{BC}}^2$의 값을 구하여라. [4점]

30. 좌표공간의 구

$$(x+\sqrt{3})^2+y^2+(z-2)^2=4$$

위의 z좌표가 3인 점 P에서 접하는 평면과 xy평면의 교선을 l이라 하자. 점 P가 움직일 때, 점 $(2\sqrt{3},\ 0,\ 3)$와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은 m, 최댓값은 M이다. m^2+M^2의 값을 구하여라. [4점]

[나승민/한성은 모의고사 수능 연습(1/4) 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	①	03	⑤	04	③	05	⑤
06	④	07	②	08	③	09	④	10	①
11	⑤	12	①	13	④	14	②	15	③
16	12	17	11	18	4	19	108	20	24
21	16	22	38						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	④	25	②	26	③	27	④
28	②	29	45	30	308				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	①	25	③	26	③	27	②
28	①	29	35	30	12				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	④	25	①	26	③	27	②
28	⑤	29	20	30	93				

COMMENT 05

$\frac{\log_a b}{2}=\frac{\log_b c}{3}=\frac{\log_c a}{4}=k$라 두면 $\log_a b=2k$, $\log_b c=3k$, $\log_c a=4k$이다.

세 등식을 변끼리 모두 곱하면 $k=\frac{1}{2\sqrt[3]{3}}$이고, $2\log_b a=3\log_c b=4\log_c a=\frac{1}{k}=2\sqrt[3]{3}$이다.

COMMENT 10

(ⅰ) $\log_\pi x-1<0$이고 $\cos x-\frac{1}{2}>0$인 경우 : $0<x<\pi$이고 $0<x<\frac{\pi}{3}$이므로 $0<x<\frac{\pi}{3}$이다.

(ⅱ) $\log_\pi x-1>0$이고 $\cos x-\frac{1}{2}<0$인 경우 $\pi<x<2\pi$이고 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$이므로 $\pi<x<\frac{5}{3}\pi$이다.

따라서 부등식의 해는 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi<x<\frac{5}{3}\pi$이다.

COMMENT 11

$f(m)=(-1)^{m+2}(m+1)^2$, $\quad g(m)=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$

COMMENT 12

점 $(2,\ f(2))$는 곡선의 변곡점이다. $f(x)=x^3-6x^2+bx+b$라 하자. 구간 $(-1,\ 3)$에서

$f'(x)=3x^2-12x+b\le 0$이므로 $f'(-1)\le 0$, $b\le -15$이다. $f(1)=-5+2b$의 최댓값은 -35이다.

COMMENT 13

삼각형 OAB의 넓이는 $\sqrt{3}n^2$이다. $f(x)=mx(x-2n)$이라 할 때, $\frac{\sqrt{3}n^2}{2}=\frac{|m|}{6}(2n)^3$이다.

$m=-\frac{3\sqrt{3}}{8n}$이고 $f(x)=-\frac{3\sqrt{3}}{8n}x(x-2n)$이다. $f(x)$의 극댓값은 $a_n=f(n)=\frac{3\sqrt{3}n}{8}$이다.

COMMENT 14

$f(x)=-x^2+ax+b$라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이며 $g(1)=0$이므로 $g'(1)=0$이다.

$b=2-a$이다. '방정식 $g(x)=0$의 한 근이 0 이하'를 풀면 $a\le\frac{4}{3}$이다. $f(0)=b$는 $2-a$이므로 $\frac{2}{3}$ 이상이다.

COMMENT 15

$\overline{\text{PQ}}=x$라 할 때, 삼각형 OPQ에서 코사인 돌리면

$$6^2=(2\sqrt{2})^2+x^2-4\sqrt{2}x\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\Leftrightarrow(\sqrt{3}x-6)(\sqrt{3}x+14)=0$$

이므로 $x=2\sqrt{3}$이다. 사인 돌리면 $\sin(\angle\text{POQ})=\frac{1}{3}$이다.

$\angle\text{BOQ}=\frac{\pi}{2}-\angle\text{POQ}$이므로 $\cos(\angle\text{BOQ})=\frac{1}{3}$이다. 삼각형 BOQ에서 코사인.

COMMENT 18

접점을 $(t,\ f(t))$라고 하면 접선의 방정식은 $y=(2t-4)(x-t)+t^2-4t+5$이다.

점 $(4,\ 2)$를 지나므로 $t^2-8t+13=0$이다. 두 근을 α, β라 하면, 두 기울기의 곱은 $(2\alpha-4)(2\beta-4)$이다.

※ $x^2-4x+5=m(x-4)+2$에서 (판별식)$=0$을 풀어도 좋다.

COMMENT 20

$a_n = 2n-2$, $b_n = 2^{n-2}(n \ge 2)$

COMMENT 21

다항식 $f(x)g(x)$가 $(x-1)$, $(x-2)^2$, $(x-3)^3$을 모두 인수로 가져야 한다.

다항식 $f(x)g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 6차식이므로 $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$이다.

두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 인수를 잘 나눠먹어야 하는데, $x=2$에서 극댓값을 가지려면

띠띠띠 $f(x)=(x-2)^2(x-3)$ 밖에 안 되네. $g(x)=(x-1)(x-3)^2$이다.

COMMENT 22

사차함수가 극댓값을 가지지 않으면 $g(a)$의 불연속점은 많아야 1개다. 안 되겠군.

사차함수가 극소극대극소를 가지며 대충 생기면

방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 변하는 t값이 7개다.

이 중 들어오거나 나가는 실근이 0인 경우는 함수 $g(t)$의 불연속점에서 제외된다.

빠진다면 1개 또는 3개이므로, $g(t)$의 불연속점이 7개가 아니라면 6개 또는 4개가 된다.

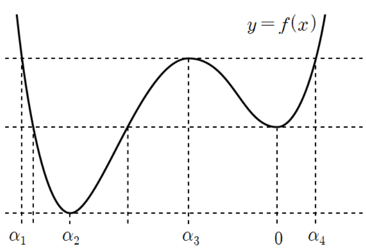
[그림1]은 대충 생긴 사차함수와 $f'(x)=0$의 실근 중 하나가 1일 때의 예이다. 참고.

사차함수가 극소극대극소를 가지며 극소점 2개의 y좌표가 서로 같아야 한다. [그림2] 참고.

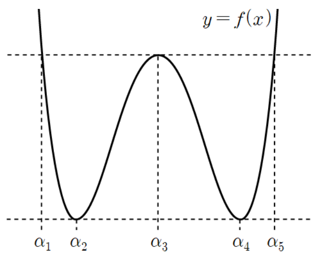
$g(\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5=3\alpha_3$, $g(\alpha_2)=\alpha_2+\alpha_4=2\alpha_3$이므로 $g(\alpha_3)-g(\alpha_2)=\alpha_3=3$이다.

$\alpha_3-\alpha_2=2$에서 $\alpha_2=1$, $y=f(x)$는 대충 대칭이므로 $\alpha_4=5$, $f(x)=k(x-1)^2(x-5)^2+2$이다.

$f(\alpha_3)-f(\alpha_2)=f(3)-f(1)=16k$이므로 $k=\frac{1}{4}$, $f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x-5)^2+2$이다.



[그림1]



[그림2]

COMMENT 확률과 통계 28

2학년끼리 이웃하는 사건을 A, 3학년끼리 모두 이웃하는 사건을 B라 하면

구하는 경우의 수는 $n(A^c \cap B^c) = n(U) - \{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$이다.

$n(U)=120$, $n(A)=48$, $n(B)=36$, $n(A\cap B)=24$이므로 답은 60이다.

다른 풀이) 2학년이 서로 마주보는 경우의 수는 24가지,

2학년이 마주보지 않는 경우의 수는 36이다.

COMMENT 확률과 통계 29

세 자연수 x, y, z 중 어느 하나가 다른 두 수의 합보다 작아야 한다.

$\Rightarrow$ 가장 큰 자연수가 9 이하이다.

전체 경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_{16}$에서 어느 하나가 10 이상인 경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_7 \times 3$을 빼면 된당.

COMMENT 확률과 통계 30

18번의 시행 중 2 이하의 눈의 수가 나오는 횟수를 Y라 하면, $Y \sim \mathrm{B}\left(18,\ \dfrac{1}{3}\right)$이다.

이동된 점 P의 좌표는 $(2Y,\ 18-Y)$이므로 $X=5Y^2-36Y+324$이다.

$\mathrm{E}(Y)=6$, $\mathrm{V}(Y)=4$, $\mathrm{E}(Y^2)=40$이므로 $\mathrm{E}(X)=5\mathrm{E}(Y^2)-36\mathrm{E}(Y)+324=308$이다.

COMMENT 미적분 27

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n+1}} a_k=\sum_{k=1}^{2^n} a_k+\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k$이고, $\begin{cases} a_{2^{n+1}}=a_{2^n}+1 \\ a_{2^n+i}=a_i\,(1 \le i \le 2^n-1) \end{cases}$이므로

$b_{n+1}=b_n+(b_n+1)$이다. 따라서 $b_{n+2}=4b_n+3$이다.

COMMENT 미적분 28

$g(x)=\displaystyle\int_0^x e^t f(x-t)dt$에서 $x-t=\alpha$로 치환하면 $g(x)=e^x\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha}f(\alpha)d\alpha$이다.

양 변을 미분하면 $g'(x)=e^x\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha}f(\alpha)d\alpha+f(x)=g(x)+f(x)$이다.

$g'(x)=xe^{x^2}$이므로 $g(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$이고 $g(0)=0$이므로 $g(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}-\dfrac{1}{2}$이다.

$f(x)=g'(x)-g(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{x^2}+\dfrac{1}{2}$이다.

COMMENT 미적분 29

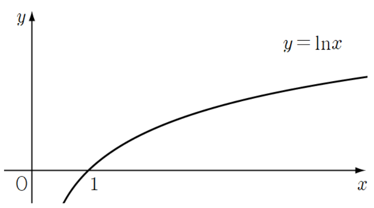
$n=1$일 때는 변곡점을 갖지 않는다.

$n \ge 2$일 때, $f''(x)=\dfrac{n(\ln x)^{n-2}\{(n-1)-\ln x\}}{x^2}$에서 $f''(x)=0$의 근은 $x=1$, $x=e^{n-1}$이다.

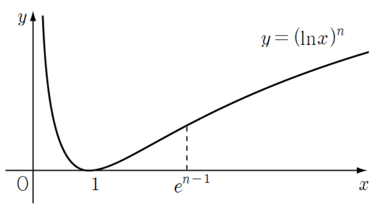
$x=e^{n-1}$일 때는 빼박 변곡점이고 $x=0$일 때는 n이 홀수일 때 변곡점이다.

두 변곡점을 가지려면 n은 홀수, 두 변곡점의 x좌표의 곱은 e^{n-1}이므로

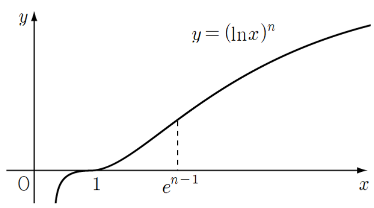
해당하는 n은 3, 5, 7, 9, 11이다.



$n=1$일 때



n이 짝수일 때



n이 3 이상의 홀수일 때

COMMENT 미적분 30

(나)에서 $\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면 $t \ne 0$일 때 $\dfrac{f(t)-t}{t}=0$의 실근이 존재하지 않는다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x \ne 0$일 때 직선 $y=x$와 교점을 갖지 않는다.

(가)에서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$나 구간 $(0,\ \infty)$에서 볼록성을 바꾸지 못한다.

$a>0$라 가정하면 $f(x)$는 $f(2\pi)-f(-2\pi)=2\pi$를 만족시킬 수 없다.

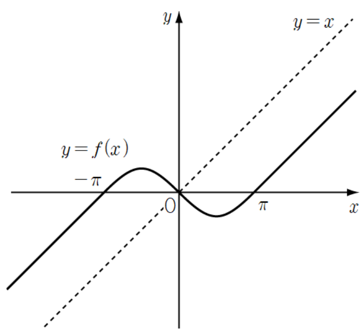
$f(\pi)=0$, $f'(\pi)<0$, $x>\pi$에서 위로 볼록,

$f(-\pi)=0$, $f'(-\pi)>0$, $x<-\pi$에서 아래로 볼록

이기 때문. $f(2\pi)-f(-2\pi)<2\pi$가 된다.

평균값의 정리나 정적분과 부등식으로 증명하는 것이 가능하지만,

수능 준비하는 입장에서는 비추. 대충 개형에서 읽어 낼 수 있도록.



$a<-1$인 경우에도 불가능. $f(2\pi)-f(-2\pi)>2\pi$가 된다.

$-1<a<0$인 경우에도 불가능.
이 경우에는 $f(2\pi)-f(-2\pi)=2\pi$를 만족시키는 것은 가능하지만,
곡선 $y=f(x)$는 $|x|>2\pi$일 때 직선 $y=x$와 적어도 한 점에서 만나게 된다.

뭐 그래서 $a=-1$이고 $|x|\geq\pi$인 구간은 반직선으로 채워야 한다.
반직선이 잠깐이라도 어긋나면 직선 $y=x$와 만나버려서 망한다.

COMMENT 기하 28

타원 $\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{d^2}=1$에 접하는 기울기 $-\dfrac{b}{a}$인 직선 $y=-\dfrac{b}{a}x\pm\sqrt{\dfrac{b^2c^2}{a^2}+d^2}$의 y절편이 $\pm b$이므로
$\sqrt{\dfrac{b^2c^2}{a^2}+d^2}=b$에서 정리하면 $d=\dfrac{b^2}{a}$이다. $2a=b^2$이다.

점 $\left(\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{b}{3}\right)$가 타원 $\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{d^2}=1$ 위의 점이므로 $\dfrac{4a^2}{9c^2}+\dfrac{b^2}{9d^2}=1$이다.

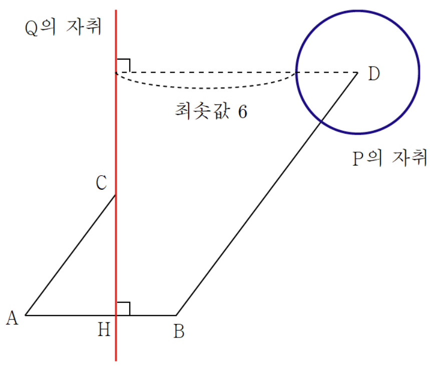
정리하면 $a=\sqrt{3}b$이다. ($c^2=a^2-b^2$와 $d=\dfrac{b^2}{a}$를 이용하여 a, b만 남겨보자.)

따라서 $a=6$, $b=2\sqrt{3}$, $c=2\sqrt{6}$이다.

COMMENT 기하 29

$|2\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}|=|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}|$이므로
점 D가 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$를 만족시킬 때,
점 P는 점 D를 중심으로 하고 반지름의 길이가
2인 원 위의 점이다. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$에서
점 Q는 점 C를 지나고 $\overrightarrow{AB}$에 수직인 직선 위의 점이다.

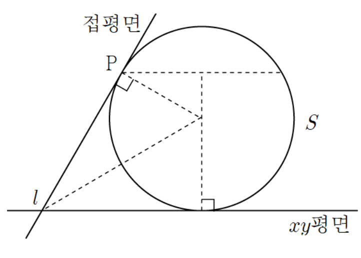
점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H, AH$=a$라 하면
$\overline{PQ}$의 최솟값 6은 $(5+2a)-a$이므로 $a=3$이다.



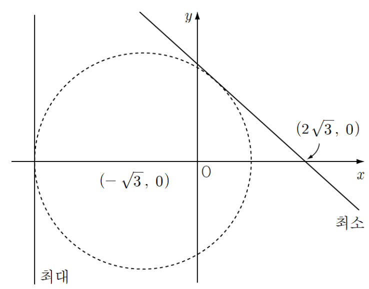
COMMENT 기하 30

[그림1]을 째려보면 점 $(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$에서 l까지의 거리가 $2\sqrt{3}$이다.
따라서 l은 xy평면에서 점 $(-\sqrt{3},\ 0)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원의 접선이다.

점 $(2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$에서의 거리를 째려보면 된다. [그림2] 참고.
반대쪽일 때 최댓값 $\sqrt{(5\sqrt{3})^2+3^2}$, 지날 때 최솟값 3을 가진다.



[그림1]



[그림2]