

[권구승/한성은 모의고사]

| 4월 모의고사 연습 |

| 권구승 (서울대)

대찬학원(분당), 미래탐구(목동), 이투스앤써
올해보단 내년의 벚꽃을 위해.

| 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

수능까지 200여일, 혹은 560여일.

hansungeun.com/texta.html - 공개 모의고사 페이지
써밋 N제 미적분(2021년) 출간 - 책 사주세요.

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역

1

5지선다형

1. $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{(-2)^4}$ 의 값은? [2점]

- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

2. 첫째항이 2이고 공차가 -3인 등차수열에 대하여 a_4 의 값은? [2점]

- ① -3 ② -4 ③ -5
④ -6 ⑤ -7

3. $\sin\theta = \frac{4}{5}$ 이고 $\cos\theta + \sin\theta \times \tan\theta < 0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{4}{3}$ ② 1 ③ $-\frac{2}{3}$
④ -1 ⑤ $-\frac{4}{3}$

4. $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 2$ 인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 1인 원에 내접할 때, $\sin A + \sin B + \sin C$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$
④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

5. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 정의역이 $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ 인 함수 $f(x) = a^x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 15일 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

6. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = 1 + \frac{1}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{98} (a_k - a_{k+1})$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{47}{100}$ ② $\frac{12}{25}$ ③ $\frac{49}{100}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{51}{100}$

7. x 에 대한 로그부등식

$$\log_3(x-1) \leq \log_3\left(\frac{1}{2}x+k\right)$$

를 만족시키는 모든 정수 x 의 개수가 3일 때, 자연수 k 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

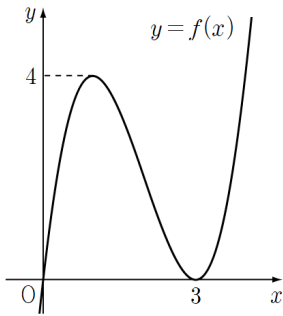
8. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

을 만족시킨다. $a_5 = 24$ 일 때, a_4 의 최댓값은? [3점]

- ① 13 ② 14 ③ 15
 ④ 16 ⑤ 17

9. $f(0) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(3, 0)$ 에서의 접선이 x 축이다. 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

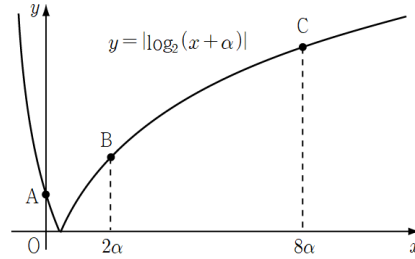


- ① $\frac{27}{4}$ ② 7 ③ $\frac{29}{4}$
 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{31}{4}$

10. $0 < \alpha < 1$ 인 실수 α 에 대하여 함수

$$f(x) = |\log_2(x + \alpha)|$$

일 때, 세 점 $A(0, f(0))$, $B(2\alpha, f(2\alpha))$, $C(8\alpha, f(8\alpha))$ 가 $\overline{3AB} = \overline{BC}$ 를 만족시킨다. α 의 값은? [4점]

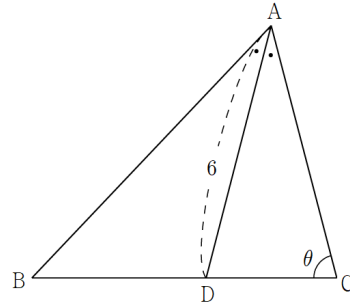


- ① $2^{-\frac{1}{3}}$ ② $2^{-\frac{1}{2}}$ ③ $3^{-\frac{1}{4}}$
 ④ $3^{-\frac{1}{3}}$ ⑤ $3^{-\frac{1}{2}}$

11. 함수 $y=|x-2x^2|$ 의 그래프와 직선 $y=tx$ 의 교점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 $t=a$ 와 $t=b$ 에서 불연속일 때, $b \times \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$ 의 값은? (단, $a < b$) [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 4
 ④ 6 ⑤ 8

12. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 4:3으로 내분하는 점 D는 $\angle BAD = \angle CAD$ 를 만족시킨다. $\angle ACD = \theta$ 라 하면 $4\cos\theta = 1$ 이고, $\overline{AD} = 6$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]



- ① $\frac{31}{4}$ ② 8 ③ $\frac{33}{4}$
 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

13. 수열 $\{a_n\}$ 은

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 110, \quad \sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{k} = 80$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의

합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{S_k}{k(k+1)}$ 의 값은? [4점]

- ① 70 ② 75 ③ 80
 ④ 85 ⑤ 90

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$$x(x+1)g(x) = f(x)$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

(나) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f'(x)} = -\frac{1}{2}$

- ① 12 ② 18 ③ 24
 ④ 30 ⑤ 36

15. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이

$$b_1 = 1,$$

$$b_{n+1} = b_n + (-1)^n a_n \quad (n \text{은 자연수})$$

일 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad a_{2n} = a_{2n-1} + n$$

$$(나) \quad \sum_{k=1}^{2n} b_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$|a_5| + |a_6|$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② 5 ③ 8
 ④ 11 ⑤ 14

단답형

16. $\log_2 \sqrt{3} \times \log_3 16$ 의 값을 구하여라. [3점]

17. 함수 $f(x) = a \sin x + 1$ 의 그래프가 점 $(\frac{\pi}{6}, 3)$ 을
 지날 때, 함수 $y = f(x)$ 의 최댓값을 구하여라. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n + b_n = 2n + 3$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 45$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하여라. [3점]

19. 중심이 O 이고 반지름의 길이가 12인 원 위에 점 A 가 있다. 반직선 OA 를 시초선으로 했을 때, 두 각

$$-\frac{5}{3}\pi, \quad \frac{\pi}{6}$$

가 나타내는 동경이 이 원과 만나는 점을 각각 P , Q 라 하자. 선분 PQ 를 포함하는 부채꼴 OPQ 의 넓이가 $a\pi$ 일 때, a 의 값을 구하여라. [3점]

20. 두 함수 $f(x) = \log_a x$, $g(x) = -\log_a x + b$ 에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 는 제 4사분면에서 만난다. $1 \leq x \leq 8$ 에서 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 -1 , 최댓값이 2일 때, a^b 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$, $a \neq 1$ 이다.) [4점]

21. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 은 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ a_3 + a_5 = 0$$

$$(나) \ \sum_{k=1}^m a_{2k-1} = \frac{4}{5} \sum_{k=1}^m a_{2k}$$

m 의 값을 구하여라. [4점]

22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 와 상수 a 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x)=f(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(a) & (x \leq a) \\ f(x) & (a < x \leq a+4) \\ f(a) & (a+4 < x) \end{cases}$$

라 할 때, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이며 오직 $x=a$ 에서만 미분가능하지 않다. 방정식 $|g(x)|=6$ 은 열린구간 $(a, a+4)$ 에서 하나의 실근을 갖고, 실수 전체의 집합에서 무수히 많은 실근을 가질 때, $f(a-2)$ 의 값을 구하여라. [4점]

수학 영역 (확률과 통계)

5지선다형

23. 3H_5 의 값은? [2점]

- ① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

24. 다항식 $(x+a)^7$ 의 전개식에서 x^5 의 계수가 84일 때,

양수 a 의 값은? [3점]

- ① 3 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{7}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

25. 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하여 여섯 자리의 자연수를 만들 때, 숫자 2가 서로 이웃하지 않는 경우의 수는? [3점]
- ① 36 ② 42 ③ 48
④ 54 ⑤ 60

26. 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 를 선택할 때, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ 인 경우의 수는? [3점]
- ① 81 ② 64 ③ 27
④ 16 ⑤ 9

27. 남학생 2명과 여학생 3명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 남학생 2명이 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

- ① 18 ② 16 ③ 14
 ④ 12 ⑤ 10

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c+d$ 는 2의 배수이다.
 (나) $a \leq b \leq c \leq d \leq 9$

- ① 225 ② 240 ③ 255
 ④ 270 ⑤ 285

단답형

29. 같은 종류의 초콜릿 4개와 서로 다른 사탕 3개를 세 사람 A, B, C에게 모두 나누어 주려 할 때, 아무것도 받지 못하는 사람이 없도록 하는 방법의 수를 구하여라. [4점]

30. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라. [4점]

- (가) f 는 일대일 대응이다.
(나) $2f(n) = f(2n)$ 을 만족시키는 자연수 n 이 존재한다.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$n(n+1) < 3a_n < n(n+3)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6a_n}{n^2 + 3n}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 12) = 10$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_{n-1} + a_{2n})$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

25. 두 상수 a, b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sqrt{ax+b}-2} = 3$ 일 때,

$a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10
 ④ 12 ⑤ 14

26. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2-2x-1}{2} \right)^n$ 이 수렴하도록 하는

모든 정수 x 의 값의 합은? [3점]

- ① -3 ② -2 ③ -1
 ④ 1 ⑤ 2

27. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = a_2 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 의 값은? [3점]

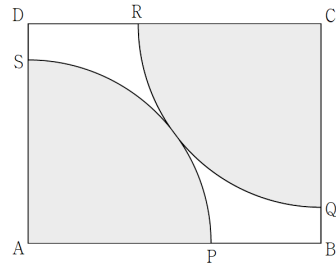
- ① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{11}{14}$ ③ $\frac{6}{7}$
 ④ $\frac{13}{14}$ ⑤ 1

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$ 인 직사각형 ABCD가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 선분 AC의 길이의 절반인 원이 선분 AB, DA와 만나는 점을 각각 P, S, 중심이 C이고 반지름의 길이가 선분 AC의 길이의 절반인 원이 선분 BC, CD와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하고 두 부채꼴 APS, CQR에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

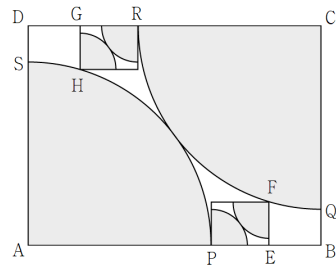
그림 R_1 에서 점 P, 선분 PB 위의 점 E, 호 QR 위의 점 F를 꼭짓점으로 하고 $\overline{PE}:\overline{EF}=4:3$ 인 직사각형과 점 R, 선분 RD 위의 점 G, 호 PS 위의 점 H를 꼭짓점으로 하고 $\overline{RG}:\overline{GH}=4:3$ 인 직사각형을 그린다. 두 직사각형에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 각각 두 개의 부채꼴을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?

[4점]



R_1

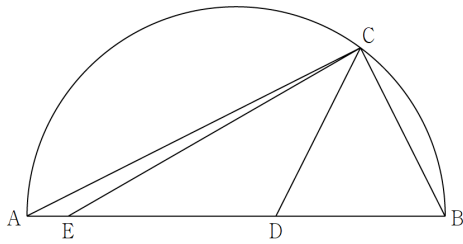


R_2

- ① $\frac{25}{2}\pi$ ② $\frac{625}{48}\pi$ ③ $\frac{625}{46}\pi$
 ④ $\frac{625}{44}\pi$ ⑤ $\frac{625}{42}\pi$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 C는 $\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 를, 선분 AB 위의 두 점 D, E는 $\overline{BC} = \overline{CD}$, $5\overline{AE} = \overline{ED}$ 를 만족시킨다. $\tan(\angle ECD)$ 의 값이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 자연수 n 에 대하여 n 이 1이 될 때까지 다음 시행을 반복한다.

[시행]
 i) 숫자가 홀수이면 1을 뺀다.
 ii) 숫자가 짝수이면 2로 나눈다.

이때 자연수 n 이 1이 될 때까지 반복한 시행의 횟수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어 $f(3) = 2$, $f(4) = 2$ 이다.

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} f(k) = a_n$$

이러 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - 2a_n}{2^n}$ 의 값을 구하여라. [4점]

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점을 F, F'이라 할 때,

선분 FF'의 길이는? [2점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

24. 서로 평행하지 않은 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가

$$(m+3n)\vec{a} + (2m-n)\vec{b} = (n-1)\vec{a} + (m+2)\vec{b}$$

를 만족시킬 때, m^2+n^2 의 값은? (단, \vec{a} 와 \vec{b} 는 모두 영벡터가 아니다.) [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

25. 삼각형 ABC에서

$$\overline{AC}=4, \quad \angle B=90^\circ, \quad \angle C=60^\circ$$

이다. 점 P가 $\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PB}$ 를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PA}|^2$ 의 값은?

[3점]

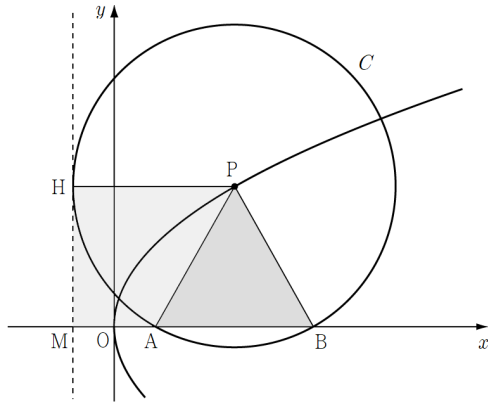
- ① 7 ② 9 ③ 11
 ④ 13 ⑤ 15

26. 포물선 $y^2=8(x-a)$ 의 준선이 $y=\tan\frac{\pi}{8}x$ 의 점근선

이 되도록 하는 자연수 a 의 최솟값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

27. 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4px$ ($0 < p$) 위의 점 P를 중심으로 하고 포물선의 준선과 접하는 원 C가 있다. 원 C가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B, 포물선의 준선과 원이 서로 접하는 점을 H, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 M이라 하자. $\overline{OB} = 5$ 이고 사다리꼴 MAPH의 넓이와 삼각형 PAB의 넓이의 비가 3:2일 때, 상수 p의 값은? (단, $p < 5$ 이다.) [3점]



- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1
- ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

28. 좌표평면에서 점 A(-4, 0)과 타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{k} = 1$ 위의 점 P에 대하여 두 점 A와 P를 지나는 직선이 원 $(x+4)^2 + y^2 = 1$ 과 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 것을 Q라 하자. 점 P가 타원 위의 모든 점을 지날 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 $\frac{\pi}{3}$ 이다. 타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{k} = 1$ 의 두 초점을 F, F'라 할 때, 선분 FF'의 길이는? [4점]

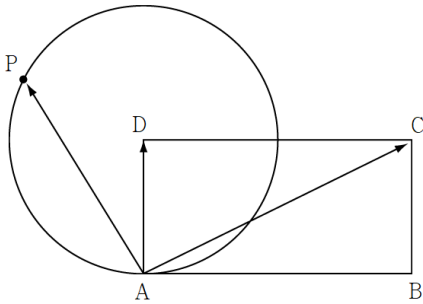
- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

단답형

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=3$ 인 직사각형 ABCD와 점 D를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O가 있다. $0 < a < 1$ 인 상수 a 와 원 O 위를 움직이는 점 P에 대하여

$$|\overrightarrow{PA} + (1+a)\overrightarrow{AD} + (1-a)\overrightarrow{AC}|$$

의 최댓값이 8이라 할 때, $60a$ 의 값을 구하여라. [4점]



30. 좌표평면의 네 점 $A(-2\sqrt{2}, 0)$, $B(2\sqrt{2}, 0)$, $C(c, 0)$, $D(-c, 0)$ 과 삼각형 T 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 삼각형 T 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 가 최솟값을 가지는 점 P의 집합은 $\{(-3, 1), (0, -2), (3, 1)\}$ 이다.
- (나) 삼각형 T 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PC} + \overline{PD}$ 가 최댓값을 가지는 서로 다른 점 P의 개수는 3이다.

$2\sqrt{2} < c$ 일 때, c^2 의 값을 구하여라. [4점]

[권구승/한성은 모의고사 4월 연습 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	⑤	03	⑤	04	④	05	②
06	③	07	①	08	③	09	①	10	④
11	②	12	②	13	①	14	⑤	15	②
16	2	17	5	18	95	19	12	20	2
21	8	22	198						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	②	24	④	25	⑤	26	①	27	④
28	③	29	288	30	195				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	②	24	③	25	④	26	⑤	27	①
28	③	29	5	30	3				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	①	25	④	26	③	27	③
28	②	29	20	30	32				

COMMENT 10

답을 짚어보면 세 점은 직선 위에 존재하고, $f(8\alpha) - f(0) = 4\{f(2\alpha) - f(0)\}$ 이다.

$\log_2 9\alpha - (-\log_2 \alpha) = 4\{\log_2 3\alpha - (-\log_2 \alpha)\}$ 에서 $\alpha = 3^{-\frac{1}{3}}$ 이다.

COMMENT 12

$\overline{AB} = 4k$, $\overline{AC} = 3k$, $\overline{BD} = 4l$, $\overline{CD} = 3l$ 이라 하자. $\cos\theta = \frac{1}{4}$ 에서

$$\frac{1}{4} = \frac{9k^2 + 49l^2 - 16k^2}{2 \times 3k \times 7l} = \frac{9k^2 + 49l^2 - 36}{2 \times 3k \times 3l}$$

이다. 첫 번째 식을 풀해보면 놀랍게도 $k = 2l$ 을 얻을 수 있다. 뒤의 식을 풀면 $l = 1$, $k = 2$ 이다.

COMMENT 13

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{S_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{10} \left\{ \frac{S_k}{k} - \frac{S_k}{k+1} \right\} = S_1 + \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k} (S_k - S_{k-1}) - \frac{S_{10}}{11} = \sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{k} - \frac{S_{10}}{11}$$

COMMENT 14

$x \neq -1$, $x \neq 0$ 일 때 $g(x) = \frac{f(x)}{x(x+1)}$ 이다.

(가)에서 $f(x)$ 는 x^2 을 인수로 가진다.

(나)는 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x(x+1)f'(x)} = -\frac{1}{2}$ 이다.

$f(-1) = 0$ 이므로 $f(x) = (x+1)h(x)$ 라 두자.

(나)의 식에 다시 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x)}{x\{h(x) + (x+1)h'(x)\}} = -\frac{1}{2}$$

이다. $h(-1) \neq 0$ 이면 극한값이 -1 이 되므로 $h(-1) = 0$ 이다.

따라서 $f(x) = x^2(x+1)^2$ 이다.

COMMENT 15

(나)에서 $b_{2n-1} + b_{2n} = n(n+1)$ 이고 점화식에서 $b_{2n-1} + b_{2n} = 2b_1 - 2a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 - \dots + 2a_{n-2} - a_{2n-1}$ 이다.

(가)를 적용하면 $b_{2n-1} + b_{2n} = 2 + 2\{1+2+3+\dots+(n-1)\} - a_{2n-1} = 2 + (n-1)n - a_{2n-1}$ 이다.

$a_{2n-1} = 2 - 2n$ 이다. 이와 (가)를 이용하면 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항을 구할 수 있다.

$$\{a_n\}: 0, 1, -2, 0, -4, -1, -6, -2, -8, -3, -10, -4, \dots$$

COMMENT 20

두 곡선의 교점을 $(p, \log_a p)$ 라 하자. $2\log_a p = b$ 이고 $b < 0$ 이다.

$g(x)$ 는 단조함수이므로 $1 \leq x \leq 8$ 에서 $g(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 모두 $g(1) = b$ 또는 $g(8) = -\log_a 8 + b$ 이다.

음수인 최솟값이 b 이므로 $b = -1$, $-\log_a 8 + b = 2$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$ 이다.

COMMENT 21

$a_4 = 0$ 이고 $\{a_n\}$ 은

$$-3d, -2d, -d, 0, d, 2d, 3d, \dots$$

이다. $\sum_{k=1}^m a_{2k-1} = \frac{a_1 + a_{2m-1}}{2}m$, $\sum_{k=1}^m a_{2k} = \frac{a_2 + a_{2m}}{2}m$ 이므로 $a_m = \frac{4}{5}a_{m+1}$ 이다.

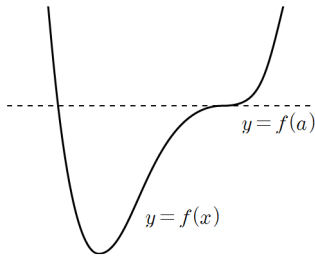
$$(m-4)d = \frac{4}{5}(m-3)d \text{에서 } m = 8 \text{이다.}$$

COMMENT 22

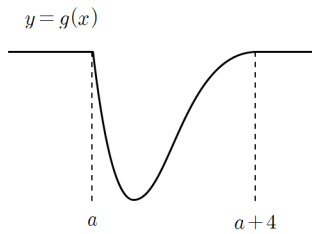
함수 $g(x)$ 가 $x = a+4$ 에서 연속이므로 $f(a+4) = f(a)$ 이고,

함수 $g(x)$ 가 $x = a+4$ 에서 미분가능하므로 $f'(a+4) = 0$ 이다.

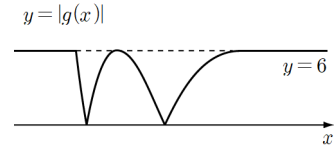
함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 아래의 [그림1], [그림2]와 같다.



[그림1] $y = f(x)$



[그림2] $y = g(x)$



[그림3] $y = f(x)$

나머지는 대충 알아서. $f(x) = \frac{4}{9}(x-a)(x-a-4)^3 + 6$ 이다.

COMMENT 확률과 통계 28

Case1) 모두 짝수 : ${}_4H_4 = 35$

Case2) 두 짝수와 두 홀수 : ${}_4H_2 \times {}_5H_2 = 150$

※ 선택하면 자동으로 a, b, c, d 에 대응된다.

Case3) 모두 홀수 : ${}_5H_4 = 70$

COMMENT 확률과 통계 29

서로 다른 사탕 세 개를

i) 한 명이 모두 받을 때 : $3 \times {}_3H_2 = 18$

ii) 두 명이 하나 이상 받을 때 : ${}_3C_2 \times 3 \times 2 \times {}_3H_3 = 180$

iii) 세 명이 각각 하나씩 받을 때 : $3! \times {}_3H_4 = 90$

COMMENT 확률과 통계 30

$n=1, n=2, n=3$ 인 경우들의 집합을 각각 A, B, C 라 하자.

$$n(A) = n(B) = n(C) = 3 \times 4!, \quad n(A \cap B) = 3!$$

$$n(B \cap C) = n(C \cap A) = 8, \quad n(A \cap B \cap C) = 1$$

이므로 구하는 경우의 수는 $72 + 72 + 72 - 6 - 8 - 8 + 1$ 이다.

COMMENT 미적분 28

답음비는 5:1이다. 첫째항은 $\frac{25}{2}\pi$, 공비는 $\frac{2}{25}$ 인 등비급수.

COMMENT 미적분 29

$\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=2$ 이다. 이등변삼각형 BCD를 췌려보면 $\overline{BD}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$, $\overline{CD}=2$ 이다.

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\tan(\angle CDH)=2, \tan(\angle CEH)=\frac{4}{7} \text{이다. } \tan(\angle ECD)=\tan(\angle CDH-\angle CEH)=\frac{2-\frac{4}{7}}{1+2\times\frac{4}{7}}=\frac{2}{3} \text{이다.}$$

COMMENT 미적분 30

자연수 m 에 대하여 $f(2m)=f(m)+1$ 이고 $f(2m+1)=f(m)+2$ 이다.

$$a_{n+1} = \sum_{k=2^{n+1}+1}^{2^{n+2}} f(k) \text{에서 } k \text{가 홀수일 때와 짝수일 때로 나뉘보자.}$$

k 가 짝수인 $f(k)$ 는 2^n 개이고 $f(2m)=f(m)+1$ 이므로 합은 a_n+2^n 이다.

k 가 홀수인 $f(k)$ 는 2^n 개이고 $f(2m+1)=f(m)+2$ 이므로 합은 $a_n+2^{n+1}-1$ 이다.

* a_{n+1} 에 포함되는 $f(2^{n+1}+1)$ 은 a_n 에 포함되는 것 중 짝이 없다.

반대로 a_n 에 포함되는 $f(2^{n+1})$ 은 a_{n+1} 에 포함되는 것 중 짝이 없는데,

$f(2^{n+1}+1)=1+f(2^{n+1})$ 이므로.. 야, 혼자 생각해.

따라서 $a_{n+1}=(a_n+2^n)+(a_n+2^{n+1}-1)$ 이다. $a_{n+1}-2a_n=3\times 2^n-1$ 이다.

COMMENT 기하 28

점 $(-4, 0)$ 을 지나고 기울기가 $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선이 타원의 접해야 한다.

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{과 } y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{\frac{7}{3}+k} \text{이 서로 같은 직선이므로 } k=3 \text{이다.}$$

COMMENT 기하 29

벡터 $(1+a)\overrightarrow{AD}+(1-a)\overrightarrow{AC}$ 는 시점이 A일 때, 중점이 그

‘선분 AB를 직선 CD에 대하여 대칭이동시킨 선분’

위에 떨어진다. 이 중점을 E라 하자.

$|\overrightarrow{PE}|$ 의 최댓값이 8이므로 $|\overrightarrow{DE}|=5$ 이다. 대충 $a=\frac{1}{3}$ 이다.

COMMENT 기하 30

(가)에서 초점이 A, B인 타원이 삼각형의 세 변과 그 세 점에서 접한다.

각을 췌려보면 한 꼭짓점이 $(0, -2)$ 에서 단축의 길이가 4이고 타원은 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 이다.

이 타원 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선의 방정식은 $x+y=4$ 이므로

삼각형 T의 세 꼭짓점은 $(-6, -2)$, $(0, 4)$, $(6, -2)$ 이다.

(나)에서 초점이 C, D인 타원이 삼각형 T의 세 꼭짓점을 지나는 각이다.

점 $(0, 4)$ 는 이 타원의 꼭짓점이므로 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$ 에서 $(6, -2)$ 를 대입하면 $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1$ 이다.