

[나승민/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학(가형) 연습 (2/4) |

| 나승민 (성균관대 수학과)

이투스앤써, 이투스 네오

힘든 시기, 잘 버텨봅시다. 9평 잘 보세요.

수학에 감각을 더하다.

instagram @cremath_david

| 한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

수능까지 공부할 시간이 적지 않게 남았습니다.

9평/수시원서접수에 너무 들뜨거나 휘둘리지 마세요.

hansungeun.com

- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.

- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(가형)

1

5지선다형

1. $(3 \times 3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}-1}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 3 ③ 6
④ 9 ⑤ 12

2. $\cos \frac{5}{6}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\int_{\ln 2}^{\ln 8} e^x dx$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad P(B|A) = \frac{1}{2}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

2

수학 영역(가형)

5. 실수 α 에 대하여 $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ 일 때, $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ 의 값은?

[3점]

- ① 7 ② 6 ③ 5
④ 4 ⑤ 3

7. 한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. ab 가 6의 약수일 때, $a+b$ 도 6의 약수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

6. 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에

대하여 $\sum_{k=1}^{33} \frac{3}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{93}{100}$ ② $\frac{24}{25}$ ③ $\frac{99}{100}$
④ $\frac{51}{50}$ ⑤ $\frac{21}{20}$

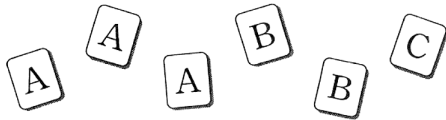
8. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식

$$3\sin^2 x = -\cos^2 x + \cos x + 2$$

의 모든 해의 합은? [3점]

- ① 3π ② $\frac{7}{2}\pi$ ③ 4π
 ④ $\frac{9}{2}\pi$ ⑤ 5π

9. A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, B가 적힌 두 장의 카드가 서로 이웃할 확률은? [3점]



- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

10. 1보다 큰 세 실수 a, b, c 가

$$\frac{\log_a b}{2} = \frac{\log_b c}{3} = \frac{\log_c a}{4}$$

를 만족시킬 때, $2\log_b a + 3\log_c b + 4\log_a c$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ③ $\sqrt[3]{3}$
 ④ $2\sqrt[3]{3}$ ⑤ $6\sqrt[3]{3}$

11. 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{2n+2} + bx^{2n} + x^4}{x^{2n} + 1}$ 가 실수 전체의

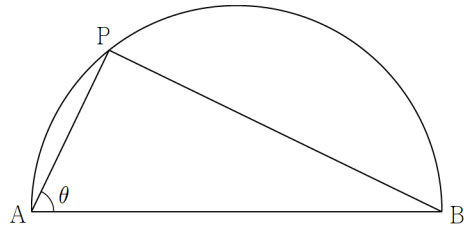
집합에서 미분가능할 때, $a-b$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

12. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는
 반원 O가 있다. 반원의 호 위의 점 P에 대하여
 $\angle PAB = \theta$ 라 할 때,

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\overline{AB} - \overline{BP}}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^n} = \alpha \quad (\text{단, } n \text{은 자연수, } \alpha \neq 0)$$

이다. $n+\alpha$ 의 값은? [3점]



- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

13. 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 은

$$a_{n+1} = \begin{cases} -a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 1 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{42} a_k = \frac{1}{2}$ 일 때, a_1 의 값은?

(단, $0 < a_1 < 1$ 이다.) [3점]

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$
 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

14. $0 < x < 2\pi$ 에서 부등식 $(\log_x x - 1)(2\cos x - 1) < 0$ 의
 해가 $a < x < b$ 또는 $c < x < d$ 일 때, $a+b+c+d$ 의
 값은? (단, $a < b < c < d$ 이다.) [3점]

- ① 3π ② $\frac{10}{3}\pi$ ③ $\frac{11}{3}\pi$
 ④ 4π ⑤ $\frac{13}{3}\pi$

6

수학 영역(가형)

15. 정규분포 $N(48, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 하나를 택해 그 값을 X 라 하고, 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{X} 라 하자. $P(X \leq 5\sigma) = P(\bar{X} \geq 9\sigma)$ 를 만족시키는 σ 의 값은? [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

16. 방정식

$$|2\log_2 x - k| = \log_2 x + 1$$

의 두 실근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하자. $\beta = 16\alpha$ 일 때, k 의 값은? [4점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

17. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때
 (좌변) = (우변) = 1
 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{m+1} \times \frac{m(m+1)}{2}$$

이다. $n=m+1$ 일 때

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} k^2 &= (-1)^{m+1} \times \frac{m(m+1)}{2} + \boxed{(가)} \\ &= (-1)^{m+2} \left\{ -\frac{m(m+1)}{2} + (m+1)^2 \right\} \\ &= (-1)^{m+2} \times \boxed{(나)} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $f(4)g(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 275 ② 300 ③ 325
 ④ 350 ⑤ 375

18. 착한 의학자 석태는 전 세계에 확산된 바이러스 모르나19의 감염여부를 검사하는 진단키트를 개발하였다. 이 진단키트는 모르나19에 감염된 환자를 감염자로 진단할 확률이 98%이고, 감염되지 않은 환자를 비감염자로 진단할 확률이 95%라고 한다. 어느 진료소에서 모르나19에 감염된 환자 100명과 감염되지 않은 환자 300명을 대상으로 이 진단키트를 사용하였다. 이 400명 중 임의로 택한 한 명의 환자가 진단키트에서 감염자로 진단 당했을 때, 이 환자가 실제로 모르나19에 감염된 환자일 확률은? [4점]

- ① $\frac{92}{113}$ ② $\frac{94}{113}$ ③ $\frac{96}{113}$
 ④ $\frac{98}{113}$ ⑤ $\frac{100}{113}$

19. 자연수 n 에 대하여 $\frac{n}{2^k}$ 가 자연수가 되도록 하는 정수 k 의 최댓값을 $\{a_n\}$,

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k = b_n$$

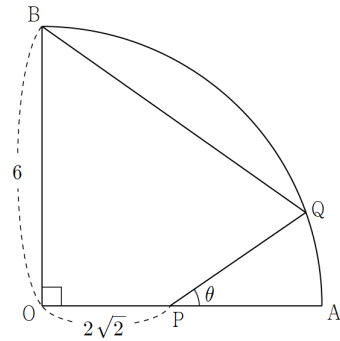
이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+2}}{b_n}$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

20. 그림과 같이 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA 위의 점 P와 호 AB 위의 점 Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OP} = 2\sqrt{2}$
 (나) $\angle QPA = \theta$ 라 할 때 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$

\overline{BQ} 의 값은? [4점]



- ① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$
- ④ 8 ⑤ $4\sqrt{5}$

21. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \int_0^x e^t f(x-t) dt$$

이다. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + g(x) = xe^{x^2}$ 일 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{e+1}{2}$ ② $\frac{2e+1}{2}$ ③ $\frac{3e+1}{2}$
 ④ $\frac{4e+1}{2}$ ⑤ $\frac{5e+1}{2}$

단답형

22. 다항식 $(2x+1)^4$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하여라. [3점]

23. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ 를 따를 때, $E(X^2)$ 의 값을 구하여라. [3점]

24. 수열 $\left\{\left(\frac{x-2}{4}\right)^n\right\}$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 값의 합을 구하여라. [3점]

25. 함수 $f(x) = 2|\sin \pi x| + 4$ 는 주기가 a 인 주기함수이고, $f(x)$ 의 최솟값은 m , 최댓값은 M 이다. $a + m + M$ 의 값을 구하여라. [3점]

26. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$(가) \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - n$$

$$(나) \sum_{k=1}^n a_k b_k = (n-2)2^n + 2$$

- $b_5 + b_6$ 의 값을 구하여라. [4점]

27. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하여라. [4점]

- (가) $x+y+z=19$
 (나) x, y, z 는 어떤 삼각형의 세 변의 길이이다.

28. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = (\ln x)^n$$

이 두 개의 변곡점을 가지며, 두 변곡점의 x 좌표의 곱이 e^{10} 이하가 되도록 하는 자연수 n 값의 합을 구하여라. [4점]

29. 집합

$$A = \{x \mid x \text{는 } n \text{ 이하의 자연수}\} \quad (\text{단, } n \geq 3)$$

의 부분집합 중 원소의 개수가 3인 모든 부분집합에 대하여 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값을

$f(n)$ 이라 하자. $\sum_{k=3}^{10} f(k)$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 실수 a 에 대하여

$$f(x) = a \sin x$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x_1 x_2 < 0$ 를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2) \leq 0$ 이다.
- (나) 방정식 $xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 0$ 의 실근은 존재하지 않는다.

$f(2\pi) - f(-2\pi) = 2\pi$ 일 때, $\frac{1}{\pi^2} \int_{-2\pi}^{6\pi} f(x) dx$ 의 값을 구하여라. [4점]

[나승민/한성은 모의고사]
수능(가형) 연습(2/4) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	㉔	02	㉑	03	㉕	04	㉓	05	㉑
06	㉓	07	㉔	08	㉑	09	㉒	10	㉕
11	㉓	12	㉓	13	㉔	14	㉑	15	㉔
16	㉕	17	㉕	18	㉔	19	㉒	20	㉓
21	㉑	22	24	23	416	24	20	25	11
26	24	27	45	28	35	29	792	30	12

COMMENT 10

$$\frac{\log_a b}{2} = \frac{\log_b c}{3} = \frac{\log_c a}{4} = k \text{라 두면 } \log_a b = 2k, \log_b c = 3k, \log_c a = 4k \text{이다.}$$

세 등식을 변끼리 모두 곱하면 $k = 2\sqrt[3]{3}$ 이고, $2\log_a a = 3\log_b b = 4\log_c c = \frac{1}{k} = 2\sqrt[3]{3}$ 이다.

COMMENT 16

$2\log_2 x - k \leq 0$ 일 때 : $-2\log_2 x + k = \log_2 x + 1 \Rightarrow 3\log_2 x = k - 1 \Rightarrow x = 2^{\frac{k-1}{3}}$, 애가 α 이다.

$2\log_2 x - k > 0$ 일 때 : $2\log_2 x - k = \log_2 x + 1 \Rightarrow \log_2 x = k + 1 \Rightarrow x = 2^{k+1}$, 애가 β 이다.

COMMENT 17

$$f(m) = (-1)^{m+2}(m+1)^2, \quad g(m) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

COMMENT 18

$\frac{dy}{dx} = \frac{2te^{t^2+1}}{3t^2+1}$ 이고, 애는 $t=0$ 일 때 0이다. $x=g(t)$ 는 증가함수이고 $t=0$ 일 때 $x=4$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x < 4$ 에서 감소, $4 < x$ 에서 증가한다. $a_3 = f(4)$, $a_4 = f(4)$, $a_6 = f(6)$ 이다.

$x=4$ 일 때는 $t=0$ 일 때이므로 $f(4) = e$, $x=6$ 일 때는 $t=1$ 일 때이므로 $f(6) = e^2$ 이다.

COMMENT 19

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} a_k = \sum_{k=1}^{2^n} a_k + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \text{이고, } \begin{cases} a_{2^{n+1}} = a_{2^n} + 1 \\ a_{2^n+i} = a_i (1 \leq i \leq 2^n - 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$b_{n+1} = b_n + (b_n + 1)$ 이다. 따라서 $b_{n+2} = 4b_n + 3$ 이다.

COMMENT 20

$\overline{PQ} = x$ 라 할 때, 삼각형 OPQ에서 코사인 돌리면

$$6^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2 - 4\sqrt{2}x \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Leftrightarrow (\sqrt{3}x - 6)(\sqrt{3}x + 14) = 0$$

이므로 $x = 2\sqrt{3}$ 이다. 사인 돌리면 $\sin(\angle POQ) = \frac{1}{3}$ 이다.

$\angle BOQ = \frac{\pi}{2} - \angle POQ$ 이므로 $\cos(\angle BOQ) = \frac{1}{3}$ 이다. 삼각형 BOQ에서 코사인.

COMMENT 21

$g(x) = \int_0^x e^t f(x-t) dt$ 에서 $x-t = \alpha$ 로 치환하면 $g(x) = e^x \int_0^x e^{-\alpha} f(\alpha) d\alpha$ 이다.

양 변을 미분하면 $g'(x) = e^x \int_0^x e^{-\alpha} f(\alpha) d\alpha + f(x) = g(x) + f(x)$ 이다.

$g'(x) = xe^{x^2}$ 이므로 $g(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ 이고 $g(0) = 0$ 이므로 $g(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}$ 이다.

$f(x) = g'(x) - g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{x^2} + \frac{1}{2}$ 이다.

COMMENT 27

세 자연수 x, y, z 중 어느 하나가 다른 두 수의 합보다 작아야 한다.

⇒ 가장 큰 자연수가 9 이하이다.

전체 경우의 수 ${}_3H_{16}$ 에서 어느 하나가 10 이상인 경우의 수 ${}_3H_7 \times 3$ 을 빼면 된다.

COMMENT 28

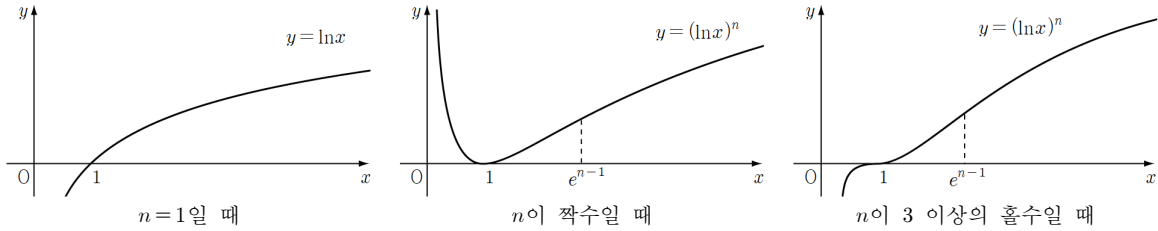
$n=1$ 일 때는 변곡점을 갖지 않는다.

$n \geq 2$ 일 때, $f''(x) = \frac{n(\ln x)^{n-2}\{(n-1) - \ln x\}}{x^2}$ 에서 $f''(x)=0$ 의 근은 $x=1, x=e^{n-1}$ 이다.

$x=e^{n-1}$ 일 때는 짝박 변곡점이고 $x=0$ 일 때는 n 이 홀수일 때 변곡점이다.

두 변곡점을 가지려면 n 은 홀수, 두 변곡점의 x 좌표의 곱은 e^{n-1} 이므로

해당하는 n 은 3, 5, 7, 9, 11이다.



COMMENT 29

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \sum_{k=1}^{n-2} \{k \times {}_{n-k}C_2\} \\
 &= ({}_{n-1}C_2 + {}_{n-2}C_2 + \dots + {}_2C_2) + ({}_{n-2}C_2 + {}_{n-3}C_2 + \dots + {}_2C_2) + ({}_{n-3}C_2 + \dots + {}_2C_2) + \dots + {}_2C_2 \\
 &= {}_n C_3 + {}_{n-1}C_3 + {}_{n-2}C_3 + \dots + {}_3C_3 = {}_{n+1}C_4
 \end{aligned}$$

※ $f(n) = \sum_{k=1}^{n-2} \{k \times {}_{n-k}C_2\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{n-2} \frac{k(n-k)(n-k-1)}{2}$ 을 푸는 것도 가능하다. 이론상.

COMMENT 30

(나)에서 $\frac{1}{x} = t$ 로 치환하면 $t \neq 0$ 일 때 $\frac{f(t)-t}{t} = 0$ 의 실근이 존재하지 않는다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 $x \neq 0$ 일 때 직선 $y=x$ 와 교점을 갖지 않는다.

(가)에서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0)$ 나 구간 $(0, \infty)$ 에서 볼록성을 바꾸지 못한다.

$a > 0$ 라 가정하면 $f(x)$ 는 $f(2\pi) - f(-2\pi) = 2\pi$ 를 만족시킬 수 없다.

$f(\pi) = 0, f'(\pi) < 0, x > \pi$ 에서 위로 볼록,

$f(-\pi) = 0, f'(-\pi) > 0, x < -\pi$ 에서 아래로 볼록

이기 때문. $f(2\pi) - f(-2\pi) < 2\pi$ 가 된다.

평균값의 정리나 정적분과 부등식으로 증명하는 것이 가능하지만, 수능 준비하는 입장에서는 비추. 대충 개형에서 읽어 낼 수 있도록.

$a < -1$ 인 경우에도 불가능. $f(2\pi) - f(-2\pi) > 2\pi$ 가 된다.

$-1 < a < 0$ 인 경우에도 불가능.

이 경우에는 $f(2\pi) - f(-2\pi) = 2\pi$ 를 만족시키는 것은 가능하지만,

곡선 $y=f(x)$ 는 $|x| > 2\pi$ 일 때 직선 $y=x$ 와 적어도 한 점에서 만나게 된다.

뒤 그래서 $a = -1$ 이고 $|x| \geq \pi$ 인 구간은 반직선으로 채워야 한다.

반직선이 잠깐이라도 어긋나면 직선 $y=x$ 와 만나버려서 망한다

