

[권구승/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학(가형) 연습 (1/4) |

| 권구승 (서울대)

이강학원(대치, 분당), 이투스앤써.

보통은 무슨 일이든 시간과 노오력을 갈아넣은만큼 성과가 나오더군요.
여러분도 원하는게 있다면 뭐든 갈아 넣읍시다.

| 한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

노골적인 6월 변형이면서 살짝 구색 맞추기.
평가원을 반영하여 최대한 퀄을 낮쳤습니다.

hansungeun.com

- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(가형)

5지선다형

1. 32×2^{-3} 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 12

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{e^{4x} - e^{2x}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_4 = a_2 + 6$$

일 때, a_{10} 의 값은? [2점]

- ① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

4. 6개의 문자 a, a, b, b, b, c 를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

- ① 48 ② 52 ③ 56
④ 60 ⑤ 64

2

수학 영역(가형)

5. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n} = 5$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2a_n^2 + 5n^2}{a_n^2 + n^2}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. 두 양수 a, b 에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_0 a), (3, \log_3 b)$ 를 지나고 원점을 지날 때, $\log_a b$ 의 값은? (단, $a \neq 1$) [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

7. 함수

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1} - 1}{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n} + 3}$$

에 대하여 $f(k) = -\frac{1}{3}$ 을 만족시키는 정수 k 의 개수는?

[3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8. $\int_1^e \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{e}$ ② $-\frac{2}{e}$ ③ $-\frac{3}{e}$
 ④ $-\frac{4}{e}$ ⑤ $-\frac{5}{e}$

9. 함수

$$f(x) = \log_2(2x + k)$$

가 닫힌구간 $[0, 14]$ 에서 최솟값 2, 최댓값 M 을 갖는다.

$k + M$ 의 값은? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

10. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가

$$x = t - \sin t, \quad y = t - \cos t$$

일 때, π 초 후의 점 P 의 속력은? [3점]

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$ 의

값은? 1) [3점]

① $\frac{1}{8} \ln 2$

② $\frac{1}{4} \ln 2$

③ $\frac{1}{2} \ln 2$

④ $\ln 2$

⑤ $2 \ln 2$

12. 자연수 n 이 $2 \leq n \leq 10$ 일 때, x 에 대한 방정식

$$x^n = -n^2 + 15n - 50$$

이 적어도 하나의 실근을 갖고, 모든 실근의 합이 0 이하가 되도록 하는 모든 n 의 값의 합은? [3점]

① 32

② 30

③ 28

④ 26

⑤ 24

13. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n} = 2a_n + 1 \\ a_{2n+1} = a_n + 2 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4 + a_5 = 18$ 일 때, $a_{14} + a_{15}$ 의 값은?

[3점]

- ① 18 ② 21 ③ 24
 ④ 27 ⑤ 30

14. 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르고

$$\frac{P(X=1)}{P(X=0)} = 9, \quad \sigma(2X-1) = 4$$

일 때, n 의 값은? [4점]

- ① 18 ② 15 ③ 12
 ④ 9 ⑤ 6

6

수학 영역(가형)

15. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$$

를 만족시킬 때, 다음은 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} = (n-1)a_1 a_n \dots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=2$ 일 때 (좌변) = (우변) = $a_1 a_2$ 이므로

(*)이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{i+1} = (k-1)a_1 a_k$$

이다. $n=k+1$ 일 때

$$\sum_{i=1}^k a_i a_{i+1} = (k-1)a_1 a_k + a_k a_{k+1} \dots (**)$$

이다. 한편 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}}$$

이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다. 이 수열의

공차를 d 라 하자. 등식 (**)의 우변에서

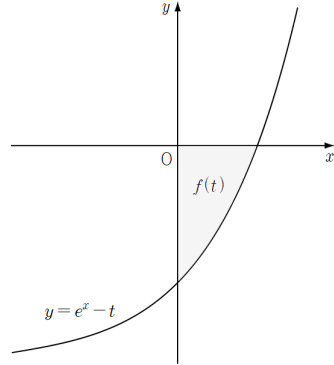
$$\begin{aligned} (k-1)a_1 a_k + a_k a_{k+1} &= a_1 a_k a_{k+1} \left\{ \frac{k-1}{a_{k+1}} + \frac{1}{a_1} \right\} \\ &= a_1 a_k a_{k+1} \left\{ (k-1) \left(\frac{1}{a_k} + d \right) + \left(\frac{1}{a_k} - \boxed{(가)} \right) \times d \right\} \\ &= a_1 a_k a_{k+1} \left\{ \frac{k-1}{a_k} + \frac{1}{a_k} \right\} \\ &= \boxed{(나)} \times a_1 a_{k+1} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 이라 할 때, $f(7)+g(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

16. 1보다 큰 실수 t 에 대하여 곡선 $y=e^x-t$ 및 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $f(t)$ 라 하자. $f'(e)$ 의 값은? [4점]



- ① 1 ② \sqrt{e} ③ e
④ $e\sqrt{e}$ ⑤ e^2

17. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 1이 적혀 있는 카드와 2가 적혀 있는 카드가 이웃하거나 2가 적혀 있는 카드와 3이 적혀 있는 카드가 이웃할 확률은? [4점]

- ① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{3}{5}$
 ④ $\frac{19}{30}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

18. 두 곡선 $y = \log_2 x$ 과 $y = 2^{-x}$ 이 만나는 두 점을 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $2y_2 < 1 < 2y_1$

ㄴ. $x_2 < x_1 + 1$

ㄷ. $\sqrt{2} < 8y_1y_2 < 3$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. D고등학교 학생들의 하루 공부 시간은 평균이 10분, 표준편차가 4분인 정규분포를 따른다고 한다. 임의로 선택한 D고등학교 학생 한 명의 하루 공부 시간이 12분 이상이거나, D고등학교 학생 중 4명을 임의추출하여 구한 하루 공부 시간의 표본평균이 12분 이상일 확률을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

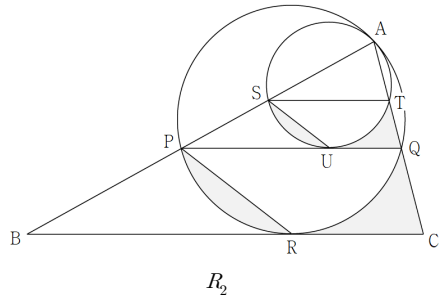
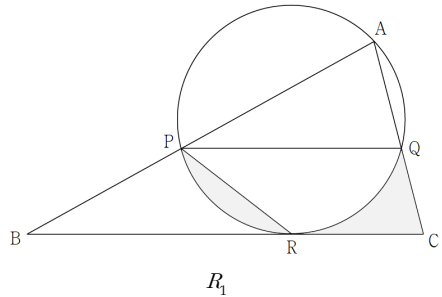
- ① 0.1104 ② 0.2346 ③ 0.3426
- ④ 0.4204 ⑤ 0.5796

20. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=2$ 이고 $\cos(\angle BAC) = \frac{1}{4}$ 인

삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 P, 선분 AC 위의 점 Q에 대하여 직선 PQ는 직선 BC와 평행하며 세 점 A, P, Q를 지나는 원이 직선 BC와 점 R에서 접한다. 두 선분 CQ, CR과 호 QR로 둘러싸인 부분과 선분 PR과 호 PR로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 AP 위의 점 S, 선분 AQ 위의 점 T에 대하여 직선 ST는 직선 PQ와 평행하며 세 점 A, S, T를 지나는 원이 직선 PQ와 점 U에서 접한다. 두 선분 QT, QU와 호 TU로 둘러싸인 부분과 선분 SU와 호 SU로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{15}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{15}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{15}}{14}$
- ④ $\frac{2\sqrt{15}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{14}$

21. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}, \quad b_n = 2 + \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$$

이다. $100b_m$ 의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m 의 값의 합은? [4점]

- ① 180 ② 170 ③ 160
 ④ 150 ⑤ 140

답답형

22. 함수 $2\sin x + 3$ 의 최댓값을 구하여라. [3점]

23. 다항식 $(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^2 의 계수가 45일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라. [3점]

24. 반지름의 길이가 10인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B = \frac{4}{5}$ 일 때, 선분 AC의 길이를 구하여라. [3점]

25. 함수 $e^x(x^2+4x+a)$ 의 극값이 존재하지 않도록 하는 실수 a 의 최솟값을 구하여라. [3점]

26. 이산확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$P(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	b	1

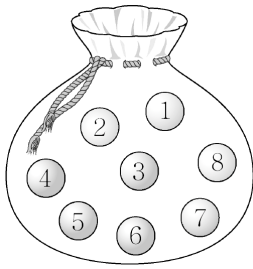
이산확률변수 Y 가 갖는 값은 1, 3, 5이고

$$P(Y=2i-1) = a \times P(X=i) + b \quad (i=1, 2, 3)$$

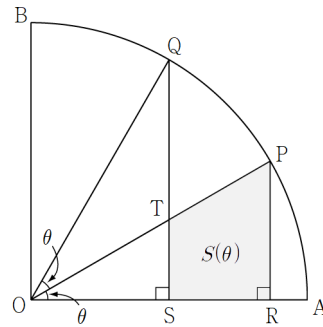
일 때, $E(3Y+1)$ 의 값을 구하여라.

(단, a 와 b 는 상수이다.) [4점]

27. 주머니에 숫자 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 공 8개가 들어 있다. A가 이 주머니에서 2개의 공을 임의로 꺼내고, B가 남아 있는 6개의 공 중에서 2개의 공을 임의로 꺼낸다. 이 시행에서 A가 꺼낸 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 4의 배수일 때, B가 꺼낸 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 짝수일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. $\angle POA = \angle POQ = \theta$ 인 호 AB 위의 두 점 P, Q에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 각각 R, S, 두 직선 OP, QS의 교점을 T, 사각형 SRPT의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = a$ 일 때, $60a$ 의 값을 구하여라. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



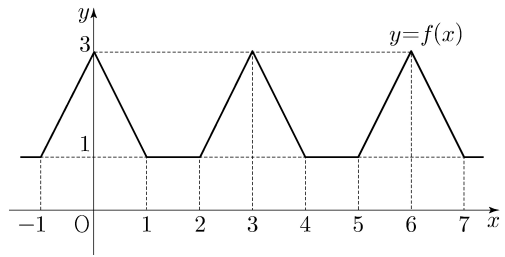
29. 검은색 볼펜 3자루, 파란색 볼펜 1자루, 빨간색 볼펜 1자루, 노란색 볼펜 1자루가 있다. 이 6자루의 볼펜을 4명의 회사원에게 남김없이 나누어줄 때 각 회사원이 적어도 1개의 볼펜을 받는 경우의 수를 구하여라. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 는 $0 \leq x \leq 3$ 일 때 $f(x) = |x-1| + |x-2|$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3) = f(x)$ 를 만족시킨다. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(\log_2(x+h)) - f(\log_2(x-h))}{2h} \right|$$

$x = a$ 에서 불연속인 a 의 값 중에서 열린구간 $(1, 100)$ 에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, \dots, a_n (n 은 자연수)라 할 때,

$n + 32 \sum_{k=1}^n \{\ln 2 \times g(a_k)\}$ 의 값을 구하여라. [4점]



[권구승/한성은 모의고사]
수능(가형) 연습(1/4) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	②	03	①	04	④	05	⑤
06	③	07	⑤	08	①	09	②	10	④
11	③	12	①	13	②	14	①	15	②
16	①	17	③	18	⑤	19	④	20	③
21	①	22	5	23	10	24	16	25	5
26	9	27	12	28	90	29	388	30	33

COMMENT 15

$$f(k) = k-1, \quad g(k) = k$$

COMMENT 18

기역 : 곡선 $y=2^{-x}$ 가 $x=1$ 과 만나는 점의 y 좌표가 $\frac{1}{2}$ 이다.

니은 : 점 (x_1, y_1) 은 직선 $y=x$ 위의 점이다. 점 (x_2, y_2) 는 (x_1+1, y_1) 의 왼쪽의 왼쪽 아래에 있다.

디근 : 직선 $y=x$ 와 점 $(\frac{1}{2}, 1)$ 과 점 $(1, \frac{1}{2})$ 를 지나는 직선의 교점이 $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ 이므로 $x_1 = y_1 < \frac{3}{4}$ 이다.

왼쪽 : $2^{-\frac{5}{2}} < 2^{-x_1} \times 2^{-x_2}$ 에서 $x_1 + x_2 < \frac{5}{2}$ 이다. $x_2 < x_1 + 1$ 이므로 $x_1 < \frac{3}{4}$ 이면 각이다. $\circ \times$

오른쪽 : $y_2 < \frac{1}{2}$ 이므로 $y_1 < \frac{3}{4}$ 이면 각이다. $\circ \times$

COMMENT 19

한 명의 하루 공부 시간이 12분 이상일 확률은 $P(Z \geq 0.5) = 0.31$ 이고

표본평균 \bar{X} 는 $N(10, 2^2)$ 을 따르므로 $\bar{X} \geq 12$ 일 확률은 $P(Z \geq 1) = 0.16$ 이다.

여사건 돌려서 $1 - (1-0.31)(1-0.16)$ 해도 좋고, $0.31 + 0.16 - 0.31 \times 0.16$ 해도 좋다.

COMMENT 20

삼각형 ABC에서 코사인 돌리면 $\overline{BC} = 4$ 이다.

$\overline{BP} = 4t$, $\overline{CQ} = 2t$ 라 두자. 방벽 돌리면 $\overline{BR} = 4\sqrt{t}$, $\overline{CR} = 2\sqrt{t}$ 이므로 $t = \frac{4}{9}$ 이다.

$\overline{BR} : \overline{CR} = 2 : 1$ 이므로 AR은 각 BAC의 이등분선이다. $\overline{PR} = \overline{QR}$ 이고 R_1 의 색칠한 도형의 넓이는 $\frac{4\sqrt{15}}{27}$ 이다.

넓음비는 $1 : (1-t)$ 이므로 $9 : 5$, 넓이비는 $81 : 25$, 공비는 $\frac{25}{81}$ 이다.

COMMENT 21

$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ 이고 b_n 은 $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}, \frac{7}{8}, \dots$ 이다.

$100b_m$ 이 100 이하의 자연수가 되려면 분모가 짝수인 100의 약수가 되어야 한다.

가능한 분모는 2, 4, 10, 20, 50, 100이고 m 은 1, 3, 9, 19, 49, 99이다.

COMMENT 27

$P(A가\ 4의\ 배수) = \frac{1}{2}$ 이고, $P(A가\ 4의\ 배수 \cap B가\ 홀수) = \frac{1}{7}$ 이다. 여사건을 이용하여 구하는 확률은

$$1 - P(B가\ 홀수 | A가\ 4의\ 배수) = 1 - \frac{P(A가\ 4의\ 배수 \cap B가\ 홀수)}{P(A가\ 4의\ 배수)} = \frac{5}{7}$$

이다.

COMMENT 28

$\overline{OS} = \cos 2\theta$ 이므로 $\overline{TS} = \cos 2\theta \times \tan \theta$ 이다. $\overline{PR} = \sin \theta$ 이고 $\overline{RS} = \cos \theta - \cos 2\theta$ 이므로

사다리꼴 SRPT의 넓이는 $\frac{\sin \theta + \cos 2\theta \tan \theta}{2} (\cos \theta - \cos 2\theta)$ 이다.

$\frac{\sin \theta + \cos 2\theta \tan \theta}{2}$ 는 대충 $\frac{\theta + \theta}{2} = \theta$ 이고 $\cos \theta - \cos 2\theta = (1 - \cos 2\theta) - (1 - \cos \theta)$ 는 대충 $\frac{1}{2}(2\theta)^2 - \frac{1}{2}\theta^2 = \frac{3}{2}\theta^2$ 이다.

COMMENT 29

검은색이 아닌 색 볼펜을 몇 명에게 나눠주는지로 분류하자.

Case1) 모든 색 볼펜을 한 명에게 줄 때 : 회사원 선택 4가지, 검은색 나눠주는 방법 1(= ${}_4H_0$)가지.

Case2) 색 볼펜을 두 명에게 줄 때 : 색 볼펜 분할 3가지, 회사원 선택 4×3 가지, 검은색 나눠주는 방법 4(= ${}_4H_1$)가지.

Case2) 색 볼펜을 세 명에게 줄 때 : 회사원 선택 $4 \times 3 \times 2$ 가지, 검은색 나눠주는 방법 10(= ${}_4H_2$)가지.

COMMENT 30

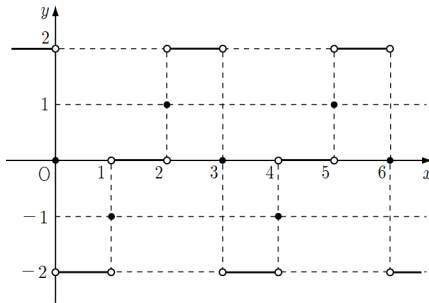
함수 $f(t)$ 가 $t = \log_2 x$ 에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(\log_2(x+h)) - f(\log_2(x-h))}{2h} = \frac{f(\log_2(x+h)) - f(\log_2(x-h))}{\log_2(x+h) - \log_2(x-h)} \times \frac{\log_2(x+h) - \log_2(x-h)}{2h} \text{에서}$$

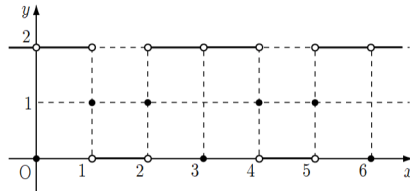
$$\frac{f(\log_2(x+h)) - f(\log_2(x-h))}{\log_2(x+h) - \log_2(x-h)} \text{는 } f'(\log_2 x) \text{로, } \frac{\log_2(x+h) - \log_2(x-h)}{2h} \text{는 } \frac{1}{\ln 2 \times x} \text{로 수렴한다.}$$

$f(t)$ 가 미분가능하지 않을 때는 $f'(\log_2 x)$ 대신 그거 있잖아, 대칭미분계수, 그걸로 수렴한다.

우선 $f(x)$ 의 대칭미분계수의 그래프는 [그림1]과, 절댓값 때린 것은 [그림2]와 같다.



[그림1]



[그림2]

절댓값을 대충 밖으로 뺄 수 있고, $g(x)$ 는 $\log_2 x$ 의 값이 정수일 때 불연속이다.

$x = a$ 에서 불연속인 a 의 값은 $\log_2 a = 1, \log_2 a = 2, \log_2 a = 3, \log_2 a = 4, \dots$ 일 때이므로

열린구간 $(1, 100)$ 에는 $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 = 32, a_6 = 64$ 의 여섯 개가 존재한다.

$$g(a_1) = \frac{1}{\ln 2 \times 2}, g(a_2) = \frac{1}{\ln 2 \times 4}, g(a_3) = 0, g(a_4) = \frac{1}{\ln 2 \times 16}, g(a_5) = \frac{1}{\ln 2 \times 32}, g(a_6) = 0 \text{이다.}$$

$$\text{구하는 값은 } 6 + 32 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \right) = 33 \text{이다.}$$