

[니네가 만든 모의고사]

| 6월 모의고사(가형) 연습 |

| 한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

제 학생들이 출제한 문항 위주로 만든 모의고사입니다.
살짝 도전적인 구성이 되었지만, 고렐 사실짬은 되는 것 같아요.
난이도는 지옥불이니 점수 신경 쓰지 마시고 즐겁게 푸세요.

출제자 명단입니다. 아는 친구 있으면 칭찬해주세요.

[대진고 김현빈], [대진고 정윤하], [대진고 박준한], [대진고 정구용], [대진고 함재현],
[운정고 김한솔], [운정고 임진섭], [운정고 김승배], [일산동고 김상우]

hansungeun.com

- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(가형)

5지선다형

1. ${}_{10}C_8$ 의 값은? [2점]

- ① 36 ② 39 ③ 42
④ 45 ⑤ 48

2. $\tan \frac{8\pi}{3}$ 의 값은? [2점]

- ① $\sqrt{3}$ ② 1 ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. $(x^2 + 2x)^4$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는? [3점]

- ① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

5. 곡선 $x^2 - xy^2 = 2y$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

6. 두 사건 A 와 B 가

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B \cap A^c) = \frac{1}{9}$$

일 때, $P(B|A^c)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

7. $0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $4\sin^2 x = 1$ 과 부등식 $\sin x \cos x < 0$ 을 동시에 만족시키는 모든 x 의 값의 합은? [3점]

- ① 2π ② $\frac{7}{3}\pi$ ③ $\frac{8}{3}\pi$
 ④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

8. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{(n+1)a_n - (2n+1)\} = 4$$

이 성립할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

9. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 = 10, \quad \frac{a_4 + a_7 + a_{10}}{a_1 + a_4 + a_7} = 8$$

일 때, $(a_4 - a_3)^2$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 8 ③ 16
 ④ 32 ⑤ 64

10. A, A, B, B, B, B의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, A가 적힌 두 장의 카드가 서로 이웃하지 않게 나열될 확률은? [3점]



- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$
 ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

11. 곡선 $y = 3\sin 2x - ax^2$ 이 변곡점을 갖도록 하는 자연수 a 의 최댓값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

12. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & a_{2n-1}a_{2n+1} = a_{2n}^2 \\ \text{(나)} \quad & a_{2n} + a_{2n+2} = 2a_{2n+1} \end{aligned}$$

수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n b_k = a_{n+1} - a_n$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} kb_k$ 의 값은? [3점]

- ① 23 ② 25 ③ 27
 ④ 29 ⑤ 31

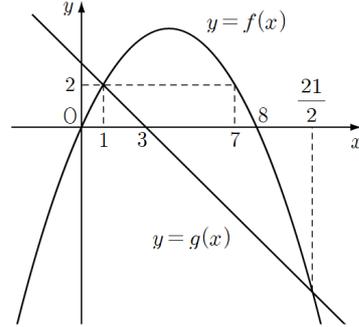
13. 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $A(e^2, 2)$ 에서의 접선과 곡선 $y = -\ln x$ 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, 삼각형 AOB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

- ① $e^2 - \frac{2}{e^2}$ ② $e^2 - \frac{1}{e^2}$ ③ e^2
- ④ $e^2 + \frac{1}{e^2}$ ⑤ $e^2 + \frac{2}{e^2}$

14. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 일차함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은? [4점]

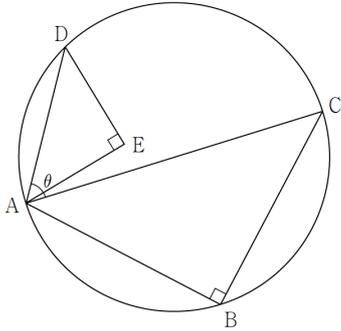


- ① 22 ② 26 ③ 30
- ④ 34 ⑤ 38

6

수학 영역(가형)

15. 그림과 같이 $\overline{AC}=2$, $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형 ABC 가 원 O 에 내접하고 있다. 원 O 위의 점 D 와 원 내부의 점 E 에 대하여 직각이등변삼각형 AED 는 $\overline{AE}=\overline{ED}$, $\angle E=\frac{\pi}{2}$ 이다. $\angle DAC=\theta$ 일 때, 호 CD 의 길이를 $f(\theta)$, 삼각형 ACE 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1-S(\theta)}{f(\theta)}$ 의 값은? (단, $\angle DAB > \frac{\pi}{4}$ 이다.) [4점]



- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ③ 1
- ④ $\sqrt{2}$
- ⑤ 2

16. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{S_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $m \leq n$ 인 모든 n 에 대하여 $S_m \leq S_n$ 이 성립하는 m 의 최솟값은 8이다.
 (나) $S_{17}S_{18} \leq 0$

$\frac{S_{18}}{a_{10}}$ 의 값은? [4점]

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

17. 좌표평면 위의 점 P는 원점에서 출발하여 x 축의 방향으로 1만큼 또는 y 축 방향으로 1만큼 이동하는 것을 반복한다. 다음은 $0 \leq k \leq 6$ 인 정수 k 에 대하여 점 P가 점 $B_k(k, 6-k)$ 를 지나 점 A(12, 6)로 이동하는 경우의 수를 N_k 라 할 때, N_k 가 최대가 되는 k 의 값을 구하는 과정이다.

$0 \leq k \leq 6$ 인 정수 k 에 대하여 점 P가 원점에서 B_k 까지 이동하는 경우의 수는 ${}_6C_k$ 이고, B_k 에서 A까지 이동하는 경우의 수는 ${}_{12}C_k$ 이므로

$$N_k = \boxed{\text{(가)}}$$

이다.

$0 \leq k \leq 5$ 인 정수 k 에 대하여

$$\frac{N_{k+1}}{N_k} = \frac{\boxed{\text{(나)}}}{(k+1)^2}$$

이므로 $N_k < N_{k+1}$ 을 만족시키는 정수 k 의 최댓값은 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

따라서 $0 \leq k \leq 6$ 인 정수 k 에 대하여 N_k 는 $k = \boxed{\text{(다)}} + 1$ 일 때 최댓값을 갖는다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, (다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $f(1)+g(2)+p$ 의 값은? [4점]

① 106 ② 109 ③ 112
 ④ 115 ⑤ 118

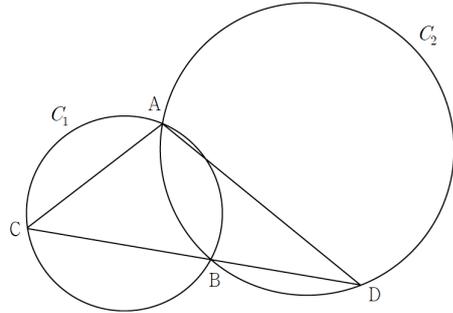
18. 그림과 같이 반지름의 길이가 r_1 인 원 C_1 과 반지름의 길이가 r_2 인 원 C_2 가 두 점 A, B에서 서로 만나고 원 C_1 위의 점 C와 원 C_2 위의 점 D에 대하여 점 B는 선분 CD 위의 점이다. 네 점 A, B, C, D는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{CD} = 12$

(나) 삼각형 ACD의 넓이는 $\frac{27\sqrt{15}}{4}$ 이다.

(다) 삼각형 ACD의 외접원의 넓이는 $\frac{192}{5}\pi$ 이다.

$\frac{r_2}{r_1}$ 의 값은? (단, $\angle CAD > \frac{\pi}{2}$, $\overline{AC} < \overline{AD}$ 이다.) [4점]



- ① $\frac{11}{6}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

19. 방정식 $a+b+c+d=6$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c, d) 가

$$a+b=c+d$$

를 만족시킬 확률은? [4점]

- ① $\frac{1}{21}$ ② $\frac{2}{21}$ ③ $\frac{1}{7}$
 ④ $\frac{4}{21}$ ⑤ $\frac{5}{21}$

20. $x > 0$ 에서 정의된 두 함수 $f(x) = |x^2 \sin x|$,
 $g(x) = x^2$ 에 대하여 방정식

$$f(x) = g(x)$$

의 근 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

- ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 ㄴ. 수열 $\{f'(a_n)\}$ 은 등차수열이다.
 ㄷ. 모든 자연수 n 에 대하여 구간 $(a_n, n\pi)$ 에 $f'(c) = 0$ 인 c 가 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 상수 $a(a < 1)$, b , c 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{\pi} \sin \pi x + 4 & (x > 0) \\ ax^2 + 2x + c & (x \leq 0) \end{cases}$$

이다. $f(x)$ 와 $g(x) = x^2$ 에 대하여 함수

$$h(x) = |g(x) - f(x)|$$

는 오직 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ ($\alpha < \beta$)에서만 극솟값을 가진다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의 접선과 점 $(\beta, f(\beta))$ 에서의 접선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, α , β , θ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(\beta)g'(\beta) = -1$
 (나) $2(\alpha - \beta)\cos\theta = (1 + 4\alpha\beta)\sin\theta$

abc 의 값은? (단, $-\frac{1}{4} < f'(\alpha) < 4$ 이다.) [4점]

- ① $-\frac{5}{9}$ ② $-\frac{4}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$
 ④ $-\frac{2}{9}$ ⑤ $-\frac{1}{9}$

단답형

22. $3^4 \times 3^{-1}$ 의 값을 구하여라. [3점]

23. 함수 $f(x) = (\ln x)^2$ 에 대하여 $ef'(e)$ 의 값을 구하여라. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \times \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} = 3$$

이 성립할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)a_n$ 의 값은? [3점]

25. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라. [3점]

X 의 모든 원소 x 에 대하여 $|f(x) - x| \leq 1$ 이다.

26. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 과 모든 자연수 n 에 대하여 이차방정식

$$x^2 - (a_n + 4)x + b_n = 0$$

의 두 근은 1과 a_{n+1} 이다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n b_n} = \frac{1}{30}$ 일 때, a_1 의 값을 구하여라. [4점]

27. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 10 이하의 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^n (k-2)a_k = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$

(나) $b_n = \sum_{k=n}^{10} (2k - a_n)$

b_5 의 값을 구하여라. [4점]

28. A, B, C, D를 포함한 8명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. A와 B는 서로 마주보고, C와 D는 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수를 구하여라.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

29. $0 < a < 10$ 인 실수 a 와, $0 < b < 2\pi$ 인 실수 b 에 대한 함수

$$f(x) = \sin a(x-b)$$

가 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라. [4점]

- (가) 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+4\pi)$ 이다.

30. 양의 실수 k 와 자연수 m 에 대하여 열린 구간

$\left(0, \frac{4m\pi}{k}\right)$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 각각

$$f(x) = \sin \frac{k}{4}x, \quad g(x) = \frac{f(x)+t}{x}$$

이다. 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수를 $h(t)$ 라 할 때, $h(t)$ 와 사차함수 $P(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 t 값의 개수는 4이고, 함수 $P(t)h(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이며 $P(\pi) = 2$ 이다.

$m - P(3\pi)$ 의 값은? [4점]

[니네가 만든 모의고사]
6월(가형) 연습 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	⑤	03	①	04	③	05	③
06	①	07	③	08	②	09	④	10	②
11	①	12	⑤	13	②	14	②	15	①
16	②	17	④	18	③	19	④	20	⑤
21	①	22	27	23	2	24	6	25	108
26	10	27	66	28	528	29	90	30	21

COMMENT 14 [운정고 김한솔]

y 좌표가 같게 나오는 점이 귀엽다.

COMMENT 15 [운정고 임진섭]

$$f(\theta) = 2\theta, \quad S(\theta) = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \cos\theta \times 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

COMMENT 16 [운정고 김승배]

$S_n = an^2 + bn$ 이라 하자. (가)에서 S_n 의 개형을 살펴보면 $a > 0$, $b < 0$ 이고 $7 + \frac{1}{2} < -\frac{b}{2a} \leq 8 + \frac{1}{2}$ 이다.

8이 대칭축보다 왼쪽으로 갈 수 있음에 주의. (나)에서 $17 \leq -\frac{b}{a} \leq 18$ 이다. 위 식과 연립하면 $-\frac{b}{a} = 17$ 이다.

$S_n = an^2 - 17an$ 이고 $a_n = 2an - 18a$ 이다.

COMMENT 17

$$f(k) = {}_6C_k \times {}_{12}C_k, \quad g(k) = (6-k)(12-k), \quad p=3$$

빈 칸 만들어달라고 노래를 불렀는데, 도움 안 되는 것들.

COMMENT 18 [대진고 김현빈]

삼각형 ACD에 대한 모든 것이 주어져 있다.

외접원의 반지름은 $\frac{8\sqrt{15}}{5}$, 사인법칙에 의해 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 이므로 $\cos A = -\frac{1}{4}$ 이다.

삼각형의 넓이와 코사인법칙을 연립하면 $\overline{AC} = 6$, $\overline{AD} = 9$ 이다.

사인법칙에서 $\sin C : \sin B = 3 : 2$ 이다. $\frac{\overline{AB}}{\sin C} = r_1$, $\frac{\overline{AB}}{\sin D} = r_2$ 이므로.

COMMENT 20 [대진고 정윤하]

ㄱ. $|\sin x| = 1$ 의 양수 근들을 작은 수부터 나열한 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$ 가 수열 $\{a_n\}$ 이다.

ㄴ. 대충 $f'(x) = \pm(2x \sin x + x^2 \cos x)$ 인데, $x = a_n$ 일 때, $\sin x = \pm 1$ 이고 $\cos x = 0$ 이라 $\{f'(a_n)\}$ 은 $\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$ 이다. $y = g(x)$ 와 접하므로 $\{g'(a_n)\}$ 을 구해도 좋다.

ㄷ. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{2}{x}$ 의 근의 위치를 살펴보자. 거기 있다.

COMMENT 21 [대진고 정윤하]

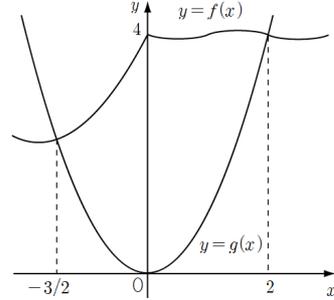
연속이므로 $c=4$ 이다. 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 $x<0$ 일 때 한 번, $x>0$ 일 때 한 번 만나고 그 때의 x 값이 각각 α 와 β 이다.

두 식을 빼려보면 $\beta=2$ 이고 (가)조건에서 $b=-\frac{1}{4}$ 이다.

$k(x)=ax^2+2x+4$ 라 하면, $k(\alpha)=\alpha^2$ 이고 (나)조건에서 $2\alpha \times k'(\alpha)=-1$ 이다.

연립하여 풀면 $\alpha=-\frac{3}{2}$, $k(x)=\frac{5}{9}x^2+2x+4$ 이다.

※ (나)조건을 기하적으로 처리하여 $f'(\alpha) \times g'(\alpha)=-1$ 을 얻을 수 있다.



COMMENT 27 [일산동고 김상우]

(가)에서 $(n-2)a_n = (n-1)(n-2)$ 이고 (나)에서 $b_n = \sum_{k=n}^{10} (2k - a_n) = \sum_{k=n}^{10} 2k - (11-n)a_n$ 이다.

COMMENT 28 [대진고 박준한]

C와 D가 마주보는 경우는 $3 \times 2 \times 4!$ 이고, C와 D가 마주보지 않는 경우는 $4 \times 2 \times 2 \times 4!$ 이다.

COMMENT 29 [대진고 정구용]

자연수 k 에 대하여 $\frac{2\pi}{a} \times k = 4\pi$ 이므로 $a = \frac{k}{2}$ 이다. $x=0$ 에서 극댓값을 가지려면 b 의 값은 $\frac{3\pi}{2a}$, $\frac{7\pi}{2a}$, $\frac{11\pi}{2a}$, ...가 가능하다.

$0 < b < 2\pi$ 에서 $\frac{3}{4} < a$, $\frac{7}{4} < a$, $\frac{11}{4} < a$, ...이다. 각각 $a < 10$ 에서 세면 $18+16+14+\dots+4+2$ 이다.

COMMENT 30 [대진고 함재현]

두 점 $(x, f(x))$ 과 $(0, -t)$ 사이의 기울기로 읽거나 두 점 $(0, 0)$ 과 $(x, f(x)+t)$ 사이의 기울기로 읽거나.

대충 변곡점선 각이죠? 구간 $\left[0, \frac{4m\pi}{k}\right]$ 에 변곡점 4개가 들어와야 하므로 $m=3$ 이다.

※ 왜 닫힌 구간이냐고 묻지 마라. 변곡점선은 원래 설명하는 것이 아니라 느끼는 것이다. k 가 변해도 접선의 y 절편이 변하지 않는 것이 관전 포인트. t 값 $-3\pi, -\pi, 0, 2\pi$ 에서 불연속이다.

$P(x) = a(x+3\pi)(x+\pi)x(x-2\pi)$ 이고 $P(\pi) = 2$ 에서 $P(x) = -\frac{1}{4\pi^4}(x+3\pi)(x+\pi)x(x-2\pi)$ 이다.