

[나승민/한성은 모의고사]

| 6월 모의고사(가형) 연습 (1/2) |

| 나승민 (성균관대 수학과)

이투스앤써, 이투스 네오
수학에 감각을 더하다.
Youtube #매 민TV
instagram @cremath_david

| 한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY
코로나19발 범위 변경을 반영하였습니다.
올해 수능은 치겠죠? 공부 열심히 하세요.
hansungeun.com
- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(가형)

1

5지선다형

1. $\sqrt[3]{4 \times 4^6}$ 의 값은? [2점]

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n(n+1)}$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이고 $\sin \theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$ 일 때, $\cos \theta$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$

4. 두 사건 A, B 에 대하여 A 와 B 는 서로 배반사건이고

$$P(A \cup B) = 5P(B) = 1$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

2

수학 영역(가형)

5. 세 수 $\frac{21}{12}$, x , $\frac{39}{12}$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때,
 x 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{17}{6}$
 ④ 3 ⑤ $\frac{19}{6}$

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 3) = 80, \quad \sum_{k=1}^{10} (a_k + 3b_k) = 200$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k)$ 의 값은? [3점]

- ① 250 ② 275 ③ 300
 ④ 325 ⑤ 350

7. $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{6}\right)$ 를 만족시키는 α 에 대하여
 $\tan\alpha$ 의 값은? [3점]

- ① $-2 - \sqrt{3}$ ② $-3 - \sqrt{3}$ ③ $-4 - \sqrt{3}$
 ④ $-5 - \sqrt{3}$ ⑤ $-6 - \sqrt{3}$

8. 두 양수 a, b 에 대하여 $\log_{\sqrt{2}}a = \log_3b = \log_24$ 일 때,

$\log_3(a+b)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

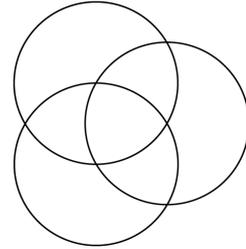
9. $-1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x}$ 의 최댓값을 M ,

최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

10. 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 3개의 원이 있다.

이 3개의 원은 각각 다른 2개의 원의 중심을 지난다.
 3개 원의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 1260 ② 1680 ③ 2520
 ④ 3760 ⑤ 5040

4

수학 영역(가형)

11. 두 실수 a, c 와 양수 b 에 대하여 함수

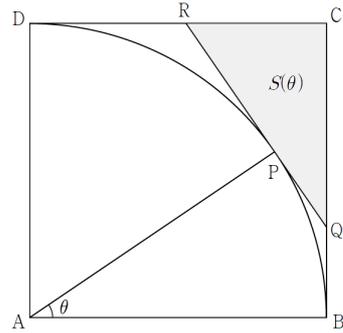
$$f(x) = a \sin bx + c$$

의 최솟값은 0, 최댓값은 4이다. 방정식 $f(x) = 0$ 의 양수인 근 중 가장 작은 것은 π , 두 번째로 작은 것은 5π 일 때, $b(c-a)$ 의 값은? [3점]

- ① 0 ② 1 ③ 2
 ④ 4 ⑤ 8

12. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD와 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C 위의 점 P에서의 접선이 두 선분 BC, CD와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자. $\angle PAB = \theta$ 라 할 때, 삼각형 CQR의 넓이는 $S(\theta)$ 이다. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [3점]

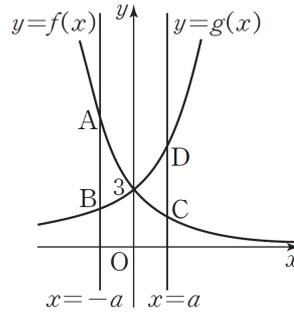


- ① 4 ② 2 ③ 1
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

13. 한 개의 주사위를 두 번 던진다. 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 때, 나온 두 눈의 수의 합이 3의 배수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$
- ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

14. 두 함수 $f(x) = \frac{3}{2^x}$, $g(x) = 2^{x+1} + 1$ 이 있다. 그림과 같이 직선 $x = -a$ 가 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x = a$ 가 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $2\overline{AB} + \overline{CD} = 54$ 일 때, 양수 a 의 값은? [4점]



- ① $-1 + \log_2 5$ ② $\log_2 7$ ③ $-1 + 2\log_2 3$
- ④ $\log_2 5$ ⑤ $1 + \log_2 7$

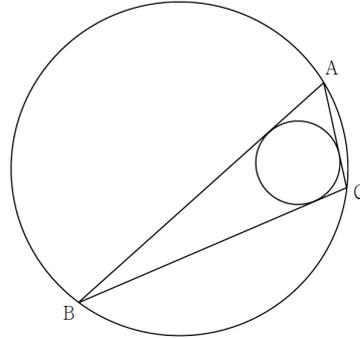
6

수학 영역(가형)

15. 자연수 p 에 대하여 다항식 $(x+p)^8$ 의 전개식에서 x^k 의 계수를 a_k 라 하자. 서로 다른 세 수 a_1, a_2, a_3 중 최댓값이 a_2 일 때, a_6 의 값은? [4점]

- ① 126 ② 168 ③ 252
 ④ 336 ⑤ 504

16. 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$ 인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle BAC = 60^\circ$ 이고 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다. $\overline{AB} + \overline{AC}$ 의 값은? [4점]



- ① 16 ② 17 ③ 18
 ④ 19 ⑤ 20

17. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k^3 = 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2$$

를 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_1 = 2$

ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = 2a_{n+1} + 4 \sum_{k=1}^n a_k \text{ 이다.}$$

ㄷ. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = 2n$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여

함수 $f: X \rightarrow X$ 는 다음 두 조건을 만족시킨다.

- (가) 집합 X 의 원소 i 에 대하여 $f(f(i)) = f(i)$ 이다.
 (나) 합성함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수는 4 이상이다.

다음은 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하는 과정이다.

함수 f 의 치역을 A 라 하자. 집합 A 의 원소 a 에 대하여 $f(b) = a$ 인 집합 X 의 원소 b 가 존재하므로 $f(a) = a$ 이다. 따라서 집합 A 의 원소의 개수가 k 개일 때, 함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수는 $\boxed{\text{가}}$ 이다.

6 이하의 자연수 k 에 대하여 $n(A) = k$ 인 집합 X 의 부분집합 A 를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{나}}$ 이다.

정의역의 원소 중 집합 A 에 속하지 않는 $(6-k)$ 개의 원소들은 각각 k 개의 함숫값 중 하나를 가질 수 있으므로, 이 $(6-k)$ 개의 원소가 함숫값을 선택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{다}}$ 이다.

구하는 경우의 수는 $\sum_{k=4}^6 \{ \boxed{\text{나}} \times \boxed{\text{다}} \}$ 인 271이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$ 라 할 때, $f(6) + g(5) + h(4)$ 의 값은? [4점]

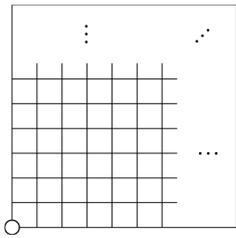
- ① 24 ② 26 ③ 28
 ④ 30 ⑤ 32

19. 돌을 놓을 수 있는 눈 $2n \times 2n$ 개가 있는 바둑판에 다음 단계에 따라 흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 올려 놓는다.

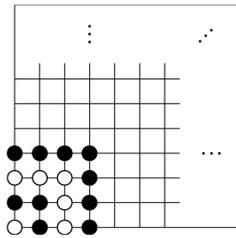
[단계1] [그림1]과 같이 바둑판 한쪽 구석의 눈에 흰 돌을 올려놓는다.

[단계2] 놓인 돌들의 바깥쪽에 돌들을 놓아 한 변의 길이가 1 늘어난 정사각형이 되도록 한다. 이때 전 단계에서 흰 돌을 놓았다면 검은 돌을, 검은 돌을 놓았다면 흰 돌을 놓는다.

[그림2]는 [단계2]를 세 번 반복한 것이다. 이와 같이 [단계2]를 바둑판의 $2n \times 2n$ 개의 눈이 가득 찰 때까지 반복했을 때, 검은 바둑돌의 개수를 a_n , 흰 바둑돌의 개수를 b_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\}$ 의 값은? [4점]



[그림1]



[그림2]

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ③ 1
- ④ $\sqrt{2}$
- ⑤ 2

20. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 1보다 큰 자연수 m 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^m a_k = 70$

(나) $\sum_{k=1}^{2m} a_k = 238$

a_{2m} 의 값은? [4점]

- ① 18
- ② 21
- ③ 24
- ④ 27
- ⑤ 30

21. 함수 $f(x) = \ln x$ 와 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 $y = x$ 가 이루는 예각이 t 인 점 P의 x 좌표 중 가장 작은 것을 $g(t)$, 가장 큰 것을 $h(t)$ 라 하자. $0 < a < \frac{\pi}{4}$ 인 실수 a 가 $\tan a = \frac{1}{2}$ 를 만족시킬 때, $g'(a) \times h'(a)$ 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{25}{2}$ ② $-\frac{100}{9}$ ③ -10
 ④ $-\frac{100}{11}$ ⑤ $-\frac{25}{3}$

단답형

22. ${}_4P_3$ 의 값을 구하여라. [3점]

23. 1이 아닌 양수 a, b 와 실수 x, y 에 대하여

$$\begin{aligned} a^2 b^3 &= 1, \\ b \times a^x &= a^4 \times b^y \end{aligned}$$

가 성립한다. $3x + 2y$ 의 값을 구하여라. [3점]

24. 미분가능한 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x) = x^3 + x$ 에 대하여
합성함수 $h(x) = (g \circ f)(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - f(x) - 1}{x - 1} = 6$$

일 때, $f'(1)$ 의 값을 구하여라. [3점]

25. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을
만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라. [3점]

- (가) $f(1) < f(3) < f(5) < f(6)$
(나) $f(4) \leq f(2)$

26. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k a_k = 2^n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하여라. [4점]

27. 첫째항이 26이고 공차가 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 과
 첫째항이 -6 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$$a_m b_m > 0$$

이 되게 하는 자연수 m 의 개수가 2가 되게 하는
 모든 실수 d 값의 범위는 $p \leq d < q$ 또는 $r < d \leq s$ 이다.
 $20pr$ 의 값을 구하여라. (단, $p < q < r < s$ 이다.) [4점]

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e 의
 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=12$

(나) $a+b+c$ 는 $d+e$ 의 배수이다.

29. $a_1 = 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 집합

$$A = \{n \mid n = 2^k, k \text{는 음이 아닌 정수}\}$$

와 상수 d 에 대하여 다음을 만족시킨다.

(가) $n \in A$ 이면 $a_{2n} = 2a_n$ 이다.

(나) $n \notin A$ 이면 $a_{n+1} = a_n + d$ 이다.

$\sum_{k=1}^{32} a_k = 218$ 일 때, a_{60} 의 값을 구하여라. [4점]

30. 이차함수 $P(x)$ 와 실수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = P(x)e^{ax}$$

와 함수 $g(x)$ 는 $x > -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$(x^2 - 1)g(x) = f(x)$$

일 때, 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$

(나) 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극댓값 $\frac{1}{e}$ 을 갖는다.

$60f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라. [4점]

[나승민/한성은 모의고사]
6월(가형) 연습(1/2) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	㉔	02	㉕	03	㉔	04	㉔	05	㉑
06	㉑	07	㉑	08	㉓	09	㉔	10	㉒
11	㉓	12	㉔	13	㉑	14	㉒	15	㉓
16	㉓	17	㉕	18	㉓	19	㉒	20	㉕
21	㉒	22	24	23	14	24	2	25	315
26	340	27	16	28	205	29	52	30	45

COMMENT 16

사인법칙에서 $a = 12$ 이다. 삼각형의 넓이에서 $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times (12 + b + c) = \frac{1}{2} bc \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고,

코사인법칙에서 $144 = b^2 + c^2 - bc$ 이다. 연립하여 풀면 $b + c = 18$ 이다.

COMMENT 17

기역 : 준 식에 $n = 1$ 을 대입하면, $a_1^3 = 2a_1^2$ 이고 $a_n > 0$ 이므로 $a_1 = 2$ 이다.

니은 : 준 식의 n 자리에 $n+1$ 을 대입하면 $\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 = 2 \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right)^2$ 이다.

여기서 준 식을 빼면, $a_{n+1}^3 = 2 \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \right\} = 2a_{n+1} \left(a_{n+1} + 2 \sum_{k=1}^n a_k \right)$ 이다.

디귤 : 니은의 식과 니은의 식의 n 자리에 $n-1$ 을 대입한 것을 빼면 등차수열 된다.

COMMENT 19

$$a_n = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \dots + ((2n)^2 - (2n-1)^2)$$

$$= 3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^n (4k - 1) = 2n^2 + n$$

$$b_n = 4n^2 - a_n = 2n^2 - n$$

COMMENT 20

(나)의 식에서 $\sum_{k=1}^{2m} a_k = \frac{a_1 + a_{2m}}{2} \times 2m = 238$ 이고,

(나)의 식에서 (가)의 식을 빼면 $\sum_{k=m+1}^{2m} a_k = \frac{a_{m+1} + a_{2m}}{2} \times m = 168$ 이다.

등차수열의 간격을 살펴보면 $\frac{168}{m} - \frac{119}{m} = \frac{m}{2} \times d$ 이므로 $98 = m^2 d$ 이다.

m 과 d 가 정수이다. 가능한 조합은 $m = 7, d = 2$ 뿐이다.

COMMENT 21

$\frac{1-g(t)}{1+g(t)} = \tan t$ 이고 $\frac{h(t)-1}{h(t)+1} = \tan t$ 이다.

각각의 식에 $t = a$ 를 대입하면 $g(a) = \frac{1}{3}, h(a) = 3$ 이다.

각각의 식을 미분하고 $t = a$ 를 대입하면 $g'(a) = -\frac{10}{9}, h'(a) = 10$ 이다.

COMMENT 27

조건 ' $b_5 \leq 0$ 이고 $b_6 > 0$ ' 또는 ' $b_9 < 0$ 이고 $b_{10} \geq 0$ '를 만족시켜야 한다.

풀면 $\frac{2}{3} \leq d < \frac{3}{4}$ 또는 $\frac{6}{5} < d \leq \frac{3}{2}$ 이다.

COMMENT 28

$d+e$ 는 12의 약수이다.

$$\text{Case1) } a+b+c=10, d+e=2 \Rightarrow {}_3H_7 \times {}_2H_0 = 36$$

$$\text{Case2) } a+b+c=9, d+e=3 \Rightarrow {}_3H_6 \times {}_2H_1 = 56$$

$$\text{Case3) } a+b+c=8, d+e=4 \Rightarrow {}_3H_5 \times {}_2H_2 = 63$$

$$\text{Case4) } a+b+c=6, d+e=6 \Rightarrow {}_3H_3 \times {}_2H_4 = 50$$

COMMENT 29

(가)에 의해 $a_1=1, a_2=2, a_4=4, a_8=8, a_{16}=16, a_{32}=32$ 이다.

(나)에 의해 $a_3=4-d,$

$$a_7=8-d, a_6=8-2d, a_5=8-3d,$$

$$a_{15}=16-d, a_{14}=16-2d, \dots, a_9=16-7d,$$

$$a_{31}=32-d, a_{30}=32-2d, \dots, a_{17}=32-15d$$

이다. $\sum_{k=1}^{32} a_k$ 는, 줌 노가다인데,

$$\{1+2+4+2+8+4+16+8+32+16\} - \{1+(1+2+3)+(1+2+\dots+7)+(1+2+\dots+15)\}d$$

이므로 $683-155d$ 이다. $d=3$ 이고 $a_{64}=64, a_{60}=64-4d=52$ 이다.

COMMENT 30

$x > -1, x \neq 1$ 일 때, $g(x) = \frac{f(x)}{(x+1)(x-1)}$ 이다.

(가)에서 $f(x) = k(x-1)^2 e^{ax}$ 이다.

$g(x) = \frac{k(x-1)e^{ax}}{x+1}$ 이다. $g(2) = \frac{1}{e}, g'(2) = 0$ 을 풀면 $k = 3e^{\frac{1}{3}}, a = -\frac{2}{3}$ 이다.

※ $g(x)$ 를 두 점 $(-1, 0), (x, k(x-1)e^{ax})$ 사이의 평균변화율로 만들다 망한 문항이다.