[권구승/한성은 모의고사]

6월 모의고사(나형) 연습 (1/2)

권구승 (서울대)

이강학원(대치, 분당), 이투스앤써.

지금은 4월 9일 밤 11시 56분. 문득 6월 18일 바깥 세상의 풍경이 궁금하군요.
무릇 영웅은 난세에 이름을 떨치는 법. 열심히 공부합시다.

한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

코로나19발 범위 변경을 반영하였습니다.
코로나 시국에 하기 좋은 것 : 공부

hansungeun.com
  - 저자소개, 학습자료, 교재판매

수학 영역(나형)

5지선다형

1. 16×2^{-3}의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$의 값은? [2점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

3. 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 최댓값은? [2점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

4. $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x의 계수는? [3점]

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

5. 두 사건 A, B에 대하여 A와 B^c은 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^c은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

6. $\int_0^1 (2x+a)dx=4$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. 어느 반에서 후보로 추천된 A, B, C, D 네 학생 중에서 반장과 부반장을 각각 한 명씩 임의로 뽑으려고 한다. A 또는 B가 반장으로 뽑혔을 때, C가 부반장으로 뽑힐 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

8. 부등식 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^5 + 6 \le 0$를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

9. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + a$의 극댓값이 3일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

10. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x > 1) \\ 2x + 10 & (x \le 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

11. 어느 스포츠용품점에서는 세 종류의 유니폼 A, B, C를 진열대에 전시하려고 한다. A유니폼 2벌, B유니폼 3벌, C유니폼 4벌 총 9벌의 유니폼을 진열대에 일렬로 배열할 때, A유니폼끼리는 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 유니폼은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 965 ② 970 ③ 975 ④ 980 ⑤ 985

12. 곡선 $y=x^3-ax+b$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_9의 값은? [3점]

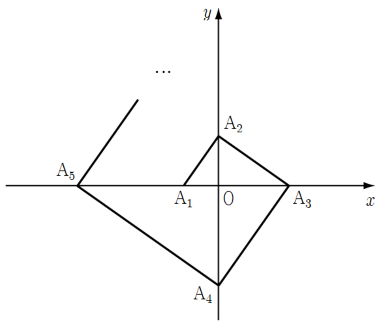
(가) $a_5 + a_9 = 0$
(나) $|a_4| + |a_8| = 12$

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

14. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n은 다음을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{A}_1(-1,\ 0)$, $\mathrm{A}_2(0,\ \sqrt{2})$이다.
(나) 점 A_n은 n이 홀수일 때는 x축 위에, n이 짝수일 때는 y축 위에 존재한다.
(다) 모든 자연수 n에 대하여 두 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$과 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$은 서로 수직이다.

점 A_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{40} a_k$의 값은? [4점]



① $2^{10}-1$ ② $4^{10}-1$ ③ $\dfrac{2^{10}-1}{3}$
④ $\dfrac{4^{10}-1}{3}$ ⑤ $\dfrac{4^{20}-1}{3}$

15. $0<x<\pi$에서 방정식 $2\cos^2 x+a\sin x-\frac{9}{4}=0$가 네 실근을 가지는 a값의 범위는? [4점]

① $0<a$ ② $\sqrt{2}<a$ ③ $0<a<\frac{9}{4}$

④ $\sqrt{2}<a<\frac{9}{4}$ ⑤ $a<\frac{9}{4}$

16. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 사차함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=0$이고 $g(0)=1$이다. (나) $\lim_{x\to n}\frac{g(x)}{(x-1)f(x)}=(n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3)$

$f(3)$의 값은? [4점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

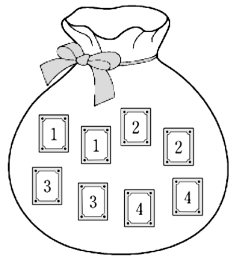
17. 다음은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$과 함수 $f: X \to X$에 대하여 합성함수 $f \circ f$의 치역의 원소가 2인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

> 함수 f와 함수 $f \circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자.
>
> $n(A)=1$이면 $n(B)=1$이고, $n(A)=4$이면 함수 f는 일대일 대응이고, 함수 $f \circ f$도 일대일 대응이므로 $n(B)=4$이다. 그러므로 $n(A)$는 2 또는 3이다.
>
> (i) $n(A)=2$인 경우
> $A=\{a, b\}$라 하자. A를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$다. $n(A)=n(B)$이고 $B \subset A$이므로 $A=B$다. $f(a)$, $f(b)$를 정하는 경우의 수는 2다. a, b가 아닌 X의 나머지 두 원소는 a와 b 중 어느 곳에 대응되어도 좋다. 따라서 $n(A)=2$인 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (ii) $n(A)=3$인 경우
> $A=\{a, b, c\}$라 하자. A를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3$이고, 이때 B를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$이다. $B=\{a, b\}$라 하자. 여기서
> $\{f(a), f(b)\}=\{a, b\}$
> 인 경우와 그렇지 않은 경우로 나눌 수 있다.
>
> (ii-1) $n(A)=3$이고 $\{f(a), f(b)\}=\{a, b\}$인 경우
> $f(a)$, $f(b)$를 정하는 경우의 수는 2이고, $f(c)$를 대응시키는 경우의 수는 2이다. X의 나머지 원소는 c에 대응된다. 따라서 $n(A)=3$이고 $\{f(a), f(b)\}=\{a, b\}$인 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
>
> (ii-2) $n(A)=3$이고 $\{f(a), f(b)\} \neq \{a, b\}$인 경우
> 이 경우에는 $f(a)=f(b)$이다. $f(a)=f(b)$와 $f(c)$는 a와 b에 하나씩 대응되고, X의 나머지 원소는 c에 대응된다. 따라서 $n(A)=3$이고 $\{f(a), f(b)\} \neq \{a, b\}$인 경우의 수는 $\boxed{(다)}$이다.
>
> 따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{(가)}+\boxed{(나)}+\boxed{(다)}$인 120이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p-q+2r$의 값은? [4점]

① 48 ② 72 ③ 96
④ 120 ⑤ 144

18. 그림과 같이 주머니에는 1부터 4까지의 자연수가 적힌 카드가 각각 2장씩 들어 있고, 두 사람 A, B가 각자 임의로 두 장의 카드를 꺼내어 가진다. A가 가진 카드에 적힌 수의 합이 B가 가진 카드에 적힌 수의 합보다 작을 확률은? (단, 한 번 꺼낸 카드는 다시 주머니에 넣지 않는다.) [4점]



① $\frac{27}{70}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{29}{70}$
④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{31}{70}$

19. 다항함수 $f(x)$가

$$\int_{1}^{x} tf'(t)dt = 2x^3 + 3x^2 + ax + \int_{0}^{1} f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

20. 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n + a_{n+1} = 2n+3$이다.
(나) $\sum_{k=1}^{11} a_k = 79$

$a_m = 20$인 자연수 m의 값은? [4점]

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

21. 함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x \le 2) \\ 1 & (x > 2)\end{cases}$와 실수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x (t^2-2t)f(t)\,dt$$

라고 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.
ㄴ. 방정식 $g(x)=g(0)$는 하나의 근을 가진다.
ㄷ. $a=-1$이면 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 1이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 방정식 $\log_2(x+6)=4$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하여라. [3점]

23. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+3$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하여라. [3점]

24. 첫째항이 5인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=2$$

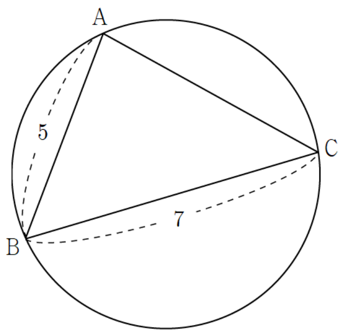
일 때, a_7의 값을 구하여라. [3점]

25. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{(a-3)}(x^2+2ax+7a)$가 정의되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하여라. [3점]

26. 넓이가 $\frac{25}{2}\pi$인 원에 내접하는 삼각형 ABC는

$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=7$

을 만족시킨다. $\overline{\mathrm{AC}}=a$일 때, a^2의 값을 구하여라. $\left(\text{단, } \angle\mathrm{BAC}<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



27. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=6$
(나) $(a+b)(c+d)$는 홀수가 아니다.

28. $f(x)=2\sin x+|\sin x|$에 대하여 $0 \le x \le 6\pi$에서 방정식

$$f(x)=\cos x$$

의 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$$

이다. $m+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\tan\alpha_k}$의 값을 구하여라. [4점]

29. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $k^2+1 \le n \le k^2+2k$일 때, $a_{n+1}=a_n+2^k$이다.
(나) $\sum_{n=1}^{k^2} a_n=(2k-3)2^k+3$

a_{45}의 값을 구하여라. [4점]

30. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$이고 $x=0$에서 최솟값 0을 갖는 사차함수 $f(x)$와 양수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2k,\ f(2k))$에서의 접선의 방정식은 $y=24(x-k)$이다.
(나) $f(k) \ge 16$

$f(2k)$의 최솟값을 구하여라. [4점]

[권구승/한성은 모의고사]

6월(나형) 연습(1/2) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	③	03	①	04	⑤	05	②
06	③	07	②	08	⑤	09	③	10	①
11	④	12	②	13	③	14	④	15	④
16	④	17	①	18	③	19	⑤	20	①
21	⑤	22	10	23	9	24	20	25	11
26	32	27	150	28	18	29	192	30	48

COMMENT 16

$g(x)=\frac{1}{2}(x-1)^3(x-2)$

COMMENT 17

$p=48$, $q=48$, $r=24$

COMMENT 18

그냥 세면 개 많다. $\frac{1-\mathrm{P}(\text{합이 같음})}{2}$으로 계산하자.

합이 4로 서로 같은 경우의 수는 4, 합이 5로 서로 같은 경우의 수는 12, 합이 6으로 서로 같은 경우의 수는 40, 합이 7로 서로 같은 경우의 수는 12, 합이 8로 서로 같은 경우의 수는 4이다.

COMMENT 19

준 식 $\int_1^x tf'(t)dt=2x^3+3x^2+ax+\int_0^1 f(t)dt$를 보면 일단 $x=1$ 대입이다. $0=5+a+\int_0^1 f(t)dt$를 얻었다.

양 변을 미분하면 $xf'(x)=6x^2+6x+a$이다. $x=0$을 대입하면 $a=0$이군. x로 나누면 $f'(x)=6x+6$이므로 $f(x)=3x^2+6x+c$이다.

상수 c는 위의 식 $\int_0^1 f(t)dt=-5$에서 얻을 수 있다. $\int_0^1(3t^2+6t+c)dt=-5$에서 $c=-9$다.

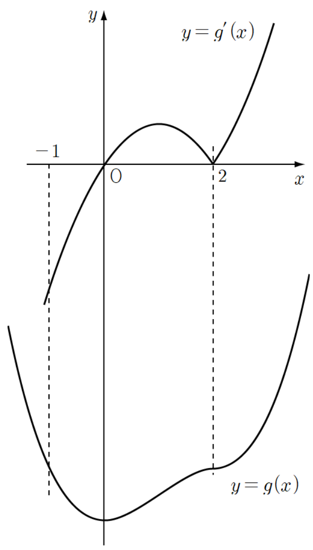
COMMENT 20

$\sum_{k=1}^{11} a_k=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{10}+a_{11})=a_1+7+11+15+19+23$이므로 $a_1=4$이다.

식 $a_n+a_{n+1}=2n+3$를 째려보면 수열 $\{a_n\}$는 4, 1, 6, 3, 8, 5, 10, 7, $\cdots$로 간다.

COMMENT 21

$g(a)=0$이고 $g'(x)=(x^2-2x)f(x)$이다.



COMMENT 26

$\overline{AC}=b$, $\angle ABC=\theta$라 하자. 외접원의 반지름은 $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$이므로

사인법칙에 의해 $\dfrac{b}{\sin\theta}=5\sqrt{2}$, 코사인법칙에 의해 $b^2=74-70\cos\theta$이다.

연립하면 $50\sin^2\theta=74-70\cos\theta$이고 풀면 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ 또는 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$이다.

이 중 $\angle BAC$가 예각이 되는 것은 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$인 경우이다.

COMMENT 27

${}_5H_6=210$에서 여사건을 빼자. 여사건은 모두 60가지이다. 아래와 같다.

Case1) $a+b=1$이고 $c+d=1$: 4가지
Case2) $a+b=1$이고 $c+d=3$: 8가지
Case3) $a+b=1$이고 $c+d=5$: 12가지
Case4) $a+b=3$이고 $c+d=1$: 8가지
Case5) $a+b=3$이고 $c+d=3$: 16가지
Case6) $a+b=5$이고 $c+d=1$: 12가지

COMMENT 29

n^2까지 끊어야 하기에 1개, 3개, 5개, 7개, ⋯ 씩 등차수열을 이룬다.

a, $b-2$, b, $b+2$, $c-8$, $c-4$, c, $c+4$, $c+8$, $d-24$, $d-16$, $d-8$, d, $d+8$, $d+16$, $d+24$, ⋯

(나)의 식에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{k^2}a_n-\sum_{n=1}^{(k-1)^2}a_n$을 조사해보면, 요 항 들은 등차수열을 이루기 때문에,

$a=1$, $b=2$, $c=4$, $d=8$, ⋯

인 것을 확인할 수 있다. 군수열 삘 문항이다. 수능도 이렇게 막 내더라구.

COMMENT 30

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x^2+ax+b)$이다. $f'(2k)=24$, $f(2k)=24k$를 연립하면

$a=-4k$, $\quad b=4k^2+\dfrac{24}{k}$

를 얻는다. 조건 $f(k)\geq16$는 $k\geq2$가 된다.