

[권구승/한성은 모의고사]

| 4월 모의고사(나형) 연습 |

| 권구승 (서울대)

이강학원(대치, 분당), 이투스앤써.

거지같은 범위에도 잘 뽑아낸 모의고사. 짹짹!
출처 표시 없이 유튜브나 자료실에 올리는 건 좀...

| 한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

가형 출제범위가 거지같아서 고통 받고 있습니다.
주변에 배포하셔서 제 은퇴를 도와주세요.

hansungeun.com

- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(나형)

1

5지선다형

1. $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{(-2)^4}$ 의 값은? [2점]

- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

2. 첫째항이 2이고 공차가 -3인 등차수열에 대하여 a_4 의 값은? [2점]

- ① -3 ② -4 ③ -5
④ -6 ⑤ -7

3. 함수 $f(x) = x^2 + x$ 에서 x 의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}$ 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

2

수학 영역(나형)

5. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 4x^3 - 1$ 이고,
 $f(0) = 1$ 일 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. $\sin\theta = \frac{4}{5}$ 이고 $\cos\theta + \sin\theta \times \tan\theta < 0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{4}{3}$ ② 1 ③ $-\frac{2}{3}$
④ -1 ⑤ $-\frac{4}{3}$

6. 다항식 $(x+a)^7$ 의 전개식에서 x^5 의 계수가 84일 때,
양수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8. $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 2$ 인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 1인 원에 내접할 때, $\sin A + \sin B + \sin C$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

9. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 정의역이 $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ 인 함수 $f(x) = a^x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 15일 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

10. x 에 대한 로그부등식

$$\log_3(x-1) \leq \log_3\left(\frac{1}{2}x+k\right)$$

를 만족시키는 모든 정수 x 의 개수가 3일 때, 자연수 k 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

11. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = 2x^3 + ax^2$$

을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

12. 함수 $f(x) = \frac{x^3 + 6x - 1}{ax^2 + 2ax + 3}$ 이 실수 전체의 집합에서

연속이 되도록 하는 모든 정수 a 의 개수는? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

13. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

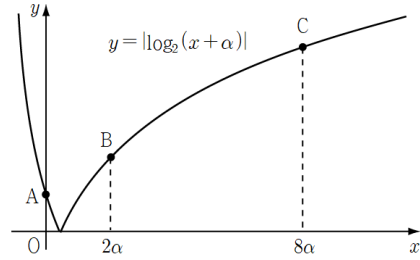
을 만족시킨다. $a_5 = 24$ 일 때, a_4 의 최댓값은? [3점]

- ① 13 ② 14 ③ 15
 ④ 16 ⑤ 17

14. $0 < \alpha < 1$ 인 실수 α 에 대하여 함수

$$f(x) = |\log_2(x + \alpha)|$$

일 때, 세 점 $A(0, f(0))$, $B(2\alpha, f(2\alpha))$, $C(8\alpha, f(8\alpha))$ 가 $3\overline{AB} = \overline{BC}$ 를 만족시킨다. α 의 값은? [4점]



- ① $2^{-\frac{1}{3}}$ ② $2^{-\frac{1}{2}}$ ③ $3^{-\frac{1}{4}}$
 ④ $3^{-\frac{1}{3}}$ ⑤ $3^{-\frac{1}{2}}$

6

수학 영역(나형)

15. 다음은 $\sum_{k=1}^{10} (k \times {}_{10}C_k)^2$ 의 값을 구하는 과정이다.

두 자연수 $n, k(1 \leq k \leq n)$ 에 대하여

$${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \times {}_{n-1} C_{k-1}$$

이므로 $k \times {}_{10} C_k = 10 \times \boxed{\text{(가)}}$ 이다. ... (*)

한편, $0 \leq k \leq n$ 인 정수 k 에 대하여 $(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^k 과 x^{n-k} 의 계수는 모두 ${}_n C_k$ 이므로 x 에 대한 항등식

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$$

의 좌변과 우변에서 x^n 의 계수를 비교하면

$$\sum_{k=0}^n ({}_n C_k)^2 = \boxed{\text{(나)}} \dots (**)$$

이다.

구하는 값 $\sum_{k=1}^{10} (k \times {}_{10} C_k)^2$ 에 (*)과 (**)을 차례로 적용하면,

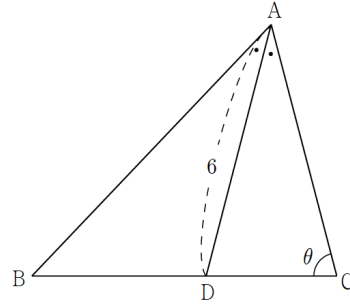
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (k \times {}_{10} C_k)^2 &= 100 \sum_{k=1}^{10} (\boxed{\text{(가)}})^2 \\ &= 100 \sum_{k=0}^9 ({}_9 C_k)^2 \\ &= 100 \times {}_{18} C_9 \end{aligned}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$ 이라 할 때, $g(5) - f(5)$ 의 값은? [4점]

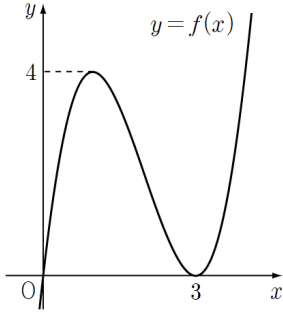
- ① 126 ② 128 ③ 130
 ④ 132 ⑤ 134

16. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 4:3으로 내분하는 점 D는 $\angle BAD = \angle CAD$ 를 만족시킨다. $\angle ACD = \theta$ 라 하면 $4\cos\theta = 1$ 이고, $AD = 6$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]



- ① $\frac{31}{4}$ ② 8 ③ $\frac{33}{4}$
 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

17. $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 0)$ 에서의 접선이 x 축이다. 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]



- ① $\frac{27}{4}$ ② 7 ③ $\frac{29}{4}$
 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{31}{4}$

18. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c+d$ 는 2의 배수이다.
 (나) $a \leq b \leq c \leq d \leq 9$

- ① 225 ② 240 ③ 255
 ④ 270 ⑤ 285

19. 함수 $y=|x-2|x^2$ 의 그래프와 직선 $y=tx$ 의 교점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 $t=a$ 와 $t=b$ 에서 불연속일 때, $b \times \lim_{x \rightarrow a^-} g(a)$ 의 값은? (단, $a < b$) [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 4
 ④ 6 ⑤ 8

20. 수열 $\{a_n\}$ 은

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 110, \quad \sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{k} = 80$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의

합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{S_k}{k(k+1)}$ 의 값은? [4점]

- ① 70 ② 75 ③ 80
 ④ 85 ⑤ 90

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$$x(x+1)g(x) = f(x)$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$
 (나) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f'(x)} = -\frac{1}{2}$

- ① 12 ② 18 ③ 24
 ④ 30 ⑤ 36

단답형

22. $\log_2 \sqrt{3} \times \log_3 16$ 의 값을 구하여라. [3점]

23. 곡선 $y = -x^2 + 10x - 16$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라. [3점]

24. 남학생 2명과 여학생 3명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 남학생 2명이 서로 이웃하게 앉는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

25. 수직선 위를 움직이는 두 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 x 가 $x = t^4 - 4t + 15$ 이다. 점 P가 운동방향을 바꾸는 시각에서의 점 P의 위치를 구하여라. [3점]

26. 1보다 큰 두 실수 a, k 에 대하여 곡선 $y = a^x$ 와 직선 $y = k$ 및 y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1 , 곡선 $y = \log_a(x-b)$ 와 직선 $x = 30$ 및 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 = S_2$ 일 때, $b+k$ 의 값을 구하여라. (단, $b < 30$ 이다.) [4점]

27. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3 + a_5 = 0$

(나) $\sum_{k=1}^m a_{2k-1} = \frac{4}{5} \sum_{k=1}^m a_{2k}$

m 의 값을 구하여라. [4점]

28. 같은 종류의 초콜릿 네 개와 서로 다른 사탕 세 개를 세 사람 A, B, C에게 모두 나누어 주려 할 때, 아무것도 받지 못하는 사람이 없도록 하는 방법의 수를 구하여라. [4점]

29. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라. [4점]

- (가) f 는 일대일 대응이다.
 (나) $2f(n) = f(2n)$ 을 만족시키는 자연수 n 이 존재한다.

30. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 와 상수 a 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = f(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(a) & (x \leq a) \\ f(x) & (a < x \leq a+4) \\ f(a) & (a+4 < x) \end{cases}$$

라 할 때, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이며 오직 $x = a$ 에서만 미분가능하지 않다. 방정식 $|g(x)| = 6$ 은 열린구간 $(a, a+4)$ 에서 하나의 실근을 갖고, 실수 전체의 집합에서 무수히 많은 실근을 가질 때, $f(a-2)$ 의 값을 구하여라. [4점]

[4월 모의고사 연습]
나형 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	⑤	03	③	04	④	05	①
06	②	07	⑤	08	④	09	②	10	①
11	④	12	①	13	③	14	④	15	①
16	②	17	①	18	③	19	②	20	①
21	⑤	22	2	23	36	24	12	25	12
26	30	27	8	28	288	29	195	30	198

COMMENT 14

답을 찌러보면 세 점은 직선 위에 존재하고, $f(8\alpha) - f(0) = 4\{f(2\alpha) - f(0)\}$ 이다.

$\log_2 9\alpha - (-\log_2 \alpha) = 4\{\log_2 3\alpha - (-\log_2 \alpha)\}$ 에서 $\alpha = 3^{-\frac{1}{3}}$ 이다.

COMMENT 15

$$f(k) = {}_9C_{k-1}, \quad g(n) = {}_{2n}C_n$$

COMMENT 16

$\overline{AB} = 4k$, $\overline{AC} = 3k$, $\overline{BD} = 4l$, $\overline{CD} = 3l$ 이라 하자. $\cos\theta = \frac{1}{4}$ 에서

$$\frac{1}{4} = \frac{9k^2 + 49l^2 - 16k^2}{2 \times 3k \times 7l} = \frac{9k^2 + 49l^2 - 36k^2}{2 \times 3k \times 3l}$$

이다. 첫 번째 식을 풀어보면 놀랍게도 $k=2l$ 을 얻을 수 있다. 뒤의 식을 풀면 $l=1$, $k=2$ 이다.

COMMENT 18

Case1) 모두 짝수 : ${}_4H_4 = 35$

Case2) 두 짝수와 두 홀수 : ${}_4H_2 \times {}_5H_2 = 150$

※ 선택하면 자동으로 a, b, c, d 에 대응된다.

Case3) 모두 홀수 : ${}_5H_4 = 70$

COMMENT 20

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{S_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{10} \left\{ \frac{S_k}{k} - \frac{S_k}{k+1} \right\} = S_1 + \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k} (S_k - S_{k-1}) - \frac{S_{10}}{11} = \sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{k} - \frac{S_{10}}{11}$$

COMMENT 21

$x \neq -1$, $x \neq 0$ 일 때 $g(x) = \frac{f(x)}{x(x+1)}$ 이다.

(가)에서 $f(x)$ 는 x^2 을 인수로 가진다.

(나)는 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x(x+1)f'(x)} = -\frac{1}{2}$ 이다.

$f(-1) = 0$ 이므로 $f(x) = (x+1)h(x)$ 라 두자.

(나)의 식에 다시 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x)}{x\{h(x) + (x+1)h'(x)\}} = -\frac{1}{2}$$

이다. $h(-1) \neq 0$ 이면 극한값이 -1 이 되므로 $h(-1) = 0$ 이다.

따라서 $f(x) = x^2(x+1)^2$ 이다.

이거 이과 애들한테 물어보면 좋아할꺼야.

COMMENT 26

대충 역함수 그래프의 대칭성을 살펴보면 $k=30-b$ 라는 것을 알 수 있다.

COMMENT 27

$a_4 = 0$ 이고 $\{a_n\}$ 은

$$-3d, -2d, -d, 0, d, 2d, 3d, \dots$$

이다. $\sum_{k=1}^m a_{2k-1} = \frac{a_1 + a_{2m-1}}{2}m$, $\sum_{k=1}^m a_{2k} = \frac{a_2 + a_{2m}}{2}m$ 이므로 $a_m = \frac{4}{5}a_{m+1}$ 이다.

$$(m-4)d = \frac{4}{5}(m-3)d \text{에서 } m=8 \text{이다.}$$

COMMENT 28

서로 다른 사탕 세 개를

- i) 한 명이 모두 받을 때 : $3 \times {}_3H_2 = 18$
- ii) 두 명이 하나 이상 받을 때 : ${}_3C_2 \times 3 \times 2 \times {}_3H_3 = 180$
- iii) 세 명이 각각 하나씩 받을 때 : $3! \times {}_3H_4 = 90$

COMMENT 29

$n=1, n=2, n=3$ 인 경우들의 집합을 각각 A, B, C 라 하자.

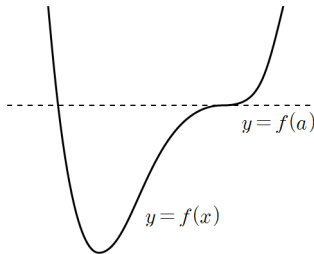
$$n(A) = n(B) = n(C) = 3 \times 4!, \quad n(A \cap B) = 3!$$

$$n(B \cap C) = n(C \cap A) = 8, \quad n(A \cap B \cap C) = 1$$

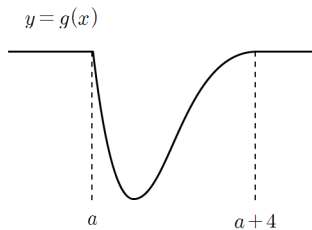
이므로 구하는 경우의 수는 $72 + 72 + 72 - 6 - 8 - 8 + 1$ 이다.

COMMENT 30

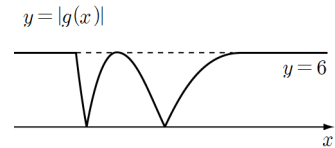
함수 $g(x)$ 가 $x=a+4$ 에서 연속이므로 $f(a+4) = f(a)$ 이고,
 함수 $g(x)$ 가 $x=a+4$ 에서 미분가능하므로 $f'(a+4) = 0$ 이다.
 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프는 아래의 [그림1], [그림2]와 같다.



[그림1] $y=f(x)$



[그림2] $y=g(x)$



[그림3] $y=f(x)$

나머지는 대충 알아서. $f(x) = \frac{4}{9}(x-a)(x-a-4)^3 + 6$ 이다.