[권구승/한성은 모의고사]

| 4월 모의고사(가형) 연습 |

권구승 (서울대)

이강학원(대치, 분당), 이투스앤써.

거지같은 범위에도 잘 뽑아낸 모의고사. 짝짝짝!
출처 표시 없이 유튜브나 자료실에 올리는 건 좀...

한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

가형 출제범위가 거지같아서 고통 받고 있습니다.
주변에 배포하셔서 제 은퇴를 도와주세요.

hansungeun.com
 – 저자소개, 학습자료, 교재판매

CCL

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{(-2)^4}$의 값은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

2. 첫째항이 2이고 공차가 -3인 등차수열에 대하여 a_4의 값은? [2점]

① -3 ② -4 ③ -5
④ -6 ⑤ -7

3. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$n(n+1)<3a_n<n(n+3)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n}{n^2+3n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-12)=10$일 때, $\lim_{n\to\infty}(2a_{n-1}+a_{2n})$의 값은? [3점]

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

5. 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하여 여섯 자리의 자연수를 만들 때, 숫자 2가 서로 이웃하지 않는 경우의 수는? [3점]

① 36 ② 42 ③ 48
④ 54 ⑤ 60

6. 다항식 $(x+a)^7$의 전개식에서 x^5의 계수가 84일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{7}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

7. $\sin\theta=\frac{4}{5}$이고 $\cos\theta+\sin\theta\times\tan\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② 1 ③ $-\frac{2}{3}$
④ -1 ⑤ $-\frac{4}{3}$

8. $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}=2$인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 1인 원에 내접할 때, $\sin A+\sin B+\sin C$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

9. $a>1$인 실수 a에 대하여 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 2\}$인 함수 $f(x)=a^x+2$의 최댓값과 최솟값의 차가 15일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = 1+\frac{1}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{98}(a_k - a_{k+1})$의 값은? [3점]

① $\frac{47}{100}$ ② $\frac{12}{25}$ ③ $\frac{49}{100}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{51}{100}$

11. x에 대한 로그부등식

$$\log_3(x-1) \le \log_3\left(\frac{1}{2}x+k\right)$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 3일 때, 자연수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2-2x-1}{2}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

13. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

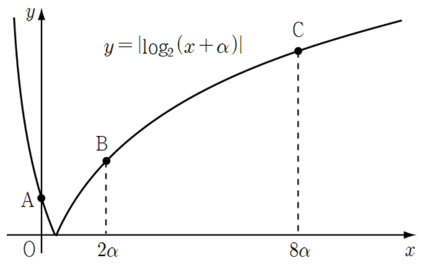
을 만족시킨다. $a_5=24$일 때, a_4의 최댓값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

14. $0<\alpha<1$인 실수 α에 대하여 함수

$$f(x)=|\log_2(x+\alpha)|$$

일 때, 세 점 $\mathrm{A}(0,\ f(0))$, $\mathrm{B}(2\alpha,\ f(2\alpha))$, $\mathrm{C}(8\alpha,\ f(8\alpha))$가 $3\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$를 만족시킨다. α의 값은? [4점]



① $2^{-\frac{1}{3}}$ ② $2^{-\frac{1}{2}}$ ③ $3^{-\frac{1}{4}}$ ④ $3^{-\frac{1}{3}}$ ⑤ $3^{-\frac{1}{2}}$

15. 다음은 $\sum_{k=1}^{10}(k\times{}_{10}\mathrm{C}_k)^2$의 값을 구하는 과정이다.

두 자연수 n, $k(1\le k\le n)$에 대하여

$${}_n\mathrm{C}_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n}{k}\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

이므로 $k\times{}_{10}\mathrm{C}_k=10\times\boxed{\text{(가)}}$이다. $\cdots$ $(*)$

한편, $0\le k\le n$인 정수 k에 대하여 $(1+x)^n$의 전개식에서 x^k과 x^{n-k}의 계수는 모두 ${}_n\mathrm{C}_k$이므로

x에 대한 항등식

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$$

의 좌변과 우변에서 x^n의 계수를 비교하면

$$\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2=\boxed{\text{(나)}}\ \cdots\ (**)$$

이다.

구하는 값 $\sum_{k=1}^{10}(k\times{}_{10}\mathrm{C}_k)^2$에 $(*)$과 $(**)$을 차례로 적용하면,

$$\sum_{k=1}^{10}(k\times{}_{10}\mathrm{C}_k)^2=100\sum_{k=1}^{10}(\boxed{\text{(가)}})^2$$

$$=100\sum_{k=0}^{9}({}_9\mathrm{C}_k)^2$$

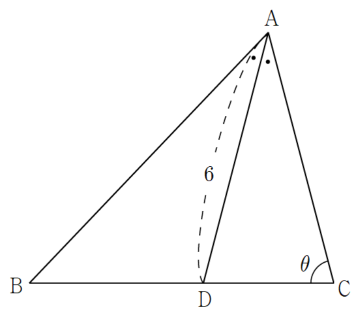
$$=100\times{}_{18}\mathrm{C}_9$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $g(5)-f(5)$의 값은? [4점]

① 126 ② 128 ③ 130
④ 132 ⑤ 134

16. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 4:3으로 내분하는 점 D는 $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$를 만족시킨다. $\angle\mathrm{ACD}=\theta$라 하면 $4\cos\theta=1$이고, $\overline{\mathrm{AD}}=6$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]



① $\frac{31}{4}$ ② 8 ③ $\frac{33}{4}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

17. 수열 $\{a_n\}$은

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 110, \qquad \sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{k} = 80$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{S_k}{k(k+1)}$의 값은? [4점]

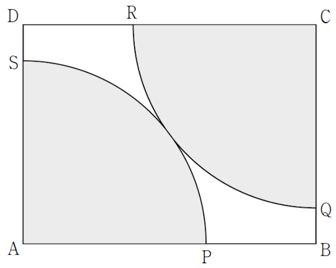
① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90

18. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

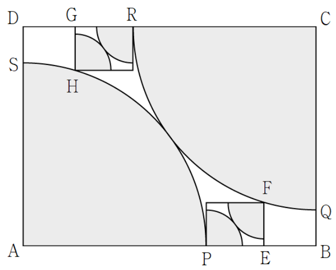
(가) $a+b+c+d$는 2의 배수이다.
(나) $a \le b \le c \le d \le 9$

① 225 ② 240 ③ 255 ④ 270 ⑤ 285

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$인 직사각형 ABCD가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 선분 AC의 길이의 절반인 원이 선분 AB, DA와 만나는 점을 각각 P, S, 중심이 C이고 반지름의 길이가 선분 AC의 길이의 절반인 원이 선분 BC, CD와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하고 두 부채꼴 APS, CQR에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 P, 선분 PB 위의 점 E, 호 QR 위의 점 F를 꼭짓점으로 하고 $\overline{PE}:\overline{EF}=4:3$인 직사각형과 점 R, 선분 RD 위의 점 G, 호 PS 위의 점 H를 꼭짓점으로 하고 $\overline{RG}:\overline{GH}=4:3$인 직사각형을 그린다. 두 직사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 각각 두 개의 부채꼴을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

① $\frac{25}{2}\pi$　② $\frac{625}{48}\pi$　③ $\frac{625}{46}\pi$
④ $\frac{625}{44}\pi$　⑤ $\frac{625}{42}\pi$

20. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=a_2=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{7}$　② $\frac{11}{14}$　③ $\frac{6}{7}$
④ $\frac{13}{14}$　⑤ 1

21. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이

$b_1 = 1$,
$b_{n+1} = b_n + (-1)^n a_n$ (n은 자연수)

일 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_{2n-1} + n$
(나) $\sum_{k=1}^{2n} b_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$|a_5| + |a_6|$의 값은? [4점]

① 2 ② 5 ③ 8
④ 11 ⑤ 14

단답형

22. $\log_2 \sqrt{3} \times \log_3 16$의 값을 구하여라. [3점]

23. 함수 $f(x) = a\sin x + 1$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$을 지날 때, 함수 $y = f(x)$의 최댓값을 구하여라. [3점]

24. 남학생 2명과 여학생 3명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 남학생 2명이 서로 이웃하게 앉는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

25. 중심이 O이고 반지름의 길이가 12인 원 위에 점 A가 있다. 반직선 OA를 시초선으로 했을 때, 두 각

$$-\frac{5}{3}\pi, \quad \frac{\pi}{6}$$

가 나타내는 동경이 이 원과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ를 포함하는 부채꼴 OPQ의 넓이가 $a\pi$일 때, a의 값을 구하여라. [3점]

26. 두 함수 $f(x)=\log_a x$, $g(x)=-\log_a x+b$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 제4사분면에서 만난다. $1 \le x \le 8$에서 함수 $g(x)$의 최솟값이 -1, 최댓값이 2일 때, a^b의 값은? (단, $a>0$, $a\ne1$이다.) [4점]

27. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 m은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3 + a_5 = 0$

(나) $\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} = \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{m} a_{2k}$

m의 값을 구하여라. [4점]

28. 같은 종류의 초콜릿 네 개와 서로 다른 사탕 세 개를 세 사람 A, B, C에게 모두 나누어 주려 할 때, 아무것도 받지 못하는 사람이 없도록 하는 방법의 수를 구하여라. [4점]

29. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$의 개수를 구하여라. [4점]

> (가) f는 일대일 대응이다.
> (나) $2f(n)=f(2n)$을 만족시키는 자연수 n이 존재한다.

30. 자연수 n에 대하여 n이 1이 될 때까지 다음 시행을 반복한다.

> [시행]
> i) 숫자가 홀수이면 1을 뺀다.
> ii) 숫자가 짝수이면 2로 나눈다.

이때 자연수 n이 1이 될 때까지 반복한 시행의 횟수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(3)=2$, $f(4)=2$이다.

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} f(k)=a_n$$

이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-2a_n}{2^n}$의 값을 구하여라. [4점]

[4월 모의고사 연습]

가형 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	⑤	03	②	04	③	05	⑤
06	④	07	⑤	08	④	09	②	10	③
11	①	12	⑤	13	③	14	④	15	①
16	②	17	①	18	③	19	③	20	①
21	②	22	2	23	5	24	12	25	12
26	2	27	8	28	288	29	195	30	3

COMMENT 14

닮음 째려보면 세 점은 직선 위에 존재하고, $f(8\alpha)-f(0)=4\{f(2\alpha)-f(0)\}$이다.

$\log_2 9\alpha-(-\log_2\alpha)=4\{\log_2 3\alpha-(-\log_2\alpha)\}$에서 $\alpha=3^{-\frac{1}{3}}$이다.

COMMENT 15

$f(k)={}_9\mathrm{C}_{k-1}$, $\quad g(n)={}_{2n}\mathrm{C}_n$

COMMENT 16

$\overline{\mathrm{AB}}=4k$, $\overline{\mathrm{AC}}=3k$, $\overline{\mathrm{BD}}=4l$, $\overline{\mathrm{CD}}=3l$이라 하자. $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$에서

$$\frac{1}{4}=\frac{9k^2+49l^2-16k^2}{2\times 3k\times 7l}=\frac{9k^2+9l^2-36}{2\times 3k\times 3l}$$

이다. 첫 번째 식을 풀어보면 놀랍게도 $k=2l$을 얻을 수 있다. 뒤의 식을 풀면 $l=1$, $k=2$이다.

COMMENT 17

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{S_k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{S_k}{k}-\frac{S_k}{k+1}\right\}=S_1+\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{k}(S_k-S_{k-1})-\frac{S_{10}}{11}=\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{k}-\frac{S_{10}}{11}$$

COMMENT 18

Case1) 모두 짝수 : ${}_4\mathrm{H}_4=35$

Case2) 두 짝수와 두 홀수 : ${}_4\mathrm{H}_2\times{}_5\mathrm{H}_2=150$

※ 선택하면 자동으로 a, b, c, d에 대응된다.

Case3) 모두 홀수 : ${}_5\mathrm{H}_4=70$

COMMENT 19

닮음비는 $5:1$이다. 첫째항은 $\dfrac{25}{2}\pi$, 공비는 $\dfrac{2}{25}$인 등비급수.

COMMENT 21

(나)에서 $b_{2n-1}+b_{2n}=n(n+1)$이고 점화식에서 $b_{2n-1}+b_{2n}=2b_1-2a_1+2a_2-2a_3+2a_4-\cdots+2a_{n-2}-a_{2n-1}$이다.

(가)를 적용하면 $b_{2n-1}+b_{2n}=2+2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}-a_{2n-1}=2+(n-1)n-a_{2n-1}$이다.

$a_{2n-1}=2-2n$이다. 이와 (가)를 이용하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항을 구할 수 있다.

$\{a_n\}$: $0,\ 1,\ -2,\ 0,\ -4,\ -1,\ -6,\ -2,\ -8,\ -3,\ -10,\ -4,\ \cdots$

COMMENT 26

두 곡선의 교점을 $(p,\ \log_a p)$라 하자. $2\log_a p = b$이고 $b<0$이다.

$g(x)$는 단조함수이므로 $1 \le x \le 8$에서 $g(x)$의 최댓값과 최솟값은 모두 $g(1)=b$ 또는 $g(8)=-\log_a 8+b$이다.

음수인 최솟값이 b이므로 $b=-1$, $-\log_a 8+b=2$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다.

COMMENT 27

$a_4=0$이고 $\{a_n\}$은

$-3d,\ -2d,\ -d,\ 0,\ d,\ 2d,\ 3d,\ \cdots$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} = \frac{a_1+a_{2m-1}}{2}m$, $\sum_{k=1}^{m} a_{2k} = \frac{a_2+a_{2m}}{2}m$이므로 $a_m=\frac{4}{5}a_{m+1}$이다.

$(m-4)d=\frac{4}{5}(m-3)d$에서 $m=8$이다.

COMMENT 28

서로 다른 사탕 세 개를

i) 한 명이 모두 받을 때 : $3\times{}_3\mathrm{H}_2=18$

ii) 두 명이 하나 이상 받을 때 : ${}_3\mathrm{C}_2\times3\times2\times{}_3\mathrm{H}_3=180$

iii) 세 명이 각각 하나씩 받을 때 : $3!\times{}_3\mathrm{H}_4=90$

COMMENT 29

$n=1$, $n=2$, $n=3$인 경우들의 집합을 각각 A, B, C라 하자.

$n(A)=n(B)=n(C)=3\times4!$, $\quad n(A\cap B)=3!$,

$n(B\cap C)=n(C\cap A)=8$, $\quad n(A\cap B\cap C)=1$

이므로 구하는 경우의 수는 $72+72+72-6-8-8+1$이다.

COMMENT 30

자연수 m에 대하여 $f(2m)=f(m)+1$이고 $f(2m+1)=f(m)+2$이다.

$a_{n+1}=\sum_{k=2^{n+1}+1}^{2^{n+2}} f(k)$에서 k가 홀수일 때와 짝수일 때로 나눠보자.

k가 짝수인 $f(k)$는 2^n개이고 $f(2m)=f(m)+1$이므로 합은 a_n+2^n이다.

k가 홀수인 $f(k)$는 2^n개이고 $f(2m+1)=f(m)+2$이므로 합은 $a_n+2^{n+1}-1$이다.

* a_{n+1}에 포함되는 $f(2^{n+1}+1)$은 a_n에 포함되는 것 중 짝이 없다.
반대로 a_n에 포함되는 $f(2^{n+1})$은 a_{n+1}에 포함되는 것 중 짝이 없는데,
$f(2^{n+1}+1)=1+f(2^{n+1})$이므로.. 야, 혼자 생각해.

따라서 $a_{n+1}=(a_n+2^n)+(a_n+2^{n+1}-1)$이다. $a_{n+1}-2a_n=3\times2^n-1$이다.