

# [한성은 모의고사]

| 3월 모의고사(나형) 연습 |

## | 한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

3월 대비가 하나 더 필요해서 만들었습니다 ㅜㅜ

이정환(이투스) 선생님이 검토를 도와주셨습니다.

[~의 값은?]과 높임법 총위가 맞는 것은 [구하시오.]가 아니라 [구하여라.]인 것 같아요. 뇌피셜입니다.

여러 국어선생님들에게 여쭙봤지만 전혀 도움이 되질 않았습니다. 국어가 그렇죠 뭐.

[hansungeun.com](http://hansungeun.com)

- 저자소개, 학습자료, 교재판매

## | CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.

- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

5지선다형

1.  $4^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 2                      ② 6                      ③ 9  
④ 12                     ⑤ 18

2.  $\sin \frac{3\pi}{2}$ 의 값은? [2점]

- ① -1                      ②  $-\frac{1}{2}$                       ③  $\frac{1}{4}$   
④  $\frac{1}{2}$                       ⑤ 1

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 의 값은? [2점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (t^2 + t + a) dt = 6$ 를 만족시키는 실수  $a$ 의

- 값은? [3점]  
① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

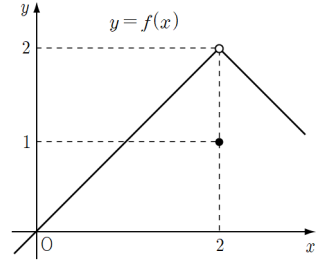
5. 함수  $f(x) = x^4 - 4x^3 + a$ 의 극솟값이  $-22$ 일 때, 상수  $a$ 의 값은? [3점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3
- ④ 4                      ⑤ 5

6. 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_2 - 2a_3 + a_8 = 20$ 일 때,  $a_{20} - a_{15}$ 의 값은? [3점]

- ① 25                      ② 27                      ③ 29
- ④ 31                      ⑤ 33

7. 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 4                      ② 6                      ③ 8
- ④ 10                      ⑤ 12

8. 도함수가  $f'(x) = 6(x^2 + x)$ 인 함수  $f(x)$ 의 극솟값이 2일 때, 극댓값은? [3점]

- ①  $\frac{5}{2}$                       ② 3                              ③  $\frac{7}{2}$   
 ④ 4                              ⑤  $\frac{9}{2}$

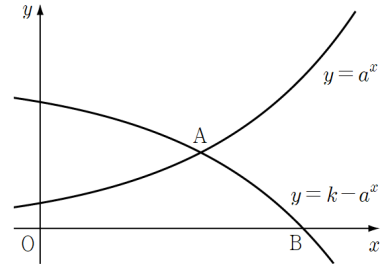
9. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간  $t(t > 0)$ 에서의 위치  $x_1, x_2$ 가

$$x_1 = t^2 - 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}t^2 + 4t + a$$

이다. 두 점 P, Q가 서로 만나며 속도가 같아지는 시각이 존재할 때, 상수  $a$ 의 값은? [3점]

- ①  $-\frac{8}{3}$                       ② -3                              ③  $-\frac{10}{3}$   
 ④  $-\frac{11}{3}$                       ⑤ -4

10. 두 함수  $f(x) = a^x, g(x) = k - f(x)$ 에 대하여, 두 곡선  $y = f(x)$ 와  $y = g(x)$ 의 교점을 A, 곡선  $y = g(x)$ 와  $x$ 축의 교점을 B라 하자.  $g(4) = 4$ 이고 점 A의  $x$ 좌표와 점 B의  $x$ 좌표의 차이가 4일 때,  $\overline{AB}$ 의 값은? (단,  $a$ 와  $k$ 는 양의 실수이다.) [3점]



- ①  $\frac{9}{2}$                       ② 5                              ③  $\frac{11}{2}$   
 ④ 6                              ⑤  $\frac{13}{2}$

11. 다항함수  $f(x)$ 가

$$\int_1^x (t-2)f(t)dt = x^3 + ax^2 + bx - 1$$

를 만족시킬 때,  $f(2)$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

[3점]

- ① 3                      ② 4                      ③ 5  
 ④ 6                      ⑤ 7

12. 함수  $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & (x \leq 1) \\ x^3 & (x > 1) \end{cases}$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$ 의 값은? [3점]

- ① -9                      ② -5                      ③ -1  
 ④ 1                        ⑤ 5

13.  $\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$ 인 실수  $\theta$ 에 대하여

$$\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 4$$

일 때,  $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ 의 값은? [4점]

- ① 1                      ②  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       ③  $\frac{1}{2}$   
 ④  $-\frac{1}{2}$                       ⑤  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. 이차함수  $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

(가)  $f(-1) + f(1) = 4$

(나)  $\int_{-1}^1 f(x)dx = 8$

$f(0)$ 의 값은? [4점]

- ① 4                      ② 5                      ③ 6  
 ④ 7                      ⑤ 8

# 6

# 수학 영역(나형)

15. 다음은 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여  $x \geq 0$ 일 때,

$$x^n - 1 \geq n(x-1) \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

i)  $n=2$ 일 때,  
 $(x-1)^2 \geq 0$   
 이므로 (\*)이 성립한다.

ii)  $n=k(k \geq 2)$ 일 때 (\*)이 성립한다고 가정하면,  
 $x^k - 1 \geq k(x-1)$   
 이다.  $n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.  

$$\begin{aligned} & x^{k+1} - 1 - (k+1)(x-1) \\ &= x(x^k - 1) + \boxed{\text{(가)}} - (k+1)(x-1) \\ &\geq x\{k(x-1)\} + x - 1 - (k+1)(x-1) \\ &= k \times \boxed{\text{(나)}} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$
  
 따라서  $n=k+1$ 일 때도 (\*)이 성립한다.

i), ii)에 의해 2 이상의 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $x \geq 0$ 일 때,  
 $x^n - 1 \geq n(x-1)$   
 이 성립한다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각  $f(x)$ ,  $g(x)$ 이라 할 때,  $f(5)+g(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 5                      ② 7                      ③ 9  
 ④ 11                     ⑤ 13

16.  $x$ 에 대한 방정식  $(4^x + 4^{-x}) - a(2^x + 2^{-x}) + b = 0$ 가 세 실근을 갖고, 가장 큰 근이 2 이상이 되게 하는  $a$ 와  $b$  사이의 관계식과  $a$ 의 범위를 옳게 나타낸 것은?

[4점]

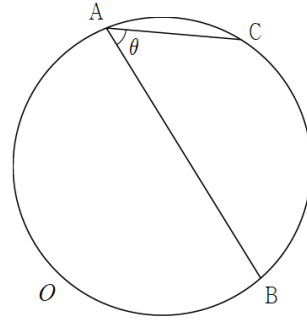
- ①  $b = 2a - 2 \quad \left(\frac{25}{4} \leq a\right)$                       ②  $b = 2a - 2 \quad (1 \leq a)$   
 ③  $b = 2a \quad \left(\frac{25}{4} \leq a\right)$                       ④  $b = 2a \quad (1 \leq a)$   
 ⑤  $b = 2a + 2 \quad \left(\frac{25}{4} \leq a\right)$



17. 함수  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + k$ 에 대하여 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의 접선과 점  $(2\alpha, f(2\alpha))$ 에서의 접선이 서로  $x$ 축에 대하여 대칭이다.  $k + \alpha$ 의 값은?  
(단,  $\alpha \neq 0$ ) [4점]

- ①  $\frac{9}{2}$                       ② 6                              ③  $\frac{13}{2}$   
 ④ 7                              ⑤  $\frac{15}{2}$

18. 원  $O$  위의 세 점  $A, B, C$ 에 대하여  $\overline{AB} = 11$ ,  $\overline{AC} = 5$ 이고  $\angle CAB = \theta$ 라 하면  $\sin\theta = \frac{4}{5}$ 이다. 원  $O$ 의 반지름의 길이는? (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) [4점]



- ①  $\frac{5\sqrt{5}}{2}$                       ②  $3\sqrt{5}$                       ③  $\frac{7\sqrt{5}}{2}$   
 ④  $4\sqrt{5}$                       ⑤  $\frac{9\sqrt{5}}{2}$

19. 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여 곡선  $y = \log_2 x$ 와 직선  $y = n - x$ 의 교점의  $x$ 좌표를  $a_n$ 이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ.  $2 < a_4 < 3$   
 ㄴ.  $n < a_n + \log_2 n$   
 ㄷ.  $(a_n)^{n-1} < n^{a_n-1}$

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 네 양수  $a, b, c, d$ 에 대하여 함수

$$f(x) = a \cos\{b(x-c)\} + d$$

의 최솟값은  $-1$ 이다. 방정식  $f(x) = 0$ 의 양수인 근을 작은 수부터 크기순으로 세 개를 나열한 것이

$$2\pi, 6\pi, 8\pi$$

일 때,  $\frac{bc}{a+d}$ 의 값은? (단,  $0 < c < 6\pi$ 이다.) [4점]

- ①  $\frac{2}{9}\pi$                       ②  $\frac{1}{3}\pi$                       ③  $\frac{4}{9}\pi$   
 ④  $\frac{5}{9}\pi$                       ⑤  $\frac{2}{3}\pi$

21. 최고차항의 계수가 음수인 사차함수  $f(x)$ 에 대하여 방정식  $f'(x)=0$ 는 세 실근  $\alpha, \beta, \gamma$ 를 갖고 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $\alpha+2\gamma=3\beta$   
 (나)  $f(\beta)=0, f(\gamma)=5$

$f(\alpha)$ 의 값은? [4점]

- ① 32                      ② 34                      ③ 36  
 ④ 38                      ⑤ 40

단답형

22.  $\log_4 27 \times \log_3 16$ 의 값을 구하여라. [3점]

23. 함수  $f(x)=x^3+x^2+x$ 에 대하여  $f'(2)$ 의 값을 구하여라. [3점]

24. 두 곡선  $y = x^2$ ,  $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 16일 때, 양수  $a$ 의 값을 구하여라. [3점]

25. 수열  $\{a_n\}$ 이  $\sum_{k=1}^5 a_k = 10$ ,  $\sum_{k=1}^5 ka_k = 15$ 을 만족시킬 때,  
 $\left\{ \sum_{k=1}^5 (k+1)a_k \right\} \times \left\{ \sum_{k=1}^4 ka_{k+1} \right\}$ 의 값을 구하여라. [3점]

26. 양수  $a$ 와 0이 아닌 세 실수  $x, y, z$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad 2^x = 3^y = a^z$$

$$(나) \quad \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{z}$$

$a$ 의 값을 구하여라. [4점]

27. 다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{(x+1)f(x)} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 3$$

$f(3)$ 의 값을 구하여라. [4점]

28. 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n-1} a_k = n^2 + n, \quad \sum_{k=1}^{2n} a_k = n^2 + 3n$$

일 때,  $a_n a_{n+1} = 24$ 을 만족시키는 모든 자연수  $n$ 의 값의 합을 구하여라. [4점]

29.  $a_1 = 16$ 이고 공차가 양수인 등차수열  $\{a_n\}$ 과 자연수  $m$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} x - a_m & (x \leq a_m) \\ \frac{1}{2}(x - a_m) & (x > a_m) \end{cases}$$

이다.

$$\sum_{k=1}^m a_k = 28m, \quad \sum_{k=1}^{2m} f(a_k) = -28$$

일 때,  $f(a_{3m})$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(t) & (x < t) \\ f(t) - f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

이고,  $t$ 에 대한 함수  $h(t)$ 는  $g(x)$ 의 최댓값이다.  $h(t)$ 가  $t=0, t=4, t=8$ 을 제외한 모든 실수에서 미분가능하고

$h(4) = 4$ 일 때,  $\int_{-2}^{10} h(t)dt$ 의 값을 구하여라. [4점]

[3월 모의고사 연습]  
나형 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	⑤	02	①	03	④	04	④	05	⑤
06	①	07	③	08	②	09	④	10	②
11	②	12	④	13	②	14	②	15	⑤
16	①	17	③	18	①	19	②	20	③
21	①	22	6	23	17	24	6	25	125
26	72	27	16	28	23	29	28	30	48

## COMMENT 10

$a^x = k - a^x$  에서  $A\left(\log_a 2 + \log_a k, \frac{k}{2}\right)$  이고  $B(\log_a k, 0)$  이다.

$\log_a k - (\log_a k - \log_a 2) = 4$  이므로  $a = \sqrt[3]{2}$ ,  $g(4) = 4$  에서  $k = 6$  이다.

## COMMENT 12

$f(x)$  의  $x = 1$  에서의 우미분계수는 3, 좌미분계수는  $-2$  이다.

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \right\}$  이다.

## COMMENT 13

$\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$  이므로  $\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{4}$  이다.  $(\cos\theta + \sin\theta)^2 = \frac{3}{2}$ ,  $(\cos\theta - \sin\theta)^2 = \frac{1}{2}$  이고

각을 짚어보면  $\cos\theta + \sin\theta < 0$ ,  $\cos\theta - \sin\theta < 0$  이므로  $\cos\theta + \sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $\cos\theta - \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  이다.

## COMMENT 16

$t = 2^x + 2^{-x}$  로 치환하자.  $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$  이므로  $t^2 - 2$  이다. 준 방정식은  $t^2 - at + b - 2 = 0$  이다.

$t$  에 대한 이차방정식이다. 만족하는  $t$  가 0개 또는 1개로는  $x$  값 세 개를 얻을 수 없다. 따라서 방정식의 근은 두 개다.

모어오버, 곡선  $t = 2^x + 2^{-x}$  를 짚어보면  $t$  값 하나는 2고, 하나는 2보다 큰 수여야 한다.

피더모어, 가장 큰 근 할 때 근은  $x$  값이고  $x$  값 2 이상에서  $t$  는  $\frac{17}{4}$  이상이다. 곡선  $t = 2^x + 2^{-x}$  에서 확인.

## COMMENT 17

$$\alpha = 1, k = \frac{11}{2}$$

## COMMENT 19

ㄱ.  $\log_2 2 < 4 - 2$  이고  $\log_2 3 > 4 - 3$  이다.

ㄴ.  $\log_2 a_n = n - a_n$  이고  $\log_2 a_n < \log_2 n$  이므로

ㄷ. 준 식은  $\frac{\log_2 a_n}{a_n - 1} < \frac{\log_2 n}{n - 1}$  이다. 기울기 봐봐.

## COMMENT 20

$x = \pi$  에서 최소,  $x = 4\pi$  에서 최대이고, 최댓값은 3이다.  $\sin x$  의 값이  $\pm \frac{1}{2}$  가 될 때를 잘 생각해보자.

$$a = 2, b = \frac{1}{3}, c = 4\pi, d = 1 \text{ 이다.}$$



## COMMENT 21

원함수의 변화량은 도함수의 넓이다. 대충 도함수를  $f'(x) = k(x+2a)x(x-a)$ 라 놓고

$\int_{-2a}^0 f'(x)dx$ 와  $\int_0^a f'(x)dx$ 를 비교해보자. 대충 32:5가여서 답이 32라는 것을 알 수 있다.

## COMMENT 27

(나)에서  $f(x) = (x-1)^2(ax+b)$ 이다.

## COMMENT 28

$$a_{2n} = (n^2 + 3n) - (n^2 + n) = 2n,$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때 } a_{2n-1} = (n^2 + n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2 \text{ 이다.}$$

$$a_1 = 2 \text{ 이므로 } a_{2n-1} = 2.$$

$$a_{11}a_{12} = 24, a_{12}a_{13} = 24 \text{ 이다.}$$

## COMMENT 29

공차를  $d$ 라 하자.  $\sum_{k=1}^m a_k = 28m$ 는  $\frac{16 + 16 + (m-1)d}{2} = 28$ 이므로  $(m-1)d = 24$ 이다.

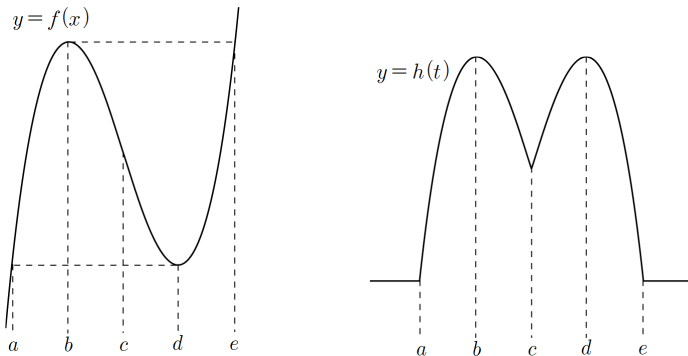
$$\sum_{k=1}^{2m} f(a_k) \text{는 } -(m-1)d - (m-2)d - \dots - 2d - d + 0 + \frac{1}{2}d + d + \frac{3}{2}d + \dots + \frac{m}{2}d \text{ 이므로 } -\frac{(m-1)m}{2}d + \frac{m(m+1)}{4}d = \frac{(3-m)md}{4} = -28 \text{ 이다.}$$

두 식을 연립하면  $m = 7, d = 4$ 이다.

## COMMENT 30

$f(x)$ 가 극값을 가지지 않으면 모든 실수  $t$ 에 대하여  $h(t) = 0$ 이다.

$f(x)$ 가 다음 그림과 같을 때,  $h(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq a) \\ f(t) - f(d) & (a < t \leq c) \\ f(b) - f(t) & (c < t \leq e) \\ 0 & (e < t) \end{cases}$ 이다. 잘 따져보자. 좀 헛갈림요.



문제의 조건에서  $a = 0, c = 4, e = 8$ 이고, 삼차함수의 성질에서  $b = 2, d = 6$ 이다.