

[한성은 모의고사]

| 3월 모의고사(가형) 연습 |

| 한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

3월 대비가 하나 더 필요해서 만들었습니다 ㅜㅜ

이정환(이투스) 선생님이 검토를 도와주셨습니다.

[~의 값은?]과 높임법 총위가 맞는 것은 [구하시오.]가 아니라 [구하여라.]인 것 같아요. 뇌피셜입니다.

여러 국어선생님들에게 여쭙봤지만 전혀 도움이 되질 않았습니다. 국어가 그렇죠 뭐.

hansungeun.com

- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.

- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 18

2. $\sin \frac{3\pi}{2}$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+1}{n(n+1)}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

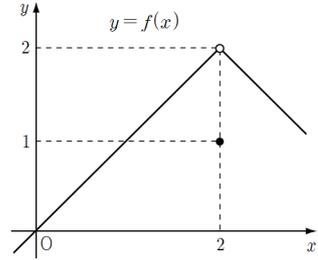
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (t^2+t+a)dt = 6$ 를 만족시키는 실수 a 의

- 값은? [3점]
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. 두 문자 a, b 를 중복을 허락하여 만든 6자리 문자열 중에서 a 끼리는 이웃하지 않는 것의 개수는? [3점]
- ① 13 ② 15 ③ 17
 ④ 19 ⑤ 21

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 - 2a_3 + a_8 = 20$ 일 때, $a_{20} - a_{15}$ 의 값은? [3점]
- ① 25 ② 27 ③ 29
 ④ 31 ⑤ 33

7. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

8. 도함수가 $f'(x) = 6(x^2 + x)$ 인 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 2일 때, 극댓값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
 ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

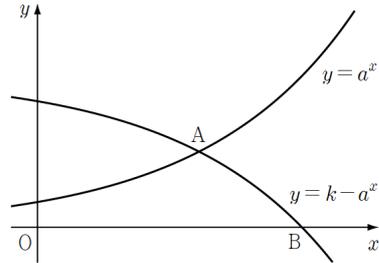
9. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간 $t(t > 0)$ 에서의 위치 x_1, x_2 가

$$x_1 = t^2 - 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}t^2 + 4t + a$$

이다. 두 점 P, Q가 서로 만나며 속도가 같아지는 시각이 존재할 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{8}{3}$ ② -3 ③ $-\frac{10}{3}$
 ④ $-\frac{11}{3}$ ⑤ -4

10. 두 함수 $f(x) = a^x, g(x) = k - f(x)$ 에 대하여, 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 교점을 A, 곡선 $y = g(x)$ 와 x 축의 교점을 B라 하자. $g(4) = 4$ 이고 점 A의 x 좌표와 점 B의 x 좌표의 차이가 4일 때, \overline{AB} 의 값은? (단, a 와 k 는 양의 실수이다.) [3점]



- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
 ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

11. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\int_1^x (t-2)f(t)dt = x^3 + ax^2 + bx - 1$$

를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

12. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & (x \leq 1) \\ x^3 & (x > 1) \end{cases}$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$ 의 값은? [3점]

- ① -9 ② -5 ③ -1
 ④ 1 ⑤ 5

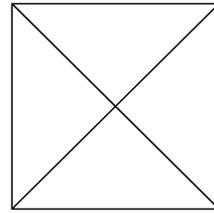
13. $\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$ 인 실수 θ 에 대하여

$$\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 4$$

일 때, $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. 그림과 같이 정사각형과 정사각형의 대각선으로 만들어진 도형이 있다. 정사각형 내부에 만들어지는 4개의 영역에 각각 한 가지 색만을 이용하여 칠한다. 서로 다른 네 가지 색을 이용하여 이웃하는 면이 구별되도록 색칠하는 방법의 수는? (단, 모든 색을 사용할 필요는 없으며, 면이 이웃하는 것은 변을 공유하는 경우만을 의미한다. 또, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



- ① 22 ② 24 ③ 26
 ④ 28 ⑤ 30

6

수학 영역(가형)

15. 다음은 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $x \geq 0$ 일 때,

$$x^n - 1 \geq n(x-1) \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

i) $n=2$ 일 때,
 $(x-1)^2 \geq 0$
 이므로 (*)이 성립한다.

ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면,
 $x^k - 1 \geq k(x-1)$
 이다. $n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & x^{k+1} - 1 - (k+1)(x-1) \\ &= x(x^k - 1) + \boxed{\text{(가)}} - (k+1)(x-1) \\ &\geq x\{k(x-1)\} + x - 1 - (k+1)(x-1) \\ &= k \times \boxed{\text{(나)}} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

 따라서 $n=k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

i), ii)에 의해 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 $x \geq 0$ 일 때,
 $x^n - 1 \geq n(x-1)$
 이 성립한다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(x)$ 이라 할 때, $f(5)+g(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 5 ② 7 ③ 9
 ④ 11 ⑤ 13

16. x 에 대한 방정식 $(4^x + 4^{-x}) - a(2^x + 2^{-x}) + b = 0$ 가 세 실근을 갖고, 가장 큰 근이 2 이상이 되게 하는 a 와 b 사이의 관계식과 a 의 범위를 옳게 나타낸 것은?

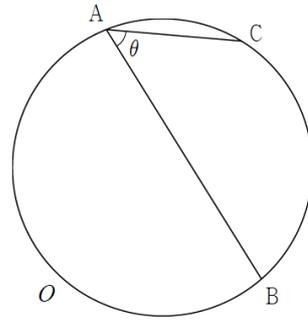
[4점]

- ① $b = 2a - 2 \quad \left(\frac{25}{4} \leq a\right)$ ② $b = 2a - 2 \quad (1 \leq a)$
 ③ $b = 2a \quad \left(\frac{25}{4} \leq a\right)$ ④ $b = 2a \quad (1 \leq a)$
 ⑤ $b = 2a + 2 \quad \left(\frac{25}{4} \leq a\right)$

17. 함수 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + k$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의 접선과 점 $(2\alpha, f(2\alpha))$ 에서의 접선이 서로 x 축에 대하여 대칭이다. $k + \alpha$ 의 값은? (단, $\alpha \neq 0$) [4점]

- ① $\frac{9}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$
 ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

18. 원 O 위의 세 점 A, B, C 에 대하여 $\overline{AB} = 11$, $\overline{AC} = 5$ 이고 $\angle CAB = \theta$ 라 하면 $\sin\theta = \frac{4}{5}$ 이다. 원 O 의 반지름의 길이는? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $\frac{7\sqrt{5}}{2}$
 ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{5}}{2}$

19. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = \log_2 x$ 와 직선 $y = n - x$ 의 교점의 x 좌표를 a_n 이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. $2 < a_4 < 3$
 ㄴ. $n < a_n + \log_2 n$
 ㄷ. $(a_n)^{n-1} < n^{a_n-1}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 네 양수 a, b, c, d 에 대하여 함수

$$f(x) = a \cos\{b(x-c)\} + d$$

의 최솟값은 -1 이다. 방정식 $f(x) = 0$ 의 양수인 근을 작은 수부터 크기순으로 세 개를 나열한 것이

$$2\pi, 6\pi, 8\pi$$

일 때, $\frac{bc}{a+d}$ 의 값은? (단, $0 < c < 6\pi$ 이다.) [4점]

- ① $\frac{2}{9}\pi$ ② $\frac{1}{3}\pi$ ③ $\frac{4}{9}\pi$
 ④ $\frac{5}{9}\pi$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

21. 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 는 세 실근 α, β, γ 를 갖고 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\alpha+2\gamma=3\beta$
 (나) $f(\beta)=0, f(\gamma)=5$

$f(\alpha)$ 의 값은? [4점]

- ① 32 ② 34 ③ 36
 ④ 38 ⑤ 40

단답형

22. $\log_4 27 \times \log_3 16$ 의 값을 구하여라. [3점]

23. 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값을 구하여라. [3점]

24. 두 곡선 $y = x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 16일 때, 양수 a 의 값을 구하여라. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^5 a_k = 10$, $\sum_{k=1}^5 ka_k = 15$ 을 만족시킬 때,
 $\left\{ \sum_{k=1}^5 (k+1)a_k \right\} \times \left\{ \sum_{k=1}^4 ka_{k+1} \right\}$ 의 값을 구하여라. [3점]

26. 양수 a 와 0이 아닌 세 실수 x, y, z 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) 2^x = 3^y = a^z$$

$$(나) \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{z}$$

a 의 값을 구하여라. [4점]

27. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n-1} a_k = n^2 + n, \quad \sum_{k=1}^{2n} a_k = n^2 + 3n$$

일 때, $a_n a_{n+1} = 24$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하여라. [4점]

28. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{n+1} = 1$$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$6n^2 < a_n b_n < 6n(n+2)$$

이다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 의 값을 구하여라. [4점]

29. $a_1 = 16$ 이고 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} x - a_m & (x \leq a_m) \\ \frac{1}{2}(x - a_m) & (x > a_m) \end{cases}$$

이다.

$$\sum_{k=1}^m a_k = 28m, \quad \sum_{k=1}^{2m} f(a_k) = -28$$

일 때, $f(a_{3m})$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(t) & (x < t) \\ f(t) - f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

이고, t 에 대한 함수 $h(t)$ 는 $g(x)$ 의 최댓값이다. $h(t)$ 가 $t=0, t=4, t=8$ 을 제외한 모든 실수에서 미분가능하고

$h(4) = 4$ 일 때, $\int_{-2}^{10} h(t)dt$ 의 값을 구하여라. [4점]

[3월 모의고사 연습]
가형 정답표

문항	정답								
01	⑤	02	①	03	④	04	④	05	⑤
06	①	07	③	08	②	09	④	10	②
11	②	12	④	13	②	14	②	15	⑤
16	①	17	③	18	①	19	②	20	③
21	①	22	6	23	17	24	6	25	125
26	72	27	23	28	24	29	28	30	48

COMMENT 10

$a^x = k - a^x$ 에서 $A(\log_a 2 + \log_a k, \frac{k}{2})$ 이고 $B(\log_a k, 0)$ 이다.

$\log_a k - (\log_a k - \log_a 2) = 4$ 이므로 $a = \sqrt[3]{2}$, $g(4) = 4$ 에서 $k = 6$ 이다.

COMMENT 12

$f(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 우미분계수는 3, 좌미분계수는 -2 이다.

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \right\}$ 이다.

COMMENT 13

$\tan \theta + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\cos \theta \sin \theta}$ 이므로 $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{4}$ 이다. $(\cos \theta + \sin \theta)^2 = \frac{3}{2}$, $(\cos \theta - \sin \theta)^2 = \frac{1}{2}$ 이고

각을 짚어보면 $\cos \theta + \sin \theta < 0$, $\cos \theta - \sin \theta < 0$ 이므로 $\cos \theta + \sin \theta = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos \theta - \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

COMMENT 16

$t = 2^x + 2^{-x}$ 로 치환하자. $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$ 이므로 $t^2 - 2$ 이다. 준 방정식은 $t^2 - at + b - 2 = 0$ 이다.

t 에 대한 이차방정식이다. 만족하는 t 가 0개 또는 1개로는 x 값 세 개를 얻을 수 없다. 따라서 방정식의 근은 두 개다.

모어오버, 곡선 $t = 2^x + 2^{-x}$ 를 짚어보면 t 값 하나는 2고, 하나는 2보다 큰 수여야 한다.

피더모어, 가장 큰 근 할 때 근은 x 값이고 x 값 2 이상에서 t 는 $\frac{17}{4}$ 이상이다. 곡선 $t = 2^x + 2^{-x}$ 에서 확인.

COMMENT 17

$$\alpha = 1, k = \frac{11}{2}$$

COMMENT 19

ㄱ. $\log_2 2 < 4 - 2$ 이고 $\log_2 3 > 4 - 3$ 이다.

ㄴ. $\log_2 a_n = n - a_n$ 이고 $\log_2 a_n < \log_2 n$ 이므로

ㄷ. 준 식은 $\frac{\log_2 a_n}{a_n - 1} < \frac{\log_2 n}{n - 1}$ 이다. 기울기 바봐.

COMMENT 20

$x = \pi$ 에서 최소, $x = 4\pi$ 에서 최대이고, 최댓값은 3이다. $\sin x$ 의 값이 $\pm \frac{1}{2}$ 가 될 때를 잘 생각해보자.

$$a = 2, b = \frac{1}{3}, c = 4\pi, d = 1 \text{ 이다.}$$

COMMENT 21

원함수의 변화량은 도함수의 넓이다. 대충 도함수를 $f'(x) = k(x+2a)x(x-a)$ 라 놓고

$\int_{-2a}^0 f'(x)dx$ 와 $\int_0^a f'(x)dx$ 를 비교해보자. 대충 32:5가 떠서 답이 32라는 것을 알 수 있다.

COMMENT 27

$$a_{2n} = (n^2 + 3n) - (n^2 + n) = 2n,$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때 } a_{2n-1} = (n^2 + n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2 \text{ 이다.}$$

$$a_1 = 2 \text{ 이므로 } a_{2n-1} = 2.$$

$$a_{11}a_{12} = 24, \quad a_{12}a_{13} = 24 \text{ 이다.}$$

COMMENT 28

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{a_n b_n}{a_n^2} = \frac{a_n b_n}{n^2} \times \left(\frac{n}{a_n}\right)^2 \text{ 이므로 } 6 \times 2^2 \text{ 으로 수렴한다.}$$

COMMENT 29

공차를 d 라 하자. $\sum_{k=1}^m a_k = 28m$ 는 $\frac{16+16+(m-1)d}{2} = 28$ 이므로 $(m-1)d = 24$ 이다.

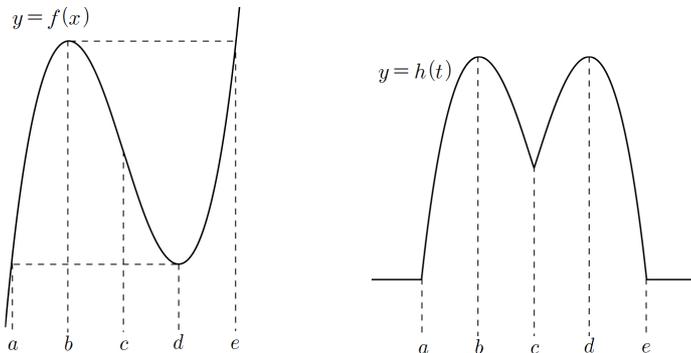
$$\sum_{k=1}^{2m} f(a_k) \text{ 는 } -(m-1)d - (m-2)d - \dots - 2d - d + 0 + \frac{1}{2}d + d + \frac{3}{2}d + \dots + \frac{m}{2}d \text{ 이므로 } -\frac{(m-1)m}{2}d + \frac{m(m+1)}{4}d = \frac{(3-m)md}{4} = -28 \text{ 이다.}$$

두 식을 연립하면 $m = 7, d = 4$ 이다.

COMMENT 30

$f(x)$ 가 극값을 가지지 않으면 모든 실수 t 에 대하여 $h(t) = 0$ 이다.

$f(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, $h(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq a) \\ f(t) - f(d) & (a < t \leq c) \\ f(b) - f(t) & (c < t \leq e) \\ 0 & (e < t) \end{cases}$ 이다. 잘 따져보자. 좀 헛갈림요.



문제의 조건에서 $a = 0, c = 4, e = 8$ 이고, 삼차함수의 성질에서 $b = 2, d = 6$ 이다.