[권구승/한성은 모의고사]

| 3월 모의고사(나형) 연습 (1/2) |

권구승

이강학원(대치, 분당), 이투스앤써.

보통 학생의 수능 1등급, 권구승입니다.

한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY, 목동 예섬.

월 1회분의 모의고사를 생산할 예정입니다.
열심히 풀어주세요. 자세한 해설은 친구참조.

hansungeun.com
- 저자소개, 학습자료, 교재판매

CCL

5지선다형

1. $8^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2. 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_3의 값은? [2점]
① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

3. $\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x}$의 값은? [2점]
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 정적분 $\int_{-1}^{3}(3x^2+1)dx$의 값은? [3점]
① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

5. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$일 때, 방정식 $\sin 2x = 1$의 해는? [3점]

① $\frac{\pi}{10}$ ② $\frac{\pi}{8}$ ③ $\frac{\pi}{6}$
④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

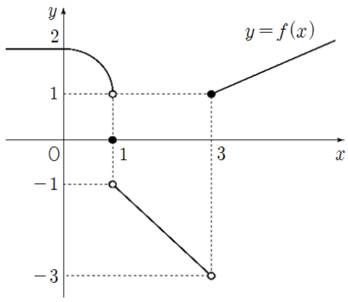
6. 두 양수 a, b에 대하여

$$\log_4 a^3 b = 1 + \log_2 ab$$

가 성립할 때, $\frac{a}{b}$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

7. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f(3) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

8. 함수 $f(x)=(x-2)(x^3-4x+a)$에 대하여 $f'(1)=5$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

9. $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$, $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{33}$인 삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

10. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-ax^2+bx & (x\le 1) \\ 2x+b & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

11. $0 \le x \le 4$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 2x-a & (0 \le x < 1) \\ b & (1 \le x < 3) \\ -2x+7 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$

일 때, $\int_0^x f(t)dt$의 최댓값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{11}{4}$
④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

12. 함수 $f(x)=x^3-x+a$의 그래프 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=bx+4$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

13. $a>2$인 상수 a에 대하여 두 함수

$$y=\log_2 x, \quad y=\log_2(a-x)$$

의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(a-x)$의 그래프의 교점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 6배일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

14. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_2^x f(t)dt = x^3+x^2+ax-\int_0^a f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^a f(t)dt$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

15. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q는 시각 $t=0$일 때 각각 원점 O(0)과 점 A(6)을 출발하고,
시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=-t+a, \quad v_2(t)=2t-2$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 적어도 한 번 만나게 되는 상수 a의 최솟값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

16. 어떤 선생님은 수업 시작 전의 스트레스 때문에 고통 받고 있다. 이 선생님이 수업 시작 전에 받는 스트레스 지수를 s, 수업에 참여하는 학생의 수를 M(명), 수업 시작까지 남은 시간을 t(시간)라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log_2 s=\log_2 M+\frac{1}{t}+k \text{ (단, } k\text{는 양의 상수이다.)}$$

이 선생님이 수업에 참여하는 학생의 수가 40명인 수업 시작 1시간 전에 받는 스트레스 지수는 수업에 참여하는 학생의 수가 10명인 수업 시작 2시간 전에 받는 스트레스 지수의 몇 배인가? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{5}{3}$이고

$$a_{n+1}=\frac{3a_n-2}{a_n}$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n이

$$a_n=\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1} \cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

i) $n=1$일 때, (좌변)$=a_1=\frac{5}{3}$,

(우변)$=\frac{2^2+1}{2^1+1}=\frac{5}{3}$ 이므로 (*)이 성립한다.

ii) $n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$a_k a_{k+1}=3a_k-2$이고 $a_k=\frac{2^{k+1}+1}{2^k+1}$이므로

$$\frac{2^{k+1}+1}{2^k+1}\times a_{k+1}=3\times\frac{2^{k+1}+1}{2^k+1}-2$$

$$=\frac{\boxed{(가)}+1}{2^k+1}$$

이다. 따라서 $a_{k+1}=\frac{\boxed{(나)}}{2^{k+1}+1}$이므로

$n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

i), ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$이라 할 때, $f(2)+g(2)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

18. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n은 다음 조건을 만족시킨다.

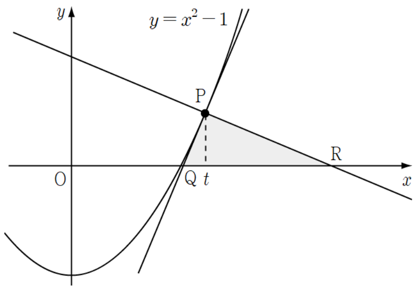
(가) 동경 OP_n이 나타내는 각의 크기는 $\frac{n\pi}{3}$이다.

(나) $\overline{\mathrm{OP}_n}=3+(-1)^n$

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{36}|x_n|$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 36 ② 48 ③ 60
④ 72 ⑤ 84

19. 그림과 같이 곡선 $y=x^2-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$에서의 접선과 x축과의 교점을 Q, 점 P를 지나고 곡선 $y=x^2-1$ 위의 점 P에서의 접선과 수직인 직선과 x축과의 교점을 R이라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 1+}\dfrac{S(t)}{(t-1)^2}$의 값은? [4점]

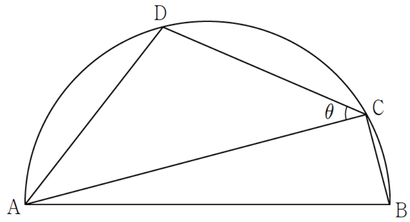


① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

20. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O 위의 두 점 C, D는

$$\overline{\mathrm{BC}}=1,\quad \sin(\angle\mathrm{ACD})=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

을 만족시킨다. $\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [4점]



① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{8}$ ⑤ 3

21. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$은 두 근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 갖고, 함수 $f'(x)$의 극솟값은 -1이다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=-x+t$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

ㄴ. $f(\alpha)=f\left(-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\beta\right)$

ㄷ. $\beta-\alpha=4$이면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차이는 $\frac{8}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\log_2 24-\log_2 3$의 값을 구하여라. [3점]

23. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{5h}=7$일 때, $f'(4)$의 값을 구하여라. [3점]

24. 좌표평면에서 함수 $y=3^x+4$의 그래프의 점근선과 함수 $y=\log_3(x-2)$의 그래프의 점근선이 만나는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라. [3점]

25. 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x-1)}{x+1}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1}(x^2+4)f(x)$의 값을 구하여라. [3점]

26. 각 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_5S_7=49a_4$일 때, S_9의 값을 구하여라. [4점]

27. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2}=2$
(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x+2)(x-1)}=4$

$f(2)$의 값을 구하여라. [4점]

28. 1이 아닌 양수 a와 실수 b에 대하여 함수

$$f(x)=(a^{2x}+4a^{-2x})-2(a^{x}-2a^{-x})+b$$

는 $x=4$일 때 최솟값 6을 가진다. a^8+b의 값을 구하여라. [4점]

29. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 함수

$$f(x)=6-\frac{|x-6|}{2}$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

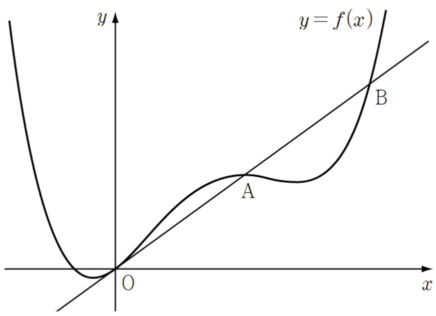
(가) $f(a_3)=f(a_8)$
(나) $f(a_{11})+f(a_{12})=0$

$\sum_{k=1}^{14} f(a_k)$의 값을 구하여라. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 사차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 A는 선분 OB의 중점이다.
(나) 점 A는 곡선 $y=f(x)$의 극대점이다.

점 A의 y좌표가 1 이하일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선의 기울기의 최댓값을 구하여라. (단, O는 원점이고 A와 B는 모두 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



[3월 모의고사 연습(1/2)]

나형 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	①	02	②	03	③	04	⑤	05	④
06	①	07	③	08	④	09	①	10	②
11	②	12	①	13	④	14	④	15	②
16	⑤	17	②	18	④	19	⑤	20	③
21	⑤	22	3	23	35	24	6	25	30
26	63	27	25	28	7	29	31	30	5

COMMENT 11

$a=1$, $b=1$이다. 함수 $\int_0^x f(t)dt$의 도함수는 $f(x)$이므로

구간 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에서 감소, 구간 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$에서 증가, 구간 $\left(\frac{7}{2},\ 4\right)$에서 감소한다.

COMMENT 14

$\int_0^a f(t)dt=k$라 하자. 준 식에 $x=2$를 대입하면 $k=2a+12$다.

양 변을 미분하면 $f(x)=3x^2+2x+a$이고 $\int_0^a (3t^2+2t+a)dt=k$에서 $a^3+2a^2=k$다.

연립하여 풀면 $a=2$, $k=16$이다.

※ 처음 준 식에 $x=0$을 대입하면 $\int_0^2 f(t)dt=\int_0^a f(t)dt$를 얻을 수 있지만 여기서 a를 바로 뽑을 수는 없다.

COMMENT 15

점 P의 위치는 $-\frac{1}{2}t^2+at$, 점 Q의 위치는 t^2-2t+6이다.

$$-\frac{1}{2}t^2+at=t^2-2t+6$$

의 판별식이 0 이상이다. $\Rightarrow$ $(a+8)(a-4)\geq 0$

※ $a\leq -8$인 경우에는 음수 t를 근으로 가지므로 원하는 경우가 아니다.

COMMENT 16

$\log_2 s_1=\log_2 40+1+k$에서 $s_1=40\times 2\times 2^k$이고,

$\log_2 s_2=\log_2 10+\frac{1}{2}+k$에서 $s_1=10\times\sqrt{2}\times 2^k$이다.

s_1은 s_2의 $4\sqrt{2}$ 배이다.

COMMENT 17

$f(k)=2^{k+2}$, $\quad g(k)=2^{k+2}+1$

COMMENT 18

$+1+2+2+2+1+4$를 여섯 번.

COMMENT 19

$Q(2t^3-t,\ 0)$, $R\left(\frac{t^2+1}{2t},\ 0\right)$이고, $S(t)=\frac{(t^2-1)(4t^4-3t^2-1)}{4t}$이다.

COMMENT 20

삼각형 ACD에서 사인을 때리면 $\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle \mathrm{ACD})}=4$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{6}$이다.

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 두고 삼각형 ACD에서 코사인 때리면 $6=x^2+15-2\sqrt{15}x\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}$이다.

$$2x^2-5\sqrt{6}x+18=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{6})(2x-3\sqrt{6})=0$$

이다. 긴 것은 점 D가 원 밖에 떨어지는 경우이다. (∠ADC가 예각인 경우)

COMMENT 21

ㄴ은 : 2:1 알좋

ㄷ근 : 도함수는 $y=\dfrac{1}{4}x(x-4)$를 평행이동시킨 것이다.

도함수와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\dfrac{8}{3}$이다.

COMMENT 26

$S_7=7a_4$이므로 준 식은 $a_5=7$이다. $S_9=9a_5$이다.

COMMENT 27

(가)에서 $f(x)=x^4+2x^2+\cdots$이고, (나)에서 $f(1)=0$, $f'(1)=12$이다.

$f(x)=x^4+2x^2+4x-7$

COMMENT 28

$a^x-2a^{-x}=t$로 치환하면, 준 식은 $f(x)=t^2-2t+4+b=(t-1)^2+3+b$다.

(함수 a^x-2a^{-x}의 치역이 실수 전체이므로 t는 임의의 실수.)

$t=1$일 때 최솟값 $3+b$를 가진다. $b=3$이고, $x=4$일 때 $a^x-2a^{-x}=1$이므로

$(a^4-2)(a^4+1)=0$에서 $a^4=2$다.

COMMENT 29

$a_{5.5}=6$, $a_{11.5}=18$이므로 공차는 2, $a_1=-3$이다.

$$\sum_{k=1}^{14}f(a_k)=\sum_{k=1}^{8}f(a_k)$$
$$=f(-3)+f(-1)+2f(1)+2f(3)+2f(5)$$
$$=(1.5)+(2.5)+2(3.5)+2(4.5)+2(5.5)$$

COMMENT 30

두 양수 a, k에 대하여 $f(x)=x^2(x-a)(x-2a)+kx$로 나타낼 수 있다.

$$f'(a)=0 \Leftrightarrow -a^3+k=0 \Leftrightarrow k=a^3$$
$$f(a)\le 1 \Leftrightarrow a^4\le 1 \Leftrightarrow a\le 1$$

이다. $f'(2a)=5a^3$이므로 최댓값은 5다.