원포인트 개념주입 B2

적분법

적분법

개념1

✏ 초월함수의 적분 : 알아서 잘.

001.

함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=\int \frac{3x^3+2x^2+2}{x}dx$이고 $f(1)=0$일 때, $f(-1)$의 값은?1)

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

002.

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\sin x$일 때, $f(\pi)-f(0)$의 값은?2)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

003.

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=2^x+2^{-x}$이고 $f(0)=0$일 때, $f(1)$의 값은?3)

① $\frac{1}{\ln 2}$ ② $\frac{3}{2\ln 2}$ ③ $\frac{2}{\ln 2}$
④ $\ln 2$ ⑤ $2\ln 2$

004.

$-4\le x\le -1$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=\int\sqrt{1-2x}\,dx$이고 최솟값이 -7일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은?4)

① -2 ② $-\sqrt{3}$ ③ $1-\sqrt{3}$
④ $2-\sqrt{3}$ ⑤ 1

✏ 치환적분법

: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$

개념2

✏ 치환정적분

: $\begin{cases} g(a)=\alpha \\ g(b)=\beta \end{cases}$ 이면 $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$

005.

$\int_1^e \frac{3(\ln x)^2}{x}dx$의 값은?[5)]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

006.

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

일 때, $(f \circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은?[6)]

① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$

④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

007.

점 $(e,\ 4)$를 지나는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\frac{2\ln x}{x(\ln x+1)}$일 때, $f(e^3)=a+\ln b$이다. ab의 값은?[7)] (단, a, b는 유리수이다.)

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

✏ 치환적분법각 : 혹시 도함수가 곱해져 있나?

개념3

008.

함수 $f(x)$가 $f'(x)=(2x+1)f(x)$, $f(0)=1$을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?8) (단, $f(x)>0$)

① $-e^2$　② $-e$　③ 1
④ e　⑤ e^2

009.

미분가능한 함수 $f(x)=\int_1^x e^{\sin t}dt$에 대하여 $f(a)=\ln 2$일 때, 정적분 $\int_1^a e^{\sin x+2f(x)}dx$의 값은 p이다. $60p$의 값을 구하여라.9) (단, a는 상수이다.)

010.

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)dx=2,\ \int_0^1 |f(x)|dx=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|dt\ \ (0\le x\le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은?10)

① $4-\sqrt{2}$　② $2+\sqrt{2}$　③ $5-\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$　⑤ $2+2\sqrt{2}$

✏ 부분적분법

: $\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$

개념4

※ 우변 부정적분에서 어느 함수가 적분되고 어느 함수가 미분되는지 잘 살핀다.

011.

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = (2x+1)\sin x$이고 $f(0) = 2$일 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?11)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

012.

$\int_1^e x(1-\ln x)dx$의 값은?12)

① $\frac{1}{4}(e^2-7)$ ② $\frac{1}{4}(e^2-6)$ ③ $\frac{1}{4}(e^2-5)$
④ $\frac{1}{4}(e^2-4)$ ⑤ $\frac{1}{4}(e^2-3)$

013.

$\int_1^2 xe^{2x}dx = ae^4 + be^2$일 때, $a-b$의 값은?13)
(단, a, b는 유리수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

✏ 부분적분법각 보기.

: 부분적분은 문제 $\int f(x)g(x)dx$를 $\int f'(x)G(x)dx$로 바꿔준다.

개념5

014.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고, $f(a)=0$, $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k(a>0,\ 0<k<1)$일 때, $\int_{a}^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은?14)

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2

④ k ⑤ $2k$

015.

$f(x)=\int_{1}^{x}e^{-t^2}dt$일 때, $\int_{0}^{1}f(x)dx$의 값은?15)

① $\frac{1}{2e}$ ② $\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2e}-1$

④ $\frac{1}{e}$ ⑤ $\frac{1}{e}-\frac{1}{2}$

016.

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$

(나) $g(x)=\frac{4}{e^4}\int_{1}^{x}e^{t^2}f(t)dt$

$f(1)=\frac{1}{e}$일 때, $f(2)-g(2)$의 값은?16)

① $\frac{16}{3e^4}$ ② $\frac{6}{e^4}$ ③ $\frac{20}{3e^4}$

④ $\frac{22}{3e^4}$ ⑤ $\frac{8}{e^4}$

✏ $\begin{cases} g(\alpha)=a \\ g(\beta)=b \end{cases}$일 때, $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dx$

⇒ x에 대한 적분을 t에 대한 적분으로 변형

① $1-1$ 대응관계 확인 ② dx와 dt간의 관계식 ③ 구간의 변화

개념6

✏ 삼각치환 : $\sqrt{a^2-x^2}$ 보이면 $x=a\sin\theta$로, $\dfrac{1}{1+x^2}$ 보이면 $x=a\tan\theta$로 치환

017.

정적분 $\int_0^1 (\sqrt{2-x^2}+x^2)dx$의 값은?[17)]

① $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{5}{6}$ ② $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{\pi}{4}$

④ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5}{6}$

018.

$x>0$에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 열린구간 $(0,\ \infty)$에서
> $f'(x)>0,\ f''(x)<0$이다.
> (나) $f(1)=1,\ f(4)=2,\ f(16)=4$
> (다) $f'(1)=\dfrac{1}{2},\ f'(16)=\dfrac{1}{8}$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하고 $g(x)$의 이계도함수가 존재할 때, $\int_1^2 g''(g(x))g'(x)dx$의 값을 구하여라.[18)]

✔ 정적분을 포함한 항등식

개념7

① 정적분 구간이 상수이면 정적분값을 상수취급해서 식에 다시 대입해 준다.

② 구간에 변수가 있으면

1) x에 적당한 값(정적분이 윗 끝과 아랫 끝이 같아지는 값)을 넣어본다.

2) 조심해서 잘 미분한다.

※ $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, $\frac{d}{dx}\int_a^x tf(t)dt = xf(x)$, $\frac{d}{dx}\int_a^x xf(t)dt = xf(x) + \int_a^x f(t)dt$

019.

연속함수 $f(x)$가 $f(x) = \cos^2 x + \int_0^{\pi}\{\sin t \cdot f(t)\}dt$를 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은?19)

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{12}$

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

020.

$x > 0$에서 정의된 함수 $f(x) = 2x\ln x + \int_1^e f(t)dt$에 대하여 $(e-2)f(e)$의 값은?20)

① $\frac{3e^2-8e-1}{3}$ ② $\frac{3e^2-8e-1}{2}$

③ $\frac{3e^2-8e}{2}$ ④ $\frac{3e^2-7e}{3}$

⑤ $\frac{3e^2-7e+1}{2}$

021.

모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\int_0^x f'(t)\cos t dt$를 만족시킬 때, $\int_{\pi}^{2\pi} f'(x)dx$의 값은?21)

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$

④ $3\ln 2$ ⑤ $2\ln 3$

022.

$x > 0$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(x) > 0$이고 $(x^2+1)f(x) - 6x = 6\int_1^x \{tf(t) - 1\}dt$를 만족시킨다. 이때 $f(3)$의 값은?22)

① 3 ② 15 ③ $\frac{75}{4}$

④ 25 ⑤ 75

✏ $g(x)=\int_a^x f(t)dt$이면,

개념8

① $g(a)=0$
② $g'(x)=f(x)$

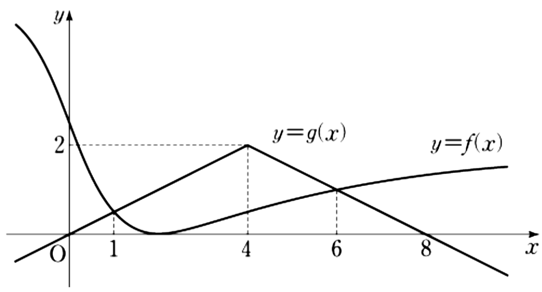
023.

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (t-a)e^{2t}dt$의 최솟값이 -2일 때, 함수 $y=e^x$의 그래프와 두 직선 $x=2a$, $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?23)

① 6　② 8　③ 10
④ 12　⑤ 14

024.

함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$의 그래프가 그림과 같다.



$0\le a\le 8$인 a에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값은?24)

① $14-5\ln 5$　② $15-5\ln 10$　③ $14-5\ln 5$
④ $16-5\ln 10$　⑤ $16-5\ln 5$

개념9

✔ 도함수의 넓이는 원함수의 y값(높이) 차이이다.

025.

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속일 때,
도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & (x \le 1) \\ \dfrac{1}{x} & (x > 1) \end{cases}$$

이다. $f(-1)=e+\dfrac{1}{e^2}$일 때, $f(e)$의 값은?[25)]

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
④ $e+1$ ⑤ $e+2$

026.

함수 $y=f(x)$가 모든 실수에서 연속이고, $x \neq 0$인 모든 x의 값에 대하여 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & (x > 0) \\ \cos x & (x < 0) \end{cases}$$

이다. $f(1)=4$일 때, 방정식 $f(x)=n$의 실근이 1개이기 위한 자연수 n의 최솟값을 구하여라.[26)]

✏ 정적분으로 정의된 함수의 x축 :

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$이면 $g(a)=0$이다.

개념10

027.

x에 대한 방정식 $\int_\alpha^x (t^3-3t+1)dt=0$의 근이 3개가 되게 하는 실수 α의 개수는?27)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

028.

함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x \le 2)\\ 1 & (x>2)\end{cases}$와 실수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x (t^2-2t)f(t)dt$$

라고 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?28)

ㄱ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄴ. 방정식 $g(x)=g(0)$는 하나의 근을 가진다.
ㄷ. $a=-1$이면 방정식 $g(x)$의 모든 실근의 합은 1이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념11

✏ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$

$\Rightarrow$ 헷갈리면 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_0^1 f(a+(b-a)x)(b-a)dx$ 거쳐서

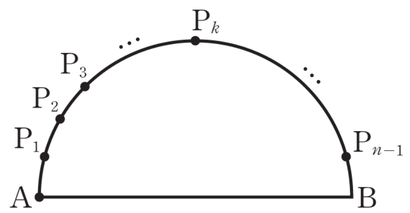
029.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$의 값은?29)

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

030.

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB를 n등분한 점을 각각 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이라 하자. 삼각형 ABP_k의 둘레의 길이를 l_k라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{l_k}{n}$의 값은?30)



① $\frac{4+\pi}{\pi}$ ② $\frac{4+2\pi}{\pi}$ ③ $\frac{4+4\pi}{\pi}$
④ $\frac{8+\pi}{\pi}$ ⑤ $\frac{8+2\pi}{\pi}$

개념12

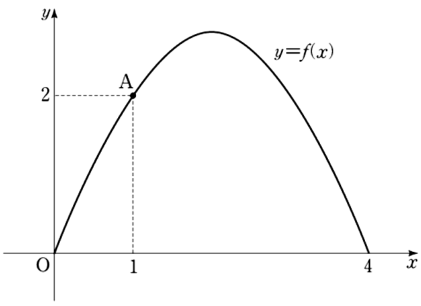
✔ 잘 적분하면 넓이가 된다. : 모르면 자살.

031.

닫힌구간 [0, 4]에서 정의된 함수

$$f(x) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$$

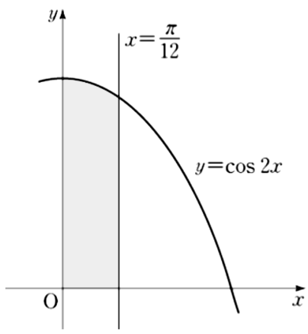
의 그래프가 그림과 같고, 직선 $y = g(x)$가 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지난다. 직선 $y = g(x)$가 x축에 평행할 때, 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = g(x)$에 의해 둘러싸인 부분의 넓이는?31)



① $\frac{16}{\pi} - 4$ ② $\frac{17}{\pi} - 4$ ③ $\frac{18}{\pi} - 4$
④ $\frac{16}{\pi} - 2$ ⑤ $\frac{17}{\pi} - 2$

032.

함수 $y = \cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x = \frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y = a$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은?32)



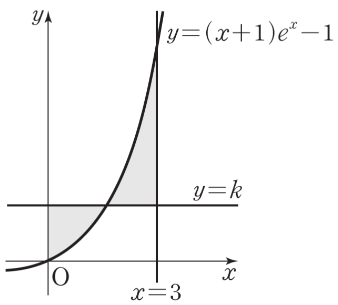
① $\frac{1}{2\pi}$ ② $\frac{1}{\pi}$ ③ $\frac{3}{2\pi}$
④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{2\pi}$

✔ 정적분의 값은 [부호를 가진] 넓이이다.

개념13

033.

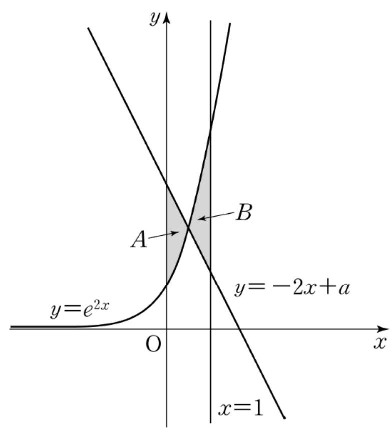
곡선 $y=(x+1)e^{x}-1$과 직선 $y=k$, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=(x+1)e^{x}-1$과 두 직선 $y=k$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은?[33]



① $e^{3}-2$　② $e^{3}-1$　③ e^{3}
④ $e^{3}+1$　⑤ $e^{3}+2$

034.

곡선 $y=e^{2x}$과 y축 및 직선 $y=-2x+a$로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=e^{2x}$과 두 직선 $y=-2x+a$, $x=1$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 a의 값은?[34]
(단, $1<a<e^{2}$)



① $\dfrac{e^{2}+1}{2}$　② $\dfrac{2e^{2}+1}{4}$　③ $\dfrac{e^{2}}{2}$
④ $\dfrac{2e^{2}-1}{4}$　⑤ $\dfrac{e^{2}-1}{2}$

✔ 대칭성과 적분 : 야 대칭.

개념14

035.

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=6$

$\int_{-1}^{1}(x+2)^2 f(x)dx$의 값을 구하여라.35)

036.

함수 $f(x)=\int_{-\sqrt{\pi}}^{x}\sin(t^2)dt$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?36)

ㄱ. $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다.
ㄴ. $f(x)$는 열린구간 $(-\sqrt{\pi},\ \sqrt{\pi})$에서 세 개의 변곡점을 갖는다.
ㄷ. $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} f(x)dx=f(0)$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

개념15

✏ $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b) - af(a)$$

✔ 역함수의 그래프

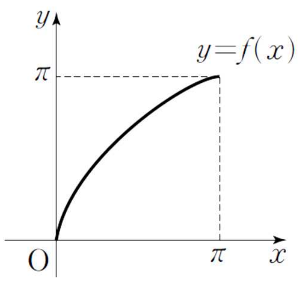
(1) $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 서로 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(2) $y=f(x)$와 $y=x$와의 교점은 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이기도 하다.

(3) $y=f(x)$의 그래프를 y축을 정의역으로 보면 $x=f^{-1}(y)$의 그래프를 볼 수 있다.

037.

그림은 구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=x+\sin x$의 그래프이다. 이 함수의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?37)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

038.

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
(나) $f(1)=2$, $f(2)=4$

$\int_{2}^{4} f^{-1}(x)dx=3$일 때, $\int_{1}^{2} \{f(x)-x\}dx$의 값은?38)

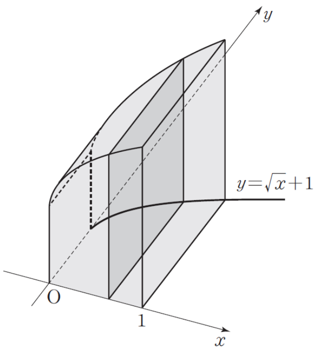
① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

✏ $x=a$에서 $x=b$ 사이에 존재하는 입체를 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 입체의 부피 V는 $V=\int_a^b S(x)dx$이다.

개념16

039.

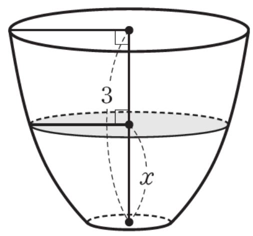
그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}+1$과 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?39)



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

040.

그림과 같이 평행한 두 원을 윗면과 밑면으로 하고 높이가 3인 항아리가 있다. 높이가 $x(0<x<3)$인 지점에서 윗면에 평행하게 자른 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{2\sin\frac{\pi x}{6}+1}$ 인 원일 때, 이 항아리의 부피는?40)



① $12-3\pi$ ② $12-\frac{\pi}{3}$ ③ 12
④ $12+\frac{\pi}{3}$ ⑤ $12+3\pi$

개념17

✏ $|v|=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$ 을 적분하면 이동한 거리이다.

✏ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 $x=b$까지 그리는 곡선의 길이는

$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$이다.

041.

좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가

$$x=\ln t,\quad y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

이다. 시각 $t=\frac{1}{e}$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는?41)

① $e-\frac{1}{e}$ ② $2\left(e-\frac{1}{e}\right)$ ③ $3\left(e-\frac{1}{e}\right)$
④ $4\left(e-\frac{1}{e}\right)$ ⑤ $5\left(e-\frac{1}{e}\right)$

042.

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=x\sqrt{x^2+2}$$

이다. $x=0$에서 $x=a$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이가 12가 되도록 하는 양수 a의 값은?42)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

043.

함숫값이 양수이고 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2=1$을 만족시킨다. $\int_0^4 f(x)dx=12$일 때, $x=0$에서 $x=4$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는?43)

① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

[적분법B2]

1) ①
2) ⑤
3) ②
4) ④
5) ①
6) ④
7) ⑤
8) ⑤
9) 90
10) ④
11) ⑤
12) ⑤
13) ③

14) ④
15) ②
16) ③
17) ⑤
18) 6
19) ③
20) ②
21) ⑤
22) ⑤
23) ②
24) ④
25) ⑤
26) 5
27) ③
28) ⑤
29) ⑤
30) ⑤
31) ①
32) ③
33) ②
34) ①
35) 24
36) ⑤

37) ④

38) ②

39) ④

40) ⑤

41) ①

42) ③

43) ②