원포인트 개념주입 B

적분법

✏ 치환적분법

: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$

✏ 치환정적분

: $\begin{cases} g(a)=\alpha \\ g(b)=\beta \end{cases}$ 이면 $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$

개념1

001.

다음 부정적분을 구하여라.1)

(1) $\int (2x+1)^3 dx$

(2) $\int xe^{x^2}dx$

(3) $\int \sin^3 x dx$

002.

$\int_e^{e^3} \frac{\ln x}{x}dx$ 의 값은?2)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

003.

함수 $f(x)$에 대하여

$f'(x) = x\sqrt{x^2+1}$

일 때, $f(1)-f(0)$의 값을 구하여라.3)

004.

함수 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 에 대하여

$F(x) = \int_0^x tf(x-t)dt \ (x \geq 0)$

일 때, $F'(a) = \ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.4)

✏ 부분적분법

: $\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$

개념2

※ 우변 부정적분에서 어느 함수가 적분되고 어느 함수가 미분되는지 잘 살핀다.

005.

다음 부정적분을 구하여라.5)

(1) $\int x\cos x dx$

(2) $\int \ln x dx$

(3) $\int (\ln x)^2 dx$

(4) $\int e^x \sin x dx$

006.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $(x-1)e^{2x}$이고 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}e$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하여라.6)

007.

정의역이 $\{x|x>-1\}$인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x^3)^2}$이고, 함수 $g(x)=x^2$일 때,

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx=\frac{1}{6}$$

이다. $f(1)$의 값은?7)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

008.

연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$$

이다. $f(1)=1$일 때, $\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx$의 값은?8)

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$

④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

✏ 도표적분법

: $\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \left(\int F(x)dx\right)g'(x) + \left(\iint F(x)dxdx\right)g''(x) - \cdots$

개념3

※ 개편하긴 하지만 생각보다 쓸 수 있는 상황이 많지 않다.

009.

다음 부정적분을 구하여라.9)

(1) $\int x^2 e^x\,dx$

(2) $\int x^2 \sin x\,dx$

(3) $\int x^2 e^{2x}\,dx$

(4) $\int x^2 \cos 2x dx$

010.

이계도함수 $f''(x)$가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$

(나) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=4$

이 때, $\int_1^2 xf''(x)dx$의 값을 구하여라.10)

011.

$x>0$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가

$f(x)+xf'(x)=(2x+3)e^x,\quad f(1)=3e$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?11)

① e^3 ② $\frac{5}{3}e^3$ ③ $\frac{7}{3}e^3$

④ $\frac{5}{2}e^3$ ⑤ $\frac{7}{2}e^3$

✏ 가끔 쓰이는 적분 방법

① 분수꼴 : 부분분수 분리

② 삼각함수 : 반각, 배각을 이용해 차수를 내림

③ 삼각치환 : $\sqrt{1-x^2}$이 있으면 $x=\sin\theta$로, $\dfrac{1}{1+x^2}$이 있으면 $x=\tan\theta$로 치환

개념4

012.

다음 부정적분을 구하여라.12)

(1) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-x-2}dx$

(2) $\displaystyle\int \tan x dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{xe^x+2}{x}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-1}dx$

(6) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}dx$

(7) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

(8) $\displaystyle\int x\cos^2 x dx$

013.

다음을 구하여라.13)

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

✏ $\begin{cases} g(\alpha)=a \\ g(\beta)=b \end{cases}$일 때, $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dx$ (제2치환정리)

$\Rightarrow$ x에 대한 적분을 t에 대한 적분으로 변형

① 1－1 대응관계 확인 ② dx와 dt간의 관계식 ③ 구간의 변화

개념5

014.

함수 $f(x)=x^3+x$에 대하여

$$\int_0^2 \frac{f^{-1}(x)}{f'(f^{-1}(x))}dx$$

의 값은?14)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

015.

역함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 두 번 미분가능하고,
$f''(x)$는 연속함수이다.
(나) $f(0)=0$, $f'(1)=f(1)=2$
(다) $\int_0^1 x^3 f''(x)dx=1$

$f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_0^2 \{g(x)\}^2 dx$의 값을 구하여라.15)

개념6

✏ 구분구적법 : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right\}$

※ 넓이로서의 정적분의 의미 : (부호를 가진) 넓이

016.

$\int_1^3 x^4 dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{ak}{n}\right)^4\cdot\frac{a}{n}$일 때, a의 값은?16)

① 4 ② 2 ③ 1

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

017.

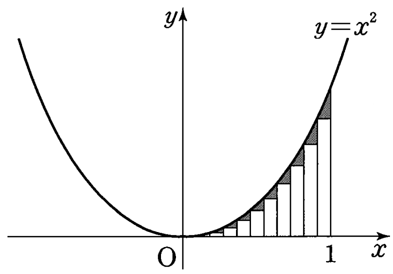
$\int_2^5 (x^2+1)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(2+\frac{ak}{n}\right)^2+1\right\}\cdot\frac{a}{n}$일 때, a의 값은?17)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

018.

그림은 곡선 $y=x^2$과 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분에 구간 $[0,\ 1]$을 10등분하여 직사각형을 내접시킨 것이다. 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.18)



✔ 정적분을 포함한 항등식
① 정적분 구간이 상수이면 정적분값을 상수취급해서 식에 다시 대입해 준다.
② 구간에 변수가 있으면
1) x에 적당한 값(정적분이 윗 끝과 아랫 끝이 같아지는 값)을 넣어본다.
2) 조심해서 잘 미분한다.

개념7

※ $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, $\frac{d}{dx}\int_a^x tf(t)dt = xf(x)$, $\frac{d}{dx}\int_a^x xf(t)dt = xf(x) + \int_a^x f(t)dt$

019.

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = 3x^2 - 4x\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 tf(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x)dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.19) (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

020.

연속함수 $f(x)$가 $f(x) = e^{x^2} + \int_0^1 tf(t)dt$를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)dx$의 값은?20)

① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$
④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

021.

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = e^x + ax + a$$

를 만족시킬 때, $f(\ln 2)$의 값은?21)
(단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ e
④ 3 ⑤ $2e$

022.

미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = x\ln x + 2ax + b$$

를 만족시킬 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?22) (단, $x>0$)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{7}{6}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

✏ $g(x)=\int_a^x f(t)dt$이면,

개념8

① $g(a)=0$
② $g'(x)=f(x)$

023.

함수 $f(x)=\int_0^x (1-t)e^t\,dt$ 의 최댓값을 구하여라.[23)]

024.

$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_\pi^x t\cos t dt$의 값은?[24)]

① $-\pi$ ② $-\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ π ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

025.

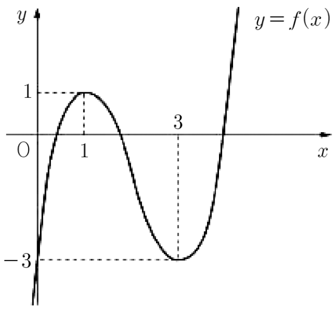
양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (a-t)e^t dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.[25)]

개념9

✔ 도함수의 넓이는 원함수의 y값(높이) 차이이다.

026.

삼차함수 $y=f(x)$가 극댓값 $f(1)=1$과 극솟값 $f(3)=-3$을 가지며 $f(0)=-3$이다. $\int_0^3 |f'(x)|dx$의 값은?26)



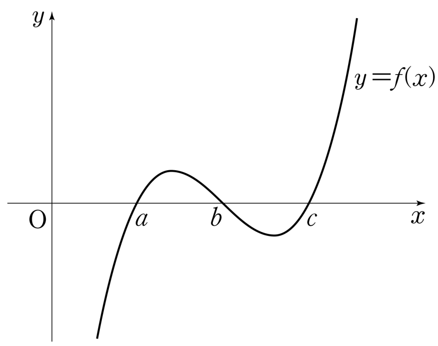
① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

027.

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f(x)$는

$$\int_a^b f(x)\,dx=3,\quad \int_a^c f(x)\,dx=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 옳은 것만을 다음 보기에서 있는 대로 고른 것은?27)



ㄱ. $F(b)=F(a)+3$
ㄴ. 점 $(c,\ F(c))$는 곡선 $y=F(x)$의 변곡점이다.
ㄷ. $-3<F(a)<0$이면 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념10

✏ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$

⇒ 헷갈리면 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_0^1 f(a+(b-a)x)(b-a)dx$ 거쳐서

028.

함수 $f(x)=\frac{1}{x}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$의 값은?28)

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$
④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

029.

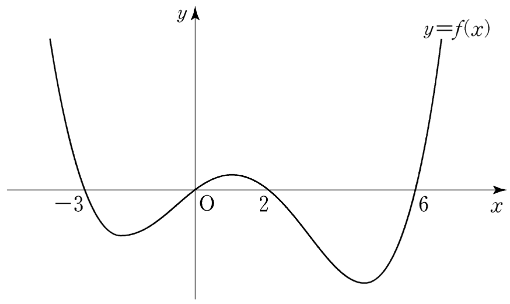
$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4\frac{1}{2n}=a\int_1^b x^4dx$ 일 때,
ab 의 값을 구하여라.29)

030.

사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(m+\frac{k}{n}\right)<0$$

을 만족시키는 정수 m의 개수는?30)



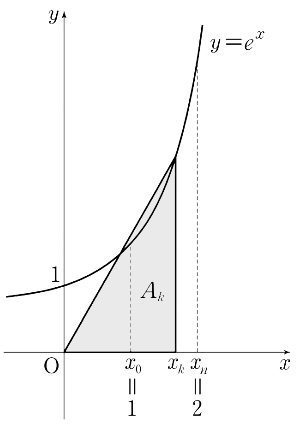
① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

개념11

✔ 무한급수 표현이 살짝 어려운 경우 : 더 노력해서 잘 표현한다.

031.

함수 $f(x)=e^x$이 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[1,\ 2]$를 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=2$라 하자. 세 점 $(0,\ 0)$, $(x_k,\ 0)$, $(x_k,\ f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $A_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$의 값은?[31)]

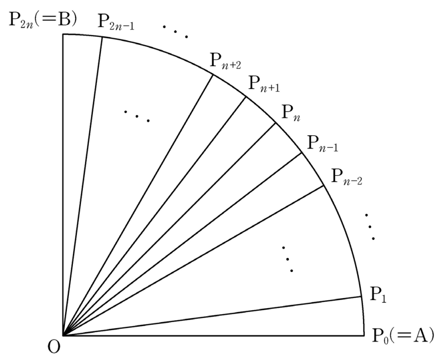


① $\frac{1}{2}e^2-e$　② $\frac{1}{2}(e^2-e)$　③ $\frac{1}{2}e^2$

④ e^2-e　⑤ $e^2-\frac{1}{2}e$

032.

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 자연수 n에 대하여 호 AB를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $\mathrm{P}_0(=\mathrm{A}),\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{2n-1},\ \mathrm{P}_{2n}(=\mathrm{B})$라 하자. 주어진 자연수 n에 대하여 $S_k\ (1\le k\le n)$을 삼각형 $\mathrm{OP}_{n-k}\mathrm{P}_{n+k}$의 넓이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은?[32)]



① $\frac{1}{\pi}$　② $\frac{13}{12\pi}$　③ $\frac{7}{6\pi}$

④ $\frac{5}{4\pi}$　⑤ $\frac{4}{3\pi}$

개념12

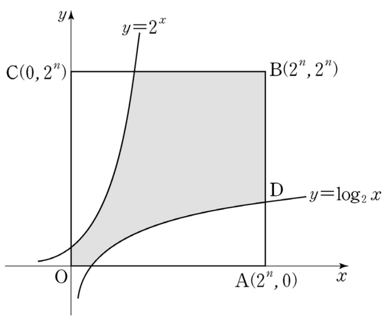
✔ 잘 적분하면 넓이가 된다. : 모르면..?

033.

자연수 n에 대하여 좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(2^n,\ 0),\ \mathrm{B}(2^n,\ 2^n),\ \mathrm{C}(0,\ 2^n)$$

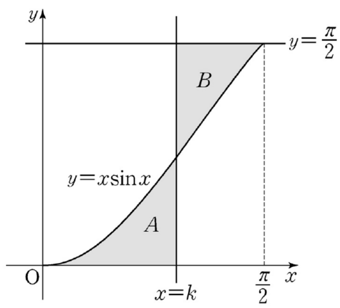
인 정사각형 OABC는 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 의하여 세 부분으로 나뉜다. $n=3$일 때 이 세 부분 중 색칠된 부분의 넓이는?33)



① $14+\dfrac{12}{\ln 2}$ ② $16+\dfrac{14}{\ln 2}$ ③ $18+\dfrac{16}{\ln 2}$
④ $20+\dfrac{18}{\ln 2}$ ⑤ $22+\dfrac{20}{\ln 2}$

034.

그림과 같이 곡선 $y=x\sin x\ \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$에 대하여 이 곡선과 x축, 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x=k$, 직선 $y=\dfrac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은?34) (단, $0 \le k \le \dfrac{\pi}{2}$)



① $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{\pi}$ ② $\dfrac{\pi}{4}$ ③ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{\pi}$
④ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{\pi}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{\pi}$

✔ 정적분의 값은 [부호를 가진] 넓이이다.

개념13

035.

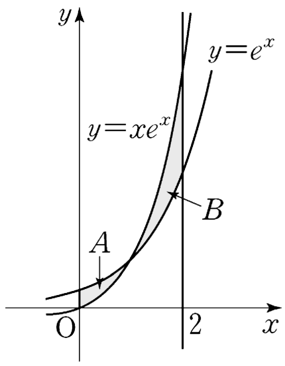
함수 $y=e^{x}$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=ax(0<a<e)$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은?35)

① $e-\frac{1}{3}$ ② $e-\frac{1}{2}$ ③ $e-1$

④ $e-\frac{4}{3}$ ⑤ $e-\frac{3}{2}$

036.

아래와 같은 그림에서 두 곡선 $y=e^{x}$, $y=xe^{x}$과 y축으로 둘러싸인 부분 A의 넓이를 a, 두 곡선 $y=e^{x}$, $y=xe^{x}$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분 B의 넓이를 b라 할 때, $b-a$의 값은?36)



① $\frac{3}{2}$ ② $e-1$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ e

✏ $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때,

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

개념14

✔ 역함수의 그래프

(1) $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 서로 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(2) $y=f(x)$와 $y=x$와의 교점은 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이기도 하다.

(3) $y=f(x)$의 그래프를 y축을 정의역으로 보면 $x=f^{-1}(y)$의 그래프를 볼 수 있다.

037.

함수 $f(x)=x^3+x+2$의 역함수가 $g(x)$일 때,

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_2^4 g(x)dx$$

의 값을 구하여라.37)

038.

함수 $f(x)=x^3+2$의 역함수가 $g(x)$일 때,

$$\int_2^{10} g(x)dx$$

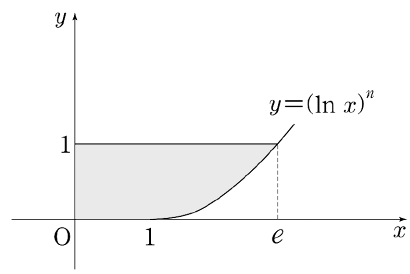
의 값을 구하여라.38)

039.

2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선

$y=(\ln x)^n \ (x\geq 1)$

과 x축, y축 및 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?39)



ㄱ. $1\leq x\leq e$일 때, $(\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1}$이다.

ㄴ. $S_n < S_{n+1}$

ㄷ. 함수 $f(x)=(\ln x)^n\,(x\geq 1)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $S_n=\int_0^1 g(x)dx$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

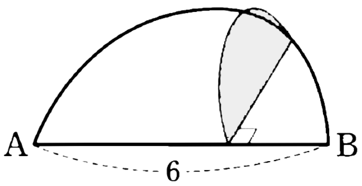
✏ $x=a$에서 $x=b$ 사이에 존재하는 입체를 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 입체의 부피 V는 $V=\int_a^b S(x)dx$이다.

※ 회전체의 경우에는 교육과정에서 제외되었으나, 기출도 많고 부피개념이 잡히면 부담되는 내용도 아니니 정리해두도록 하자.

개념15

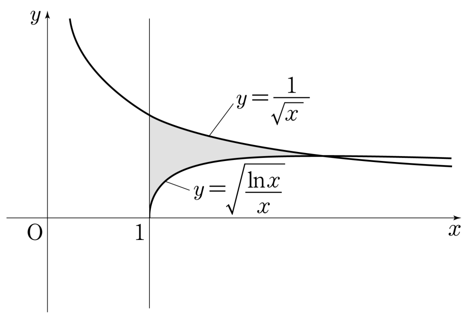
040.

지름의 길이가 6인 반원을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 반원의 지름 AB에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면이 반원일 때, 이 입체도형의 부피는 $\frac{k}{2}\pi$이다. 이때 상수 k의 값을 구하여라.40)



041.

두 곡선 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{\frac{\ln x}{x}}$와 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는 V이다. $\frac{100V}{\pi}$의 값을 구하여라.41)



✏ 속력 $|v|=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$을 적분하면 이동한 거리이다.
✏ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 $x=b$까지 그리는 곡선의 길이는
$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$이다.

개념16

042.

$x=0$에서 $x=6$까지 곡선 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$의 길이를 구하여라.42)

043.

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고

$f(0)=0,\ f(1)=\sqrt{3}$

을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

의 최솟값은?43)

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $1+\sqrt{2}$
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

‘이게 환자분 척추예요.’
‘뭐야, 시발 돌려줘요.’

[적분법B]

1) (1) $\frac{1}{8}(2x+1)^4+C$

(2) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

(3) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

2) ④

3) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

4) 9

5) (1) $x\sin x+\cos x+C$

(2) $x\ln x-x+C$

(3) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

(4) $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$

6) $-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}e$

7) ④

8) ①

9) (1) $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

(2) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

(3) $\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C$

(4) $\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

10) 4

11) ③

12) (1) $\ln|x^2-x-2|+C$

(2) $-\ln|\cos x|+C$

(3) $e^x+2\ln|x|+C$

(4) $\ln|x|-\ln|x+1|+C$

(5) $2\ln|x-1|-\ln|x+1|+C$

(6) $\frac{1}{2}x-\frac{\sin x}{2}+C$

(7) $\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}+C$

(8) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$

13) (1) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$

(2) $\frac{\pi}{3}$

(3) $\ln(\sqrt{2}+1)$

(4) $\frac{\pi}{6}$

14) ①

15) $\frac{1}{3}$

16) ②

17) ③

18) $\frac{29}{600}$

19) 49

20) ④

21) ①

22) ④

23) $e-2$

24) ①

25) 96

26) ③

27) ③

28) ②

29) $\frac{3}{4}$

30) ⑤

31) ③

32) ①

33) ②

34) ③

35) ③

36) ③

37) 4

38) 12

39) ⑤

40) 9

41) 50

42) 78

43) ②