

[여러 가지 적분법]

B32 | 초월함수의 부정적분

개념1 x^a 의 적분

$$\textcircled{1} \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1)$$

$$\textcircled{2} \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

개념2 삼각함수의 적분

$$\textcircled{1} \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\textcircled{2} \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\textcircled{3} \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\textcircled{4} \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\textcircled{5} \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\textcircled{6} \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

개념3 지수함수의 적분

$$\textcircled{1} \int e^x dx = e^x + C$$

$$\textcircled{2} \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

예제1 다음 부정적분을 하여라.

$$(1) \int (x-1)(x^2+1) dx$$

$$(2) \int \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$(3) \int \frac{2x+3x^2}{x^3} dx$$

$$(4) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(5) \int (4\sin x + \cos x) dx$$

$$(b) \int \sec^2 x dx$$

$$(7) \int (2^x + 3^x) dx$$

$$(8) \int \frac{\sin^2 x + 3}{\sin^2 x} dx$$

B32E1 | 미분방정식

예제1 다음을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

(1) $f(x) = f'(x), f(0) = 1$

(2) $f(x) + f'(x) = x, f(1) = 0$

(3) $f(x)f'(x) = e^x, f(0) = 2$

(4) $\{f(x)\}^2 f'(x) = e^{3x} - 2e^{2x} + e^x, f(0) = 0$

(5) $f(x) = xf'(x) - x^2 e^x$ (단, $x > 0$), $f(1) = e$

B33 | 치환적분법

개념1 $x = g(t)$ 이면 $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$

증명 양변의 부정적분을 생각해보자.

예제1 다음 부정적분을 하여라.

(1) $\int (4x-1)^3 dx$

(2) $\int \cos(2x-1) dx$

(3) $\int \frac{1}{2x+1} dx$

(4) $\int 2x(x^2+1)^2 dx$

(5) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(6) $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$

(7) $\int \sin^3 x \cos x dx$

(8) $\int \csc x dx$

(9) $\int \tan x dx$

B33E1 | 유리식의 적분

개념1 $\frac{(\text{다항식})}{(\text{다항식})}$ 을 적분하는 방법

① 분모의 차수보다 분자의 차수가 크면 나눠서 분자의 차수를 낮춘다.

② $\frac{(\text{상수})}{(\text{일차식})}$ 이 적분이 가능하므로 부분분수로 잘 쪼개본다.

예제1 다음 부정적분을 하여라.

(1) $\int \frac{1}{x(x+1)} dx$

(2) $\int \frac{1}{(x-2)(x-1)} dx$

(3) $\int \frac{x+3}{x^2-1} dx$

(4) $\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2} dx$

(5) $\int \frac{x^2-1}{2x} dx$

(6) $\int \frac{2x-1}{x^2-x-2} dx$

B34 | 부분적분법

개념1 $\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$

※ 부분적분의 방향을 잡을 때는 결과(우변)의 부정적분이

적분이 되는 형태인지를 생각해 보아야 한다.

예제1 다음 부정적분을 하여라.

(1) $\int xe^x dx$

(2) $\int x \cos x dx$

(3) $\int x^2 e^x dx$

(4) $\int x^2 \sin x dx$

예제2 다음 부정적분을 하여라.

$$(1) \int \ln x dx$$

$$(2) \int x \ln x dx$$

$$(3) \int e^x \sin x dx$$

$$(4) \int e^{2x} \cos x dx$$

※ 로그가 나오면 로그쪽이 미분되는 부분적분을 때린다.

※ 삼각함수와 지수함수의 곱이면 부분적분을 두 번 시행한 후 넘겨서 정리한다.

※ 부분적분에서의 적분은 적분상수를 자유롭게 택할 수 있다.

eg) $\int x \ln(x+1) dx$

B34E1 | 도표적분법

개념1 $\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - f'(x)\left(\int G(x)dx\right) + f''(x)\left(\iint G(x)dx dx\right) - \dots$

※ 간편하지만 로그함수가 나오거나, 삼각함수와 지수함수의 곱은 처리가 안 된다.

예제1 다음 부정적분을 하여라.

$$(1) \int x^2 \sin x dx$$

$$(2) \int (ax^2 + bx + c)e^x dx$$

$$(3) \int (ax^2 + bx + c)e^{-x} dx$$

[정적분의 활용]

B35 | 구분구적법

개념1 $y=f(x)$ 와 ($f(x) > 0$) $x=a$, $x=b$, x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

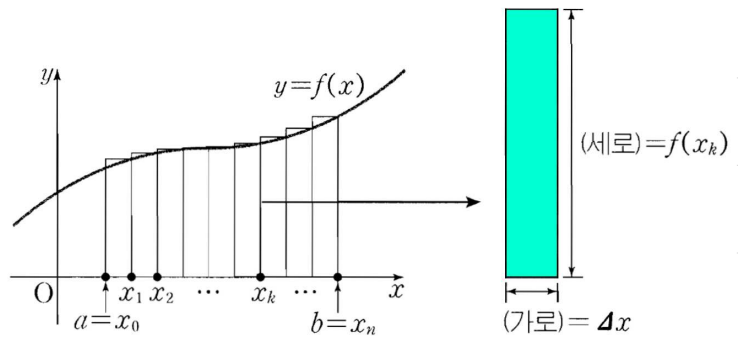
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \text{로 나타낸다. } (x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \Delta x = \frac{b-a}{n})$$

✓ 구분구적법의 아이디어

① k 번째 사각형의 넓이

② $\sum_{k=1}^n$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty}$



예제1 다음을 구분구적법을 이용하여 구하여라.

(1) $y=x^2$ 의 그래프와 $x=1$, x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이

(2) $y=-x^2+2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이

(3) $y=2x$ 와 $x=1$, $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이

B35E1 | 부피에 대한 구분구적법

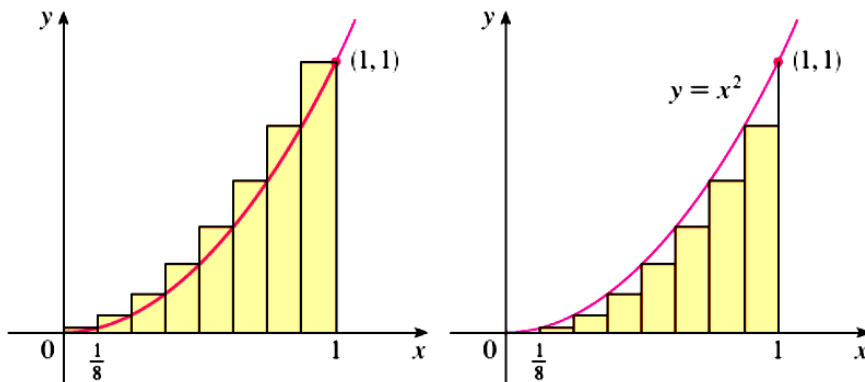
예제1 밑면의 반지름의 길이가 r 이고 높이가 h 인 원뿔의 부피가

$\frac{1}{3}\pi r^2 h$ 임을 구분구적법으로 보여라.

예제2 반지름의 길이가 r 인 구의 부피가 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 임을 구분구적법으로 보여라.

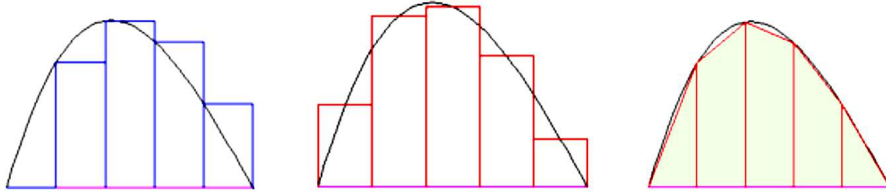
B35E2 | 리만합

개념1 오른쪽합 $\text{RHSS} = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$ 과 왼쪽합 $\text{LHSS} = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x$



- ① 적분값으로 수렴한다.
- ② 증가함수이면 $\text{LHSS} < (\text{적분값}) < \text{RHSS}$
- ③ 일반적으로 크기비교는 불가능하다.
- ④ $\text{RHSS} - \text{LHSS}$ 을 하면 처음과 마지막 사각형의 차이가 나온다.

개념2 사다리꼴합 : $TS = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta x$



① TS는 적분값으로 수렴한다.

② $TS = \frac{LHSS + RHSS}{2}$

③ 곡선의 볼록성에 따라 적분값과의 비교가 가능하다.

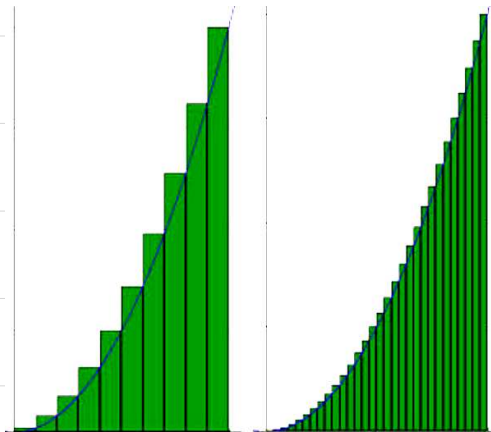
※ 가운데 그림은 중간점합 $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \Delta x$ 이라고 잘 안 나오는 거야..

개념3 n 등분과 $2n$ 등분

※ $\sum_{k=1}^n f(x_{2k})(2\Delta x)$ 와 $\sum_{k=1}^{2n} f(x_k)\Delta x$

① (대체로) 적분값에 가까워짐

② 증/감, R/H에 따라 크기비교 가능



B36 | 정적분의 기본정리

개념1 $F'(x) = f(x)$ 일 때, $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ 이다.

예제1 다음을 구하여라.

$$(1) \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2} dx$$

$$(2) \int_0^1 3^{2x+1} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos x) dx$$

$$(4) \int_{-1}^2 \frac{1}{x^2 - x - 6} dx$$

B37 | 정적분의 연산

개념1 정적분의 성질

$$\textcircled{1} \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

예제1 다음을 구하여라.

$$(1) \int_0^{\pi} |\sin 2x| dx$$

$$(2) \int_0^{\ln 3} \frac{1}{1-e^x} dx + \int_{\ln 3}^0 \frac{e^{3t}}{1-e^t} dt$$

B38 | 정적분의 치환적분

개념1 $\begin{cases} g(a) = \alpha \\ g(b) = \beta \end{cases}$ 이면 $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$

예제1 다음을 구하여라.

(1) $\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1} dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$

(3) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

(4) $\int_{\ln 2}^1 \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$

예제2 함수 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^6} dt$ 에 대하여 상수 a 가 $f(a) = \frac{1}{2}$ 을 만족시킬 때,

$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6} dx$ 의 값을 구하여라.

예제3 함수 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 에 대하여 $F(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$ ($x \geq 0$)

일 때, $F'(a) = \ln 10$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하여라.

B38E1 | 삼각치환법

개념1 대충 $\begin{cases} \sqrt{a^2-x^2} \text{ 이 보이면 } x = a \sin \theta \\ a^2+x^2 \text{ 이 보이면 } x = a \tan \theta \end{cases}$ 로 치환해보자.

예제1 다음을 구하여라.

$$(1) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(2) \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(4) \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx$$

B38E2 | 매개변수치환

개념1 $\begin{cases} g(a) = \alpha \\ g(b) = \beta \end{cases}$ 이면 $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$

개념2 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \begin{cases} a = f(\alpha) \\ b = f(\beta) \end{cases}$ 일 때, $\int_a^b \phi(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(f(t), g(t))f'(t) dt$

※ 적분 인덱스가 어느 것에서 어느 것으로 바뀌는지에 주목한다.

예제1 함수 $f(x) = x^3 + x$ 에 대하여 $\int_0^2 \frac{f^{-1}(x)}{f'(f^{-1}(x))} dx$ 의 값을 구하여라.

예제2 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$ 내의 θ 에 대하여 $\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$ 로 주어진

점 (x, y) 가 그리는 곡선과 x 축으로 둘러싸인 넓이를 구하여라.

B39 | 정적분의 부분적분

개념1 $\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$

※ 부분적분을 시행할 때는 우변의 부정적분의 피적분함수에 신경 쓴다.

예제1 $\int_1^2 x^3 e^{x^2} dx = \frac{q}{p} e^4$ 일 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라.

예제2 정의역이 $\{x|x > -1\}$ 인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = \frac{1}{(1+x^3)^2}$ 이고,

함수 $g(x) = x^2$ 일 때, $\int_0^1 f(x)g'(x)dx = \frac{1}{6}$ 이다. $f(1)$ 의 값을 구하여라.

B40 | 정적분으로 정의된 함수

개념1 $\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$

$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt$ 를 x 에 대하여 미분하면 $f(x)$ 이다. 즉, $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

예제1 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $\int_0^x f(t)dt = e^x + ax + a$ 를

만족시킬 때, $f(\ln 2)$ 의 값을 구하여라.

예제2 양수 a 에 대하여 함수 $f(x) = \int_0^x (a-t)e^t dt$ 의 최댓값이 32이다.

곡선 $y = 3e^x$ 과 두 직선 $x = a$, $y = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

개념2 $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ 를 미분하면 $b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x))$ 이다.

※ 다음을 미분하여라.

(1) $\int_a^{2x} f(t)dt$ (2) $\int_a^x f(2t)dt$ (3) $\int_a^{2x} tf(t)dt$

예제3 함수 $F(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} \ln t dt$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 가질 때,

상수 a 의 값을 구하여라.

예제4 $x > 0$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_a^{2x} f(t)dt = \frac{1}{10}x^2 - \ln x$ 가

성립할 때, $\int_1^e f(t)dt$ 를 구하여라.

B40E1 | 정적분과 극한값

개념1 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = f(a)$

예제1 함수 $f(x) = \sin \pi x + \cos \pi x$ 일 때, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} f(t)dt$ 의 값을 구하여라.

예제2 함수 $f(x) = x + n$ 에 대하여 $a_n = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x tf(t)dt$ 일 때,

$\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값을 구하여라.

B40E2 | 정적분이 포함된 항등식

개념1 항등식에 $\int_a^b f(t)dt$ 가 있으면 $\int_a^b f(t)dt = k$ 라 놓고 "이 식을 쓴다."

개념2 항등식에 $\int_a^x f(t)dt$ 가 있으면

① $x = a$ 를 대입한다.

② 양변을 미분한다.

예제1 다음을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

$$(1) f(x) = \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$$

$$(2) f(x) = e^{-x} + \int_0^1 xf(t)dt$$

예제2 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_a^x f(t)dt = e^{2x} - 3e^x - 4$ 일 때, $f(a)$ 의 값을 구하여라.

예제3 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = e^{2x} + a \sin x + b$ 일 때,

상수 a, b 의 값과 $f(x)$ 를 구하여라.

B40E3 | 도함수의 넓이와 원함수의 차이

개념1 $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ 이면

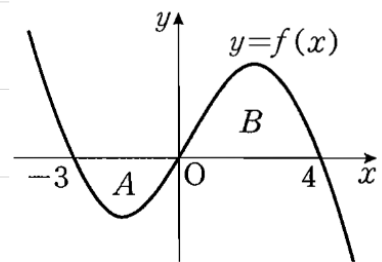
- ① $g(a) = 0$ ② $g'(x) = f(x)$

개념2 도함수의 넓이는 원함수의 차이이다. 즉, $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

예제1 그림과 같이 함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로

둘러싸인 두 부분 A, B 의 넓이가 각각 5, 10일 때,

$y = \int_0^x f(t)dt$ 의 그래프를 그려라.



B41 | 정적분과 무한급수

개념1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$

예제1 다음을 구하여라.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}} \right)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{2n+k}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \{(n+1)(n+2) \dots (2n)\}^{\frac{1}{n}} - \ln n \right)$

B42 | 정적분과 넓이

개념1 곡선 $y=f(x)$ 과 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로

둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)|dx$ 이다.

개념2 곡선 $x=g(y)$ 과 y 축 및 두 직선 $y=a, y=b$ 로

둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |g(y)|dy$ 이다.

※ 곡선 $C:f(x, y)=0$ 과 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로

둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |y|dx$ 이다.

예제1 다음을 구하여라.

(1) 곡선 $y=\frac{1}{x-1}$ 과 x 축 및 두 직선 $x=2, x=e^3+1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이

(2) 곡선 $y=e^x-1$ 과 x 축 및 직선 $x=-1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이

(3) 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 곡선 $y=x\sin x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이

(4) 곡선 $y^2=x+1$ 과 y 축 및 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이

B42E1 | 두 함수로 둘러싸인 도형의 넓이

개념1 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로

둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ 이다.

예제2 다음을 구하여라.

(1) 곡선 $y=\ln x$ 와 직선 $y=\frac{1}{e}x$, x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이

(2) 곡선 $x=y^2$ 과 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이

B42E2 | 다항함수와 넓이

개념1 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\left|\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|$ 이다.

※ 부분적분법을 이용하여 증명해보자.

※ 삼차함수가 x 축과 접할 때 : $\left|\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4\right|$

예제1 곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=m(x-1)+5$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가

최소일 때, 실수 m 의 값을 구하여라.

예제2 포물선 $y=x^2$ 위에서 두 점 $P(a, a^2)$, $Q(b, b^2)$ 이 조건

"선분 PQ와 포물선 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는 36"

을 만족하면서 움직이고 있다. $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{PQ}{a}$ 의 값을 구하여라.

개념2 꼭짓점에서 사각형 만들면 1:2 같은 것도 은근히 쓸만하다.

예제3 두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{12-2x}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인

도형의 넓이를 구하여라.

B42E3 | 역함수와 넓이

개념1 $\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a)$

※ 그래프에서 의미를 따져서 설명해보자.

※ $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx$ 에서 $f^{-1}(x)=y$ 로 치환하여 증명해보자.

예제1 함수 $f(x)=e^x + \frac{1}{2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$\int_0^1 f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{e+\frac{1}{2}} g(x)dx$ 의 값을 구하여라.

예제2 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x)=\tan x$ 의 역함수를

$g(x)$ 라 할 때, $\int_1^{\sqrt{3}} g(x)dx$ 의 값을 구하여라.

B43 | 입체도형의 부피

개념1 구간 $[a, b]$ 에서 입체를 x 축에 수직인 평면으로 자른

단면의 넓이가 $S(x)$ 일 때 입체의 부피는 $\int_a^b S(x)dx$ 이다.

예제1 곡선 $y = \frac{x^2}{4}$ 과 x 축 및 직선 $x=4$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고,

x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형인 입체의 부피를 구하여라.

예제2 직선 $x=t(0 \leq x \leq \pi)$ 를 포함하고 x 축에 수직인 평면으로

어떤 입체도형을 자를 때 생기는 단면은 한 변의 길이가

$|\cos t|$ 인 정삼각형이 된다. 이때 이 입체도형의 부피를 구하여라.

B43E1 | 회전체의 부피

개념1 구간 $[a, b]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 돌레로 회전시킬 때

생기는 회전체의 부피는 $\pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ 이다.

※ 그냥 해두세요.

예제1 곡선 $y=x^2$ 과 x 축, $x=1$ 로 둘러싸인 도형을 x 축의 돌레로

회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

예제2 곡선 $y = \ln x$ 와 x 축, y 축 및 직선 $y = 1$ 로 둘러싸인 도형을

y 축의 돌레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

예제3 원 $x^2 + y^2 = 4$ 을 직선 $x = 1$ 로 자른 두 영역 중 넓이가 작은 쪽을

x 축의 돌레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

B43E2 | 파푸스-굴딘의 법칙

개념1 x 축 위쪽에 존재하는 도형의 넓이가 S 이고

이 도형의 무게중심에서 x 축까지 이르는 거리가 l 일 때,

이 도형을 x 축의 돌레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는 $2\pi l \times S$ 이다.

예제1 부등식 $x^2 + (y - 3)^2 \leq 1$ 가 나타내는 영역을 x 축의 돌레로

회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

B44 | 속력과 이동거리

개념1 속력을 적분하면 점 P 가 이동한 거리가 된다. 즉,

$$L = \int_a^b |v(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

예제1 점 $P(\pi + \cos \pi t, \pi + \sin \pi t)$ 가 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 움직인 거리를 구하여라.

예제2 실수 t 에 대하여 점 $P(x, y)$ 가 $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=e^t+e^{-t} \end{cases}$ 를 만족시킬 때,

$0 \leq t \leq 2$ 에서 점 P 가 움직인 거리를 구하여라.

B45 | 곡선의 길이

개념1 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=a$ 에서 $x=b$ 까지

그리는 곡선의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2} dt$ 이다.

※ 곡선 위를 움직이는 점 P 를 $P(t, f(t))$ 라 잡고 움직인 거리를 구한 결과이다.

※ 구분구적에 의한 방법으로 도출할 수 있다.

※ P 의 자취가 같다면 점이 움직인 거리는 속도의 영향을 받지 않는다.

일단 대충 $P(x(t), y(t))$ 와 $Q(x(s(t)), y(s(t)))$ 로 확인 해보자.

예제1 다음을 구하여라.

(1) $0 \leq x \leq \ln 2$ 에서 곡선 $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$ 의 길이

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 에서 곡선 $y = \ln(\cos x)$ 의 길이