원포인트 개념주입 C

미분법

개념1

✔ 부정형일 듯 말 듯한 지수함수의 극한은 대충 밑이 큰 놈 중심으로

001.

다음 극한값을 구하여라.1)

(1) $\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{x}$

(2) $\lim_{x\to\infty}(2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(5^{x+1}-3^{x+2})^{\frac{1}{x}}$

(4) $\lim_{x\to -\infty}(2^x x)$

(5) $\lim_{x\to 0+}(x\log x)$

(6) $\lim_{x\to 0+}(2^{\frac{1}{x}}\log x)$

(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log_3 x+1}{\log_2 x}$

(8) $\lim_{x\to 0+}\frac{\log_3 x+1}{\log_5 x}$

(9) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log_3(x+3)}{\log_2(3x)}$

002.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to0}g(x)=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

이 성립할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?[2)]

ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{\tan f(x)}{\tan g(x)}=1$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}=1$

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{\ln|f(x)|}{\ln|g(x)|}=1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

003.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)}=2$일 때, $\lim_{x\to a}\frac{\log g(x)}{\log f(x)}$의 값을 구하여라.[3)]

개념2

✔ 오일러 수 : $\lim_{x\to a} f(x)=0$일 때, $\lim_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$

✔ $\lim_{x\to a} f(x)=0$일 때, $\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=1$, $\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+f(x))}{x}=1$

004.

다음 극한값을 구하여라.4)

(1) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}$

(2) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$

(3) $\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{x-2}}$

(4) $\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{2x}$

(5) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

(6) $\lim_{x\to \infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right\}^{x}$

(7) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{e^{2x}-1}}$

(8) $\lim_{x\to \infty}\left(\cos\frac{2}{x}\right)^{x^2}$

(9) $\lim_{n\to \infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{2n}$

005.

다음 극한값을 구하여라.[5)]

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{(a+12)^x-a^x}{x}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2^{-x}}{x}$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-e^{x-1}}{x-1}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$

006.

다음 극한값을 구하여라.[6)]

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{(\ln 9)^h-(\ln 3)^h}{h}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+\ln(1-3x)}{x^2}$

(4) $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}$ (단, a, b는 양수)

(6) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x^2}{\ln(1+\ln x)}$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}}{4}$

개념3

✏ $\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=0$

✏ $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\dfrac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha\,\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

✏ $\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\cos4\alpha\cdot\cdots\cdot\cos2^{n-1}\alpha=\dfrac{\sin(2^n\alpha)}{2^n\sin\alpha}$

007.

다음 식의 값을 구하여라.[7] (귀찮고 안 중요하니까 심심할 때 풀어라.)

(1) $\cos40^\circ\cos80^\circ\cos160^\circ$

(2) $\sin10^\circ+\sin50^\circ-\sin70^\circ$

(3) $\cos^2 10^\circ+\cos^2 50^\circ+\cos^2 70^\circ$

(4) $\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ$

(5) $\sin10^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ$

(6) $\sin40^\circ\cos70^\circ\sin80^\circ$

(7) $\sin x+\sin\left(\frac{2}{3}\pi+x\right)+\sin\left(\frac{4}{3}\pi+x\right)$

(8) $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi+x\right)+\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)$

008.

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^{10}}\sin\frac{x}{2^{10}}$$

일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?[8)]

① $\frac{1}{2^9}$ ② $\frac{1}{2^{10}}$ ③ $\frac{1}{2^{11}}$

④ $\frac{1}{2^{12}}$ ⑤ $\frac{1}{2^{13}}$

009.

임의의 실수 θ에 대하여

$$\sum_{k=1}^{50}\cos(2k\theta)=\frac{\sin a\theta-\sin b\theta}{2\sin\theta}$$

를 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.[9)]

개념4

✔ 삼각함수의 크기 비교 : 산술/기하평균하고, 젠센..?
⇒ 중요한 문제는 아니니까 그냥 이런 것도 있구나 정도로 해두자.

010.

$0<\alpha<\beta<\pi$일 때, 세 수

$$A=\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$B=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2},$$

$$C=\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}$$

의 대소 관계가 옳은 것은?[10)]

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

011.

삼각형 ABC의 세 각을 A, B, C라 할 때, 식

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

의 최댓값은 M이다. $80M$의 값을 구하여라.[11]

012.

$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y < \frac{\pi}{4}$에서

$$A = \frac{1}{2}(\tan x + \tan y),$$
$$B = \sqrt{\tan x \tan y},$$
$$C = \tan\frac{x+y}{2}$$

라 할 때, A, B, C의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?[12]

① $A \le B \le C$ ② $A \le C \le B$ ③ $B \le A \le C$

④ $B \le C \le A$ ⑤ $C \le A \le B$

개념5

✏ $\sin x + \cos x = t$로 치환하는 문제

$\Rightarrow$ $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\alpha)$에서 t의 범위를 구한다.

$\Rightarrow$ $\sin x \cos x$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

$\Rightarrow$ $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\tan 2x$ 등도 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

013.

실수 x에 대하여 $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$일 때, $\tan 2x$의 값은?13)

① $\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ② $\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$ ③ $\pm\frac{3\sqrt{6}}{6}$

④ $\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\pm\frac{3}{2}$

014.

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x) = (\sin x + 1)(\cos x + 1)$의 최댓값은?[14)]

① $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ ③ $1+\sqrt{2}$

④ $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

015.

함수 $f(x) = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 - \sin x\cos x + 2\sin^2\dfrac{x}{2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하여라.[15)]

① $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$

④ $1+\sqrt{2}$ ⑤ 1

✔ 삼각함수의 극한 : 적당히 잘

개념6

016.

다음 극한값을 구하여라.16)

(1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan x$

(2) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sin \pi x}$

(3) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sec\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}}{x}$

(4) $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{2a}{x+a}$ (단, a는 상수)

(5) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

(6) $\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin\theta \tan\theta + \sin 2\theta \tan 2\theta}{\theta^2}\right)$

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{\cos x - \cos 2x}$

(8) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(a+x) - \sin^2 a}{x}$

(9) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x(\cos 4x - 1)}{2x^3}$

(10) $\lim_{x \to 2} \frac{\sin\left(\cos \frac{\pi}{4} x\right)}{x-2}$

(11) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$

(12) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}$

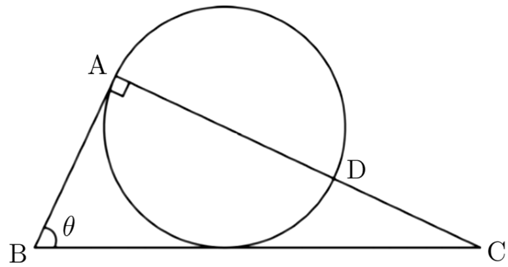
(13) $\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

(14) $\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{\sin^2 x}$

(15) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

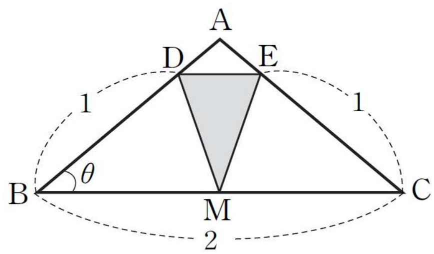
017.

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=1$, $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{B}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 선분 AD를 지름으로 하는 원이 선분 BC와 접할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta^3}=k$라 하자. $100k$의 값을 구하여라.17)



018.

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC의 중점을 M이라 하고, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CE}}=1$을 만족시키는 두 점 D, E를 각각 선분 AB와 선분 AC 위에 잡는다.



$\angle\mathrm{ABM}=\theta$라 할 때, 삼각형 MED의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?18)

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ 1

개념7

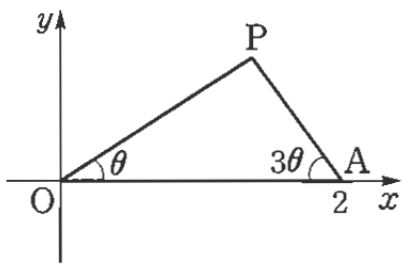
✔ 삼각형에 대한 적용 : 적당히 수선을 내려본다.

✏ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (사인법칙)

✏ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (코사인법칙)

019.

그림과 같이 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$에 대하여 점 P가 $\angle \mathrm{POA}=\theta$, $\angle \mathrm{PAO}=3\theta$를 만족시키며 제1사분면 위에 있을 때, $\lim_{\theta\to 0+}\overline{\mathrm{OP}}$의 값은?[19)]

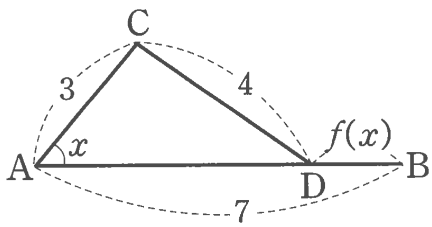


① $\frac{5}{4}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{7}{4}$

020.

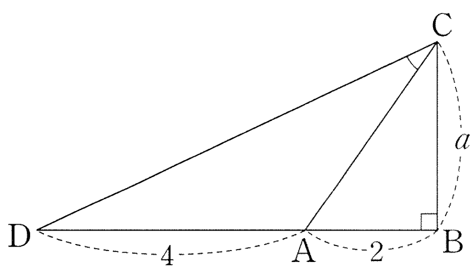
그림과 같이 한 평면 위의 네 점 A, B, C, D에 대하여 점 C는 평면 위를, 점 D는 선분 AB 위를 움직인다. $\overline{AB}=7$, $\overline{AC}=3$, $\overline{CD}=4$이고 $\angle CAB=x$, 선분 $\overline{BD}$의 길이를 $f(x)$라 할 때, $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x^2}$의 값은?20)



① $\frac{21}{8}$　② 3　③ $\frac{27}{8}$
④ $\frac{15}{4}$　⑤ $\frac{33}{8}$

021.

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=a$, $\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 연장선 위에 $\overline{AD}=4$ $\overline{BD}=6$인 점 D를 정한다. $\tan(\angle DCA)=\frac{4}{7}$를 만족하는 a의 값을 p, q라고 할 때, 곱 pq의 값을 구하여라.21)

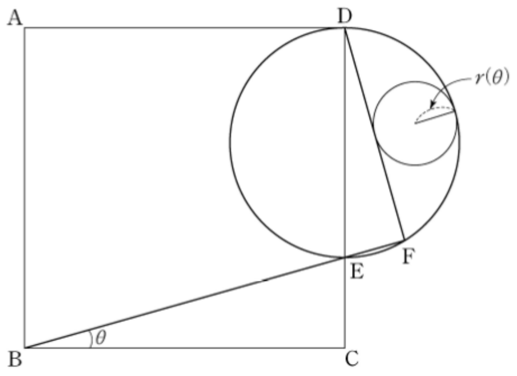


개념8

✔ 원이나 부채꼴 : 중심과 이어본다.

022.

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC = \theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$의 값은?[22] (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

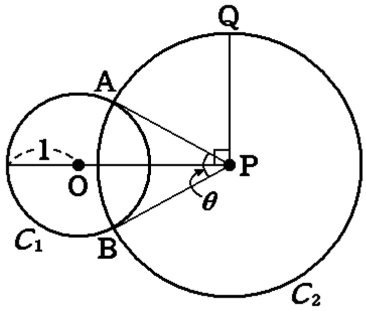


① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$

④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

023.

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 밖의 한 점 P에서 원 C_1에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하고, $\angle APB=\theta$라고 할 때, $\tan\theta=\frac{4}{3}$이다. 점 P를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원을 C_2라 하고, 점 P를 지나고 선분 OP에 수직인 직선이 원 C_2와 만나는 점을 Q라고 하자. 점 Q에서 원 C_1에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 α라고 할 때, $\tan\alpha$의 값은?[23]

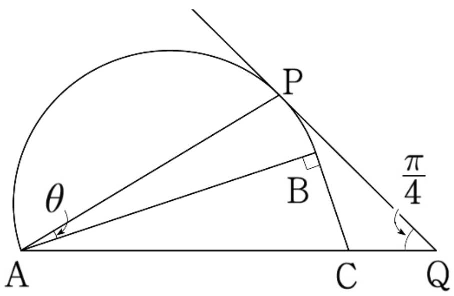


① $\frac{\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{7}$

④ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{7}$

024.

아래의 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에서의 접선과 AC의 연장선이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle PQA=\frac{\pi}{4}$이고 $\angle PAB=\theta$라 할 때, $60\tan 2\theta$의 값을 구하여라.[24] $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$

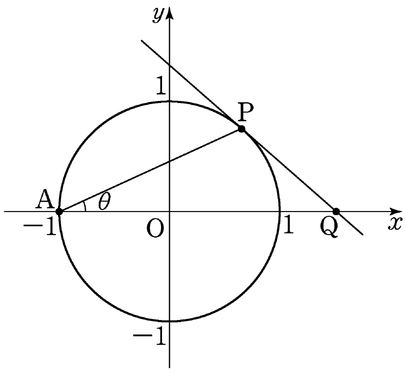


✔ $x^2+y^2=r^2$ 위의 점은 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$로 쓸 수 있다.
※ 타원 위를 움직이는 점은 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$로 쓸 수 있다.

개념9

025.

그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 A$(-1,\ 0)$과 원점 O에 대하여 $\angle \mathrm{PAO}=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$의 값은?[25)]



① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$

④ 1 ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

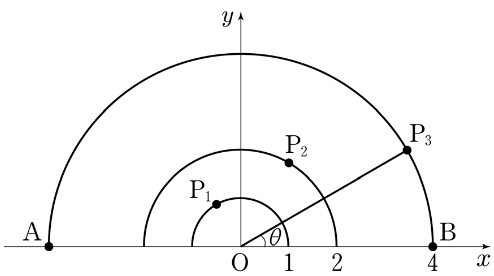
026.

타원 $4x^2+9y^2=36$ 위를 움직이는 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나서 만들어지는 삼각형의 넓이의 최솟값을 구하여라.[26)]

027.

아래의 그림과 같이 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1, 2, 4인 세 반원을 O_1, O_2, O_3이라 하자. 세 점 P_1, P_2, P_3은 선분 OB 위에서 동시에 출발하여 각각 세 반원 O_1, O_2, O_3 위를 같은 속력으로 시계 반대 방향으로 움직이고 있다. $\angle \mathrm{BOP}_3=\theta$라 하고 삼각형 ABP_1의 넓이를 S_1, 삼각형 ABP_2의 넓이를 S_2, 삼각형 ABP_3의 넓이를 S_3이라 하자.

$3S_3=2(S_1+S_2)$일 때, $\cos^3\theta$의 값은?[27)] (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$

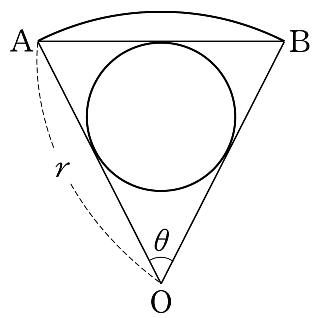
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

개념10

✔ 삼각함수의 근사 : 대충 풀면 개꿀.

028.

그림과 같이 중심각의 크기가 θ이고 반지름의 길이가 r인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴의 호 AB의 길이를 l_1, 삼각형 OAB에 내접하는 원의 둘레의 길이를 l_2라 할 때, $\lim_{\theta \to 0} \frac{l_2}{l_1}$의 값은?28)

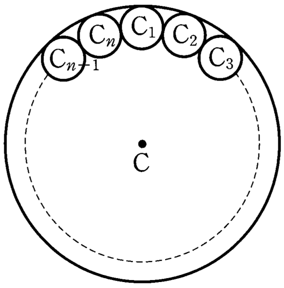


① $\frac{\pi}{4}$　　② $\frac{\pi}{2}$　　③ π

④ $\frac{3}{2}\pi$　　⑤ 2π

029.

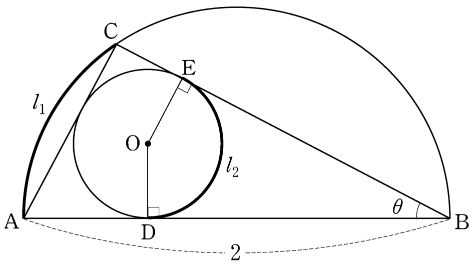
그림과 같이 반지름의 길이가 모두 r_n인 n개의 원 C_1, C_2, C_3, $\cdots$, C_n이 반지름의 길이가 1인 원 C에 내접하고 있고, C_1과 C_2, C_2와 C_3, $\cdots$, C_{n-1}과 C_n, C_n과 C_1은 각각 서로 외접할 때, $\lim_{n\to\infty} nr_n$의 값은?[29)]



① 1　② $\frac{\pi}{2}$　③ 2
④ π　⑤ 4

030.

그림과 같이 지름의 길이가 2이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 C가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 중심 O에서 선분 AB와 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. $\angle ABC = \theta$이고, 호 AC의 길이를 l_1, 호 DE의 길이를 l_2라 할 때, $\lim_{\theta\to 0}\frac{l_1}{l_2}$의 값은?[30)]



① 1　② $\frac{\pi}{4}$　③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{2}{\pi}$　⑤ $\frac{3}{\pi}$

개념11

✔ 음함수의 미적분 : 대충 잘 한다.

031.

x, y에 대하여 $\cos(x+y)+\cos(x-y)=1$이 성립할 때, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{4}$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은?31)

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ 0

④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 1

032.

함수 $y^2 = y + x^3$에 대하여 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$를 구하면?32) (단, $y \neq \dfrac{1}{2}$)

① $\dfrac{6x(2y-1)^2 - 18x^4}{(2y-1)^3}$ ② $\dfrac{3x(2y-1)^2 - 6x^4}{(2y-1)^3}$ ③ $\dfrac{3x(2y-1)^2 - 6x^4}{(2y-1)^2}$

④ $\dfrac{2x(2y-1)^2 - 8x^4}{(2y-1)^2}$ ⑤ $\dfrac{3x(2y-1)^2 - 6x^4}{(2y-1)^5}$

033.

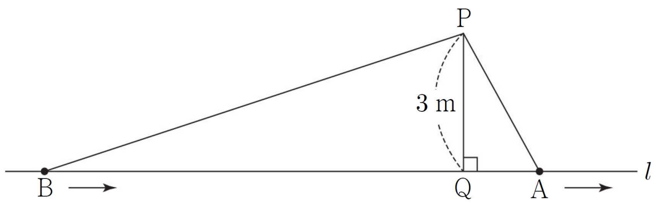
관계식 $\sin(xy) = x^2 - 1$를 만족하는 x, y에 대하여 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$를 구하여라.33)

개념12

✔ 음함수를 이용한 변화율 구하기 :
① 관계식을 세운다.
② 미분 때린다.
③ 문제 조건의 '~인 순간'을 대입한다.

034.

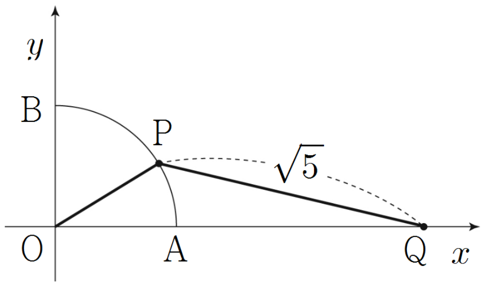
그림과 같이 두 정점 P, Q 사이의 거리가 3m이고, 점 Q를 지나고 선분 PQ에 수직인 직선을 l이라 하자. 점 A가 점 Q에서 출발하여 직선 l을 따라 초속 1 m의 일정한 속력으로 움직일 때, 직선 l 위의 점 B는 $\overline{AP}+\overline{PB}=20$(m)을 만족시키며 점 Q쪽으로 움직이고 있다. $\overline{AQ}=4$(m)가 되는 순간, 선분 BQ의 길이(m)의 시간(초)에 대한 변화율은?[34]



① $-\frac{\sqrt{6}}{3}$　② $-\frac{\sqrt{6}}{4}$　③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$　⑤ $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

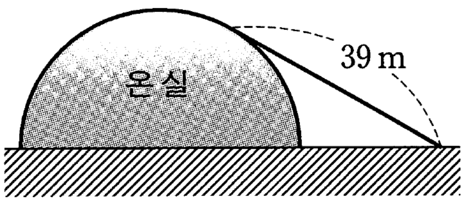
035.

좌표평면 위에 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB가 있다. 점 P가 점 A(1, 0)에서 출발하여 호 AB 위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직일 때, x축 위의 점 Q는 $\overline{PQ}=\sqrt{5}$를 만족시키면서 x축 위를 움직인다. $\angle POA=\frac{\pi}{4}$가 되는 순간, 점 Q의 x좌표의 시간(초)에 대한 변화율을 r라 할 때, $9r^2$의 값을 구하여라.35)



036.

반지름의 길이가 25m인 반구형의 온실 지붕에 길이가 39m인 사다리가 걸쳐있다. 땅에 있는 사다리의 끝이 2m/sec의 속도로 미끄러져 사다리의 끝과 온실까지의 거리가 31m가 될 때, 온실 지붕에 있는 사다리의 다른 한쪽 끝의 속도벡터를 구하여라.36)



✔ 미분계수의 정의 : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\Rightarrow$ 우미분계수 : $\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, 좌미분계수 : $\lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

개념13

※ 그리고 로피탈도 예의상 해두도록 하자.

037.

$f(1)=1$, $f'(1)=2$일 때, 다음 극한값을 구하여라.[37]

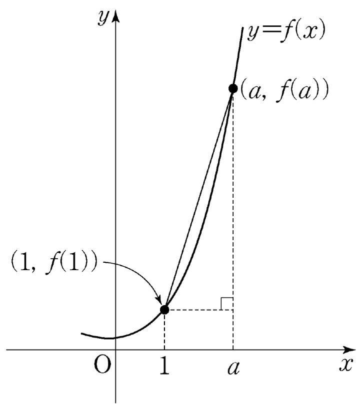
(1) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2)-f(2-x^2)}{x^2-1}$

(2) $\lim_{h \to 0} \frac{f(\cos h)-1}{h^2}$

(3) $\lim_{h \to 0} \frac{f(f(1+h))-1}{h}$

038.

양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a에 대하여 점 $(1,\ f(1))$과 점 $(a,\ f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1일 때, $f'(1)$의 값은?38)



① 1 ② $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

039.

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ \ y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은?39)

① -7 ② -3 ③ 1

④ 5 ⑤ 9

개념14

✔ 절댓값과 미분가능성의 연산 : 그냥 양 옆에서 정의되는 함수를 구해..

040.

함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하여라.40)

041.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고 $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하여라.[41)]

042.

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & (x<0) \\ x^2-1 & (0\le x<1) \\ \dfrac{2}{3}(x^3-1) & (x\ge 1) \end{cases}$$

일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[42)]

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄴ. $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념15

✔ 미분가능성과 그래프 :
① 뾰족하게 접히면 안 돼.
② 지나가려면 삼중근 가지면서..

043.

함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\,(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은?43)

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

044.

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하여라.[44]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

045.

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a\,|\,\text{함수 } |f(x)-t|\text{가 } x=a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하여라.[45]

개념16

✔ 법선 : 접점을 지나며 접선과 수직인 선
⇒ 점에서 최단거리 구할 때 쓰인당.

046.

좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(4,\ 4)$와 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값은?46)

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

047.

좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, $t(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 $(s,\ t)$가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\dfrac{2}{3}$일 때, $k=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.47) (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

048.

이차함수 $f(x)=x^2-ax$와 실수 t에 대하여 좌표평면에서 중심이 $(t,\ f(t))$이고 반지름의 길이가 r인 원이 있다. 이 원 위의 점 Q에 대하여 선분 OQ의 길이의 최솟값을 $g(t)$라 하자. $g(t)$가 두 점에서만 미분가능하지 않을 때, a^2+4r^2의 값을 구하여라.48) (단, a와 r은 양의 상수이고, O는 원점이다.)

개념17

✏ $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $f(a)=b$이면

① $g'(b)=\dfrac{1}{f(a)}$ ② $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$

049.

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자.

$$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$$

라 할 때, $h'(5)$의 값은?49)

① $\dfrac{79}{12}$ ② $\dfrac{85}{12}$ ③ $\dfrac{91}{12}$

④ $\dfrac{97}{12}$ ⑤ $\dfrac{103}{12}$

050.

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$가 $f(0)=0$, $f'(x)=1+\{f(x)\}^2$을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(1)\times g(1)$의 값은?[50)]

① $\frac{\pi}{10}$ ② $\frac{\pi}{8}$ ③ $\frac{\pi}{6}$

④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

051.

정의역이 $\left\{x \middle| 0 < x < \frac{\pi}{2a}\right\}$인 함수 $f(x)=\tan(ax)$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 좌표평면 상의 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g\left(\frac{1}{x}\right)$이 만나는 점에서 두 곡선에 각각 접하는 직선이 서로 수직일 때, $a=\frac{q}{p}\pi$이다. p^2+q^2의 값을 구하여라.[51)] (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

개념18

✏ 다항함수와 미분 :
① 인수를 가질 때 식 쓰는 방법
② 역함수와의 관계 : $y=x$와의 교점부터

052.

$x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$ 와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
(다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하여라.[52)]

053.

최고차항의 계수가 1이고, 실수 전체의 집합에서 역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $|f(2x)-g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$2f'(4)$의 값은?53)

① $\frac{53}{2}$ ② $\frac{55}{2}$ ③ 53
④ 54 ⑤ 55

054.

양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$$

에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?54)

ㄱ. 점 (2, 2)는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.
ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념19

✔ 기울기가 가지는 값의 범위 :
도함수 $f'(x)$를 새로 $g(x)$라 놓고 그래프를 그리자.

055.

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은?[55)]

① 43　② 46　③ 49

④ 52　⑤ 55

056.

음의 정수 t에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\{x^2-(t-4)x-2t+6\}e^{-x}-\frac{1}{2}mx^2$$

가 있다. 곡선 $y=f(x)$가 극소가 되는 x값을 2개 가지게 하는 실수 m이 존재할 때, $f(0)$의 최솟값은?56)

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

057.

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?57)

ㄱ. $f'(1)=\ln 4-1$
ㄴ. $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$
ㄷ. 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념20

✏ 삼차함수의 성질
⇒ 변곡점에 대한 대칭성하고 1 : 2정도는 알아 두자.

058.

양수 a에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선과 $(0,\ a)$에서 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구하여라.58)

059.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \le \frac{1}{3}$이다.

(나) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$

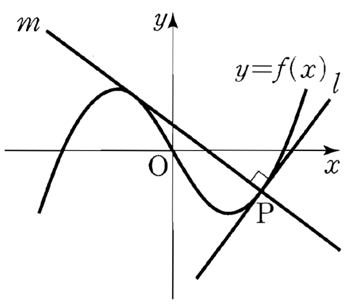
$f(1)$의 값은?[59]

① -11 ② -9 ③ -7

④ -5 ⑤ -3

060.

그림과 같이 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x$의 그래프 위의 점 중에서 원점이 아닌 한 점을 P라 하자. 점 P에서의 접선 l과 점 P에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 접선 m이 서로 수직이라 할 때, 점 P의 x좌표는 a이다. $3a^2$의 값을 구하여라.[60] (단, 점 P는 제4사분면 위의 점이다.)

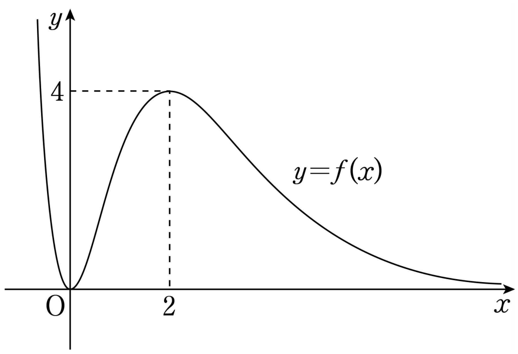


개념21

✔ 함수의 그래프
① 기본 : 증감, 볼록성 조사
② 합차나 곱 등 연산된 함수의 그래프
③ 합성함수의 그래프도 해 놓으면 좋당.

061.

그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는?61) (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

062.

함수 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}\,(-1<x<1)$에 대하여 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[62)]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 극값을 가진다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=0$에서 변곡점을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

063.

3 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x^n e^{-x}$$

일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[63)]

ㄱ. $f\left(\dfrac{n}{2}\right)=f'\left(\dfrac{n}{2}\right)$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념22

✔ 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 x에 대하여 $f(x) \le g(x)$일 때,
$f(a)=g(a)$이면 $f'(a)=g'(a)$이다.

✔ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \le g(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$이다.

064.

미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(2)+f'(3)$의 값은 얼마인가?64)

(가) 모든 양수 x에 대하여 $x \le f(x) \le 3x$를 만족한다.
(나) $f(2)=6$
(다) $f(3)=3$

065.

실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{2} f(x)dx$의 최솟값은?65)

(가) $f(0)=1$, $f'(0)=1$
(나) $0<a<b<2$이면 $f'(a) \le f'(b)$이다.
(다) 구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x)=e^{x}$이다.

① $\frac{1}{2}e-1$ ② $\frac{3}{2}e-1$ ③ $\frac{5}{2}e-1$
④ $\frac{7}{2}e-2$ ⑤ $\frac{9}{2}e-2$

066.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.
(나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$을 모두 지난다.
(다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k,\ 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_{3}^{6} f(x)dx=a$라 할 때, $6a$의 값을 구하여라.66)

개념23

✏ 사잇값의 정리, 평균값의 정리를 활용한 합답형 문항
⇒ 그래프의 개형을 그려서 근의 위치를 잡는다.

067.

함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[67)]

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$
ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.
ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

068.

함수 $f(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(f\circ f)(x)$$

로 정의할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?68)

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 개구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다.
ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 x가 개구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

069.

정의역이 $\{x|0\le x\le\pi\}$인 함수 $f(x)=2x\cos x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?69)

ㄱ. $f'(a)=0$이면 $\tan a=\dfrac{1}{a}$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$에 있다.
ㄷ. 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

✔ 평균값의 정리와 극한 : 가끔

✔ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)(0<\theta<1,\ h>0)$에서 $h\to 0$이면 $\theta\to\dfrac{1}{2}$이다. : 더 가끔

개념24

070.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$의 값은?70)

① $\dfrac{1}{e}$　② $\dfrac{2}{e}$　③ 1

④ e　⑤ $2e$

071.

실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 5$를 만족시킬 때, 자연수 n에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \{f(n+2) - f(n-2)\}$의 값은?71)

① 5　② 10　③ 15
④ 20　⑤ 25

072.

함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$에 대하여

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \ (0 < \theta < 1)$$

를 만족하는 θ를 $g(h)$라고 하자. 이때, $\lim_{h \to 0} g(h)$의 값을 구하여라.72) (단, $a > 0$, $h > 0$)

① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\dfrac{5}{2}$

개념25

✏ 점 P에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수는 점 P가
① 곡선 자체, ② 점근선, ③ 변곡점에서의 접선
으로 나뉘는 영역 중 어디에 있는지가 결정한다.
✏ 변곡점은 접선의 기울기가 극대/극소가 되는 점이다.

073.

실수 m에 대하여 점 $(0,\ a)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 불연속이 되는 m의 개수를 $g(a)$라 할 때, $g(a)$가 불연속이 되는 a값들의 합을 구하여라.73)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

074.

두 함수 $f(x)=xe^{-x+a}$와 $g(x)=-x+b$에 대하여 함수 $y=|f(x)-g(x)|$가 모든 실수 x에서 미분가능하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하여라.[74] (단, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$이다.)

075.

좌표평면에서 곡선 $f(x)=\frac{kx}{x^2+3}$ 위의 점 $(t,\ f(t))$와 점 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$을 연결하는 직선이 y축과 만나는 점의 y좌표를 $g(t)$라고 하자. $g(t)$가 극댓값을 갖지 않을 때, k의 최댓값은?[75]
(단, $t\neq-1$)

① $\frac{32}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ $\frac{34}{5}$
④ 7 ⑤ $\frac{36}{5}$

개념26

✏ 지수함수와 다항함수가 곱해진 함수 : 많이 나온다.

076.

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은?[76)]

① $\frac{1}{e}$　② $\frac{1}{\sqrt{e}}$　③ $\frac{e}{2}$

④ $\sqrt{e}$　⑤ e

077.

양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수

$$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
(나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하여라.77)

078.

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인
k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하여라.78)

개념27

✔ 조건에 맞는 그래프의 결정 : 잘 결정한다.

079.

정의역이 $\{x|0 \leq x \leq 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은 $p+\frac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.79) (단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

(가) $f(0)=1$이고 $f(8) \leq 100$이다.
(나) $0 \leq k \leq 7$인 각각의 정수 k에 대하여

$$f(k+t)=f(k) \quad (0<t \leq 1)$$

또는

$$f(k+t)=2^t \times f(k) \quad (0<t \leq 1)$$

이다.
(다) 열린 구간 $(0,\ 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

080.

정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$이고, 다음 조건을 만족시키는 연속함수 $f(x)$의 개수는?80)

(가) $0 \leq n \leq 3$인 정수 n에 대하여

$$f\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=\sin x+n \ \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ 또는}$$

$$f\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=-\cos x+n+1 \ \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)\text{이다.}$$

(나) $0 \leq x \leq 2\pi$인 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt=\int_{2\pi}^{2\pi-x}\{f(t)-4\}dt$$

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

081.

자연수 m, n에 대하여 $\{x \mid x>0\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\frac{(\ln x)^n}{x^m}$$

가 있다. 양의 실수 t에 대하여 $f(x)=f(t)$을 만족하는 양수 x의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족하는 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하여라.81)

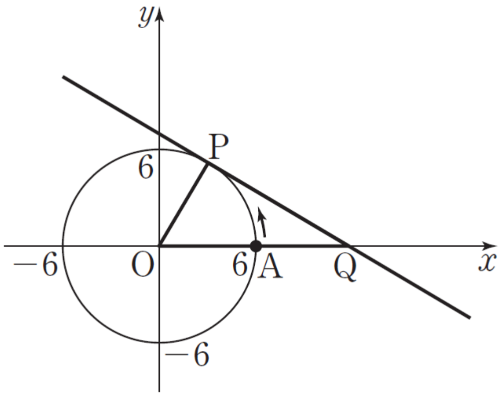
(가) $1 \leq m \leq 20$, $1 \leq n \leq 50$
(나) 함수 $g(t)$의 최댓값은 1 또는 e^3이다.

개념28

✔ 변화율 문제에서
① 관계식을 찾기 어려운 경우 : 잘 찾는다.
② 한 문자로 쓸 수 없는 경우 : 음함수의 미분법을 이용한다.

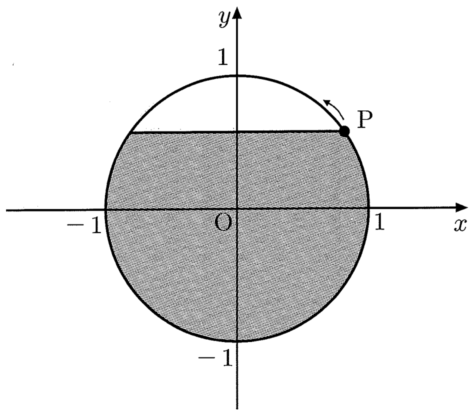
082.

원 $x^2+y^2=36$ 위의 점 P는 점 A(6, 0)에서 출발하여 원의 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 P가 점 A를 출발한 후 12초가 지났을 때 처음으로 점 A에 도착하였다. 그림과 같이 제1사분면에 있는 점 P에서 원에 그은 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 POQ의 넓이가 90이 되는 순간 삼각형 POQ의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율은 $k\pi$이다. 자연수 k의 값을 구하여라.[82] (단, O는 원점이다.)



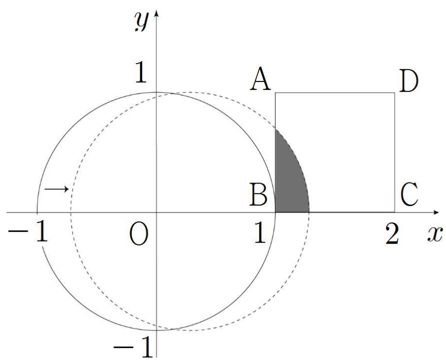
083.

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P가 점 $(1,\ 0)$에서 출발하여 원점을 중심으로 매초 $\frac{1}{40}$(라디안)의 일정한 속력으로 원 위를 시계 반대 방향으로 움직이고 있다. 점 P에서 x축에 평행한 직선을 그을 때, 원과 직선으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 점 P가 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지나는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{b}{a}$이다. $a+b$의 값을 구하여라.83) (단, a와 b는 서로소인 자연수이다.)



084.

좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 O와 네 점 A$(1,\ 1)$, B$(1,\ 0)$, C$(2,\ 0)$, D$(2,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 원 O의 중심이 x축을 따라 양의 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다. t초 후 원의 내부와 정사각형 ABCD의 내부가 겹치는 부분의 넓이를 S라 하자. 원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은?84) (단, $0 \le t \le 1$)



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

1) (1) $-\infty$ (2) 3 (3) 5
(4) 0 (5) 0 (6) $-\infty$
(7) $\log_3 2$ (8) $\log_3 5$ (9) $\log_3 2$

2) ⑤

3) 2

4) (1) e^6 (2) e^{-2} (3) e
(4) $e^{-\frac{2}{3}}$ (5) e^2 (6) $e^{\frac{3}{2}}$
(7) $\sqrt{e}$ (8) $\frac{1}{e^2}$ (9) e

5) (1) $\ln\frac{a+12}{a}$ (2) $\ln 2e$
(3) 2 (4) 1 (5) e

6) (1) 10 (2) $\ln 2$ (3) -9
(4) 1 (5) $\frac{1}{2}\ln ab$ (6) 2
(7) $\frac{5}{2}$

7) (1) $-\frac{1}{8}$ (2) 0 (3) $\frac{3}{2}$
(4) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (5) $\frac{1}{8}$ (6) $\frac{\sqrt{3}}{8}$
(7) 0 (8) $\frac{3}{2}$

8) ③

9) 100

10) ③

11) 10

12) ④

13) ②

14) ⑤

15) ①

16) (1) -1 (2) $\frac{1}{\pi}$ (3) 1
(4) $2a$ (5) 1 (6) 5
(7) 4 (8) $\sin 2a$ (9) -4
(10) $-\frac{\pi}{4}$ (11) $\frac{1}{8}$ (12) $-\sqrt{2}$
(13) 1 (14) 0 (15) $\frac{1}{2}$

17) 25

18) ③

19) ③

20) ①

21) 12

22) ④

23) ④

24) 30

25) ④

26) 6

27) ③

28) ③

29) ④

30) ④

31) ①

32) ①

33) $y'' = \dfrac{-2x\cos^2(xy) + 2x^3\sin(xy) + 2y\cos^3(xy)}{x^2\cos(xy)}$

34) ①

35) 8

36) $\left(\dfrac{9}{7}m/s, -\dfrac{12}{7}m/s\right)$

37) (1) 4
(2) -1
(3) 4

38) ⑤

39) ④

40) 39

41) 48

42) ③

43) ①

44) 12

45) 147

46) ⑤

47) 109

48) 35

49) ④

50) ②

51) 17

52) 216

53) ⑤

54) ⑤

55) ④

56) ③

57) ⑤

58) 20

59) ①

60) 10

61) ③

62) ②

63) ③

64) 4

65) ③

66) 167

67) ⑤

68) ⑤

69) ⑤

70) ④

71) ④

72) ①

73) ③

74) 6

75) ⑤

76) ⑤

77) 15

78) 72

79) 128

80) ③

81) 508

82) 78

83) 83

84) ④