[여러 가지 함수의 미분]

B10 | 자연대수의 정의

개념1 수열 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$의 극한값을 e라 한다. (자연대수, 오일러상수)

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

✓ $f(x)\to 0$이면 $(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}$는 e로 수렴한다.

개념2 $\log_e x = \ln x$라 나타내고 '자연로그'라 한다.

예제1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$

B11 | 지수함수와 로그함수의 극한

탐구 지수/로그함수를 포함한 $\frac{0}{0}$꼴의 극한값은 어떻게 되는가?

eg1) $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=?$ eg2) $\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)}{x}=?$

개념1 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

예제1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{e^{-3x}-1}$ (4) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2-x}$

(5) $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$ (6) $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{3^x-1}$

(7) $\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-e^{3x}}{x}$ (8) $\lim_{x\to0}\frac{e^{7x}+e^{3x}-2}{x}$

(9) $\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

개념2 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

예제2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(3x+1)}{2x}$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(x+1)}{2^x-1}$ (4) $\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}$

(5) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+3x)-\ln 2}{x}$ (6) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$

예제3 $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}+b}{\ln(1+x)}=4$를 만족하는 두 실수 a, b의 값을 구하여라.

예제4 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{bx+c}-1}=3$를 만족하는 a, b, c에 대하여 $\frac{a+c}{b}$의 값을 구하여라.

예제5 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-a}{2x} & (x\neq0)\\ b & (x=0)\end{cases}$가 $x=0$에서 연속이다. a, b의 값을 구하여라.

B11E1 | 지수함수와 로그함수의 극한2

✓ 부정형이 아닌 모양은 대충 구하면 된다.

예제1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to2}(2^x+2)$

(2) $\lim_{x\to4}\frac{2^x-3}{\log_2 x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}$

(5) $\lim_{x\to-\infty}(3^x-2)$

(6) $\lim_{x\to0+}\log x$

(7) $\lim_{x\to0+}\frac{\log x}{x}$

(8) $\lim_{x\to\infty}(2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$

(9) $\lim_{x\to\infty}(5^{x+1}-3^{x+2})^{\frac{1}{x}}$

✓ 지수함수가 $\frac{\infty}{\infty}$꼴일 때는 밑의 크기가 중요하다.

예제2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x+1}-3^x}{5^x+3^x}$ (2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x+2^x}{3^{x+1}+2^{x+1}}$ (4) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log_3 x+1}{\log_2 x}$

(5) $\lim_{x\to 0+}\frac{\log_3 x+1}{\log_5 x}$ (6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log_3(x+3)}{\log_2(3x)}$

예제3 $f(x)=\frac{a\cdot 3^{x+1}+b\cdot 2^x}{3^x-2^{x-1}}$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}f(x)=12$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=8$이다.

a, b의 값을 구하여라.

예제4 $\lim_{x\to 0}\frac{3^{\frac{1}{x}}+a}{3^{\frac{1}{x}}+3^{x+1}}$ 의 값이 존재할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

✓ 지수함수가 무한대로 커지면 다항함수보다 개빠르다. (로그함수는 개느리다.)

예제5 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^2}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+x^2}{3^x+2^x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2 x}{x}$ (4) $\lim_{x\to-\infty}(2^x x)$

(5) $\lim_{x\to 0+}(x\log x)$ (6) $\lim_{x\to 0+}(2^{\frac{1}{x}}\log x)$

B12 | 지수함수와 로그함수의 미분법

개념1 지수/로그함수의 미분법

① $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ ② $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

③ $(e^x)' = e^x$ ④ $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

증명 ①, ③은 정의에 의해 : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$

②, ④는 지수/로그함수의 성질을 이용하여 적절하게

※ $\{\ln(-x)\}' = \dfrac{1}{x}$이므로 $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

※ 뒤에 여러 가지 미분법 단원을 배우고 나서 다시 자세히 하자.

B13 | 삼각함수의 덧셈정리

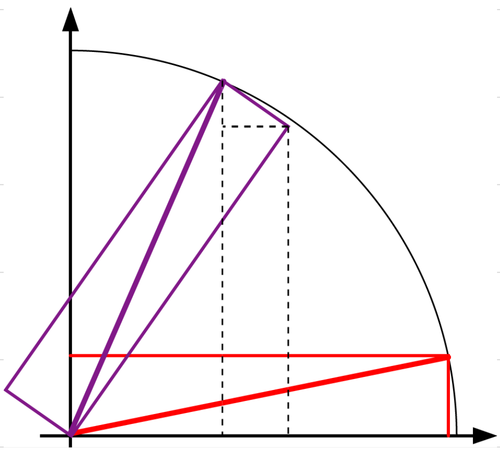
개념1 삼각함수의 덧셈정리

① $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

② $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

③ $\tan(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

✓ 오른쪽 그림을 이용하여 증명해보자.



※ 식 하나에서 ① β에 $-\beta$를, ② β에 $\frac{\pi}{2}\pm\beta$를 대입하여 더 얻을 수 있다.

※ $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}$로 탄젠트의 덧셈정리 공식을 얻을 수 있다.

✓ 다른 증명 방법

① $\triangle\mathrm{ABC}$에서 A에서 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{AH}}=h$, $\angle\mathrm{BAH}=\alpha$,

$\angle\mathrm{CAH}=\beta$라 두면 삼각형의 넓이 $\frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ch\sin\alpha+\frac{1}{2}bh\sin\beta$에서

② $\mathrm{A}(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathrm{B}(\cos\beta, \sin\beta)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 내적을 이용하여

③ ②의 $\triangle\mathrm{AOB}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이에 대한 코사인법칙에 의해서

※ ①, ③은 알아 놓도록 하자. ②는 내적을 배운 다음에 해보자.

예제1 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{1}{2}$일 때,

$\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

예제2 $\sin 75^\circ$, $\tan 15^\circ$의 값을 구하여라.

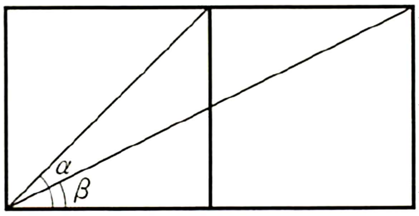
예제3 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{2}$일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값을 구하여라.

예제4 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$g\left(\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=\theta$일 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

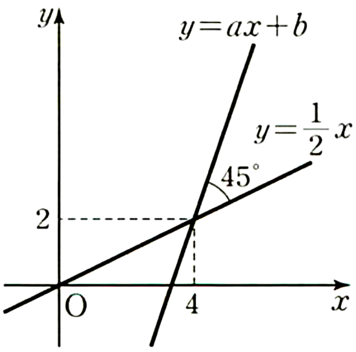
B13E1 | 탄젠트 덧셈정리의 활용

예제1 그림과 같이 두 정사각형을 이어 붙인 도형에서 $\tan(\alpha-\beta)$의 값을 구하여라.

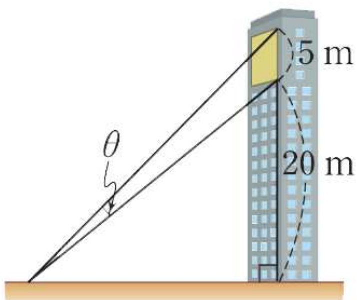


예제2 두 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$, $y=2x-1$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

예제3 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{2}x$를 점 $(4,\ 2)$를 중심으로 반시계 방향으로 $45°$ 회전시킨 직선의 방정식을 구하여라.



예제4 어느 빌딩에 세로가 5m인 대형 TV가 지면으로부터 20m의 높이에 설치되어 있다. 지면에서 이 TV를 바라볼 때, 바라보는 각 θ의 크기가 최대인 지점에서 빌딩까지의 거리를 구하여라.



B13E2 | 배각공식과 반각공식

개념1 2배각공식

① $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

② $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

③ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

✓ 3배각공식

① $\sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$

② $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

개념1 반각공식

① $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

② $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

③ $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

예제1 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$일 때, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$의 값을 각각 구하여라.

예제2 $\sin 22.5°$, $\cos 15°$의 값을 구하여라.

예제3 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$, θ는 제1사분면의 각이다. $\sin\frac{\theta}{2}$의 값을 구하여라.

B14 | 삼각함수의 합성

개념1 $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

(단, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

예제1 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$을 $a\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내어라.

예제2 $3\sin\theta+4\cos\theta$의 최댓값/최솟값을 구하여라.

예제3 $2\sin\theta+\cos\theta$가 최대가 되는 θ값에 대하여 $\tan\theta$의 값을 구하여라.

예제4 함수 $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos x$의 최솟값을 구하여라.

예제5 $y=1+\sin x+\cos x+(\sin x+\cos x)^2$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

B15 | 삼각함수의 극한

개념1 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

✓ 부채꼴의 넓이를 이용한 증명

✓ 그래프에서 기울기로서의 의미

예제1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\tan 3x}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 2x}{x}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{x\tan x}$

(5) $\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(7) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\tan x}$

(8) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

(9) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

(10) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$

예제2 다음 물음에 답하여라.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{a-3\cos x}{x\tan x}=b$일 때, a, b의 값을 구하여라.

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{ax+b}=\frac{1}{2}$일 때, a, b의 값을 구하여라.

(3) $\lim_{x\to a}\frac{3^x-1}{2\sin(x-a)}=b\ln 3$일 때, a, b의 값을 구하여라.

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+b}-1}=3$일 때, a, b의 값을 구하여라.

B15E1 | 도형에서의 극한

✓ sin법칙 : $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

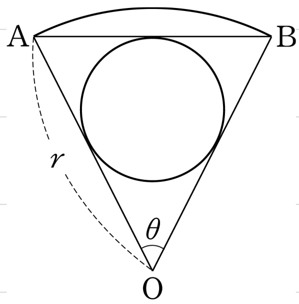
✓ cos법칙 : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

✓ 삼각형의 넓이 : $\dfrac{1}{2}ab\sin C$

예제1 그림의 부채꼴 OAB에서

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{(\text{내접원의 둘레})}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}$$

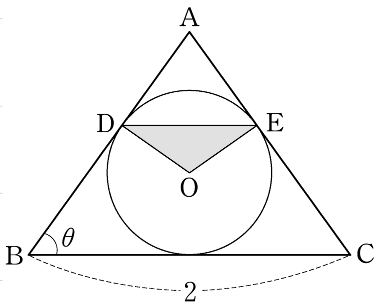
의 값을 구하여라.



예제2 그림에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고 $S(\theta)$는

색칠한 부분의 넓이이다.

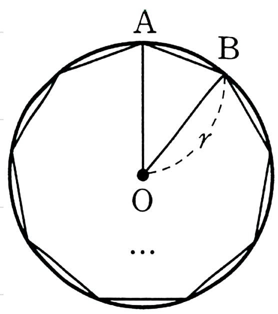
$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하여라.



예제3 반지름의 길이가 r인 원에 내접하는 정n각형의

한 변을 $\overline{\mathrm{AB}}$, 원의 중심을 O라 할 때, $\triangle$OAB의

넓이를 $f(n)$이라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nf(n)$의 값을 구하여라.



B16 | 삼각함수의 미분법

개념1 삼각함수의 미분법

① $(\sin x)' = \cos x$　② $(\cos x)' = -\sin x$

③ $(\tan x)' = \sec^2 x$　④ $(\sec x)' = \sec x \tan x$

⑤ $(\csc x)' = -\csc x \cot x$　⑥ $(\cot x)' = -\csc^2 x$

증명 ①은 정의에 의해 : $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

②부터는 여러 가지 미분법을 다룬 후 삼각함수의 성질을 이용하여 적절하게

예제1 $f(x) = \sin x$에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{f(\pi + \sin 3x) - f(\pi)}{x}$의 값을 구하여라.

예제2 함수 $f(x) = \begin{cases} ax + b & (-1 < x < 0) \\ \sin x & (0 \le x < 1) \end{cases}$가 $x = 0$에서 미분가능하게 하는

a, b의 값을 구하여라.

[여러 가지 미분법]

B17 | 몫의 미분법

개념1 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

증명 ① 정의에 의해, ② 곱/합성함수의 미분법에 의해(사기)

예제1 다음 함수를 미분하여라.

(1) $\dfrac{x^3-1}{x^2}$

(2) $\dfrac{1}{x^2+x}$

(3) x^n (n은 음의 정수)

B18 | 합성함수의 미분법

개념1 $\dfrac{d}{dx}\{f(g(x))\}=f'(g(x))g'(x)$

증명 미분의 정의에서부터

✓ 라이프니쯔식 표현 : $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dz}{dy}$

※ $\dfrac{d}{dx}$: x에 대하여 미분하여라. $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{dx}$ (증분비/미분비)

eg1) $x \xrightarrow[\frac{dy}{dx}=2]{y=2x} y \xrightarrow[\frac{dz}{dy}=3y^2]{z=y^3} z$ $\therefore \frac{dz}{dx}=2\cdot 3y^2$

eg2) $x \xrightarrow[\frac{dy}{dx}=2x]{y=x^2} y \xrightarrow[\frac{dz}{dy}=\cos y]{z=\sin y} z$ $\therefore \frac{dz}{dx}=2x\cos y=2x\cos(x^2)$

B19 | 매개변수 미분법

개념1 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 이면 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$

예제1 $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t^2 \end{cases}$ 일 때, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}$ 의 값을 구하여라.

예제2 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ 일 때, 곡선 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

B19E1 | 매개변수함수

개념1 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$를 만족하여 t에 따라 평면 위를 움직일 때,

점 P가 그리는 도형을 P의 자취라 하고 이때 $\mathrm{P}(x, y)$가 만족하는 방정식을

점 P의 자취의 방정식이라 한다. (일반적으로 t를 소거한 x와 y만의 관계식)

예제1 점 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$가 $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=t^2 \end{cases}$를 만족할 때,

(1) $t=0,\ t=1,\ t=2$일 때 점 P의 위치를 말하여라.

(2) 점 P가 그리는 자취의 방정식을 구하여라.

예제2 점 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$가 $\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases}$를 만족할 때,

(1) 점 P가 그리는 자취의 방정식을 구하여라.

(2) 점 Q가 $\mathrm{Q}(\cos 2t,\ \sin 2t)$일 때, P와 Q의 움직임을 설명하여라.

B19E2 | 매개변수로 나타난 곡선의 이계도함수

개념1 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$이면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$이고, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\dfrac{\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{f'(t)}$

예제1 실수 θ에 대하여 $\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}$일 때, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$를 구하여라.

예제2 실수 t에 대하여 $\begin{cases} x=e^t+e^{-t} \\ y=e^t-e^{-t} \end{cases}$일 때, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$를 구하여라.

B20 | 음함수의 미분법

✓ 변수 x, y가 $f(x, y)=0$의 등식을 만족할 때, y를 x의 음함수라 한다.

개념1 $f(y)$를 x에 대하여 미분하면 $f'(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$이다.

※ 합성함수의 미분법과 음함수의 미분법 : 같은 거다.

※ 편미분과 음함수의 미분법 비교 : 다른 거다.

예제1 곡선 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

예제2 곡선 $xy=6$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

B21 | 역함수의 미분법

개념1 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고, $f(a)=b$이면, $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$이다.

증명 세 가지 방법으로 해보자.

① 기하학적 의미를 따져서

② $f(g(x))=x$에서부터

③ $x=f(y)$와 $y=g(x)$가 동치임에서부터

예제1 $f(x)=x^3+x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(2)$의 값을 구하여라.

예제2 $f(x)=\sin x\ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라.

예제3 $f(2)=f'(2)=1$이고 역함수를 가지는 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다.

함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(1)$과 $g'(1)$의 값을 구하여라.

B22 | 이계도함수

개념1 $f(x)$를 x에 대하여 두 번 미분한 함수를 이계도함수라 한다.

Note $y=f(x)$의 이계도함수 : $f''(x)$, y'', $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

※ n계도함수를 $f^{(n)}(x)$와 같이 나타내기도 한다.

※ 이계도함수의 정의는 보통 $\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$를 쓴다.

$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$도 가끔 쓴다. 기억할 필요까지는 없지만.

B23 | 초월함수의 미분법

개념1 삼각함수의 미분법

① $(\sin x)' = \cos x$ ② $(\cos x)' = -\sin x$

③ $(\tan x)' = \sec^2 x$ ④ $(\sec x)' = \sec x \tan x$

⑤ $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ ⑥ $(\cot x)' = -\csc^2 x$

증명 ①은 정의에 의해 : $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

②부터는 여러 가지 미분법을 다룬 후 삼각함수의 성질을 이용하여 적절하게

개념2 지수/로그함수의 미분법

① $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ② $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

③ $(e^x)' = e^x$ ④ $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

증명 ①, ③은 정의에 의해 : $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$, $\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$

②, ④는 지수/로그함수의 성질을 이용하여 적절하게

※ $\{\ln(-x)\}' = \frac{1}{x}$ 이므로 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

예제1 다음 함수를 미분하여라.

(1) $\sin^3 x \cos x$ (2) $\dfrac{\tan x}{1+\sec x}$

(3) $\cos\sqrt{1+x^2}$ (4) $x^2 e^{x+1}$

(5) $\dfrac{\ln(x^2)}{x}$ (6) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

B23E1 | 로그를 이용한 미분법

개념1 양변에 로그 취해서 미분하면 좋을 때가 있다.

예제1 다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2}$ (2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}}$

(3) $f(x)=x^x$ (4) $f(x)=x^{\ln x}$

B24 | 0/0꼴 심화

✓ 선형근사 : 초월함수를 포함한 $\dfrac{0}{0}$꼴을 간단하게 처리하는 야매

✓ 테일러 급수 : 선형근사의 근거

✓ 로피탈의 정리 : 문제를 잘 풀어주는 야매

B24E1 | 무한소의 위치와 차수

탐구 다음 극한값을 생각해보자.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2+n^3}{n+2n^2+3n^3}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x+2x^2+3x^3}{x+x^2+x^3}$, $\lim_{x\to 0+} \frac{[x]}{x}$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+2x^2+3x^3)}{x+x^2+x^3}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\ln(1+x^2)}{x}$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}=2$일 때, $\lim_{x\to 0} \frac{\{f(x)\}^2+2f(x)}{x^2+x}$

B24E2 | 선형근사

개념1 $x\to 0$이면 ;

① $\sin x \sim x$ ② $\tan x \sim x$

③ $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ④ $e^x-1 \sim x$

⑤ $\ln(1+x) \sim x$

예제1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 3x}$ (2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x\tan x}$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\sin 2x}{x}$ (4) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\tan x}$ (6) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}$

(7) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{-3x}-1}$ (8) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$

(9) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}$ (10) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{e^{\tan x}-1}$

※ 기분 좋은 형태가 아니면 쓰다 털릴 수 있다. (고차 항이 필요하기 때문)

예제2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+\ln(1-3x)}{x^2}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$ (4) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

B24E3 | 테일러 급수

개념1 $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$라 놓고 계수비교를 잘 해보면,

$$\Rightarrow f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

✓ $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\cdots$

✓ $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots$

✓ $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots$

✓ $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6-\cdots$

예제1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\sin x)^2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x^2)}$ (4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (6) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}$

B24E4 | 로피탈의 정리

개념1 두 번 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(a)=g(a)=0$이면,

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$이다.

※ 사실 도함수가 연속이면 되는데 어차피 증명 안 되는 거 대충 하자.

예제1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ (2) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{\sin x}$ (4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

예제2 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-1)-3}{x-2} = -1$을 만족할 때,

$x=1$에서 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

※ 미분가능성이 보장되지 않으면 로피탈은 쓸 수 없다.

eg) $f(x)=|x-1|$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$의 값을 구하여라.

※ $f'(a)=g'(a)=0$이 아닌 경우의 로피탈의 정리는 미분계수의 정의에 의해

간단하게 설명이 가능하므로 로피탈을 쓸 필요가 없다. $f'(a)=g'(a)=0$인

경우에 로피탈이 의미를 가지는 데 이 경우에는 증명이 쉽지 않다.

[도함수의 활용]

B25 | 접선의 방정식

개념1 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 $y=f(x)$에 접하는

직선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.

$\Rightarrow$ 기울기가 주어졌을 때?

$\Rightarrow$ 곡선 밖의 점을 지나는 접선일 때?

예제1 곡선 $y=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$ 위의 점 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 법선의 방정식을 구하여라.

예제2 곡선 $y=e^{-x}$에 접하며 기울기가 -1인 직선의 방정식을 구하여라.

예제3 원점을 지나고 곡선 $y=e^{5x}$에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

예제4 두 곡선 $y=2\ln x$, $y=kx^2$이 서로 접할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

예제5 두 곡선 $y=a-2\sin^2 x$, $y=2\cos x$가 서로 접할 때,

상수 a의 값을 구하여라. (단, $0<x<\pi$)

예제6 점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=e^{-x^2}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, a의 값의 범위를 구하여라.

B26 | 극대와 극소

개념1 도함수의 부호와 원함수의 증감

① $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 감소한다.

② $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 증가한다.

예제1 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

(2) $f(x)=x^2e^{-x}$

(3) $f(x)=e^x-x$

(4) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

(5) $f(x)=x^2\ln x$

(6) $f(x)=x\sin x+\cos x\ (0<x<2\pi)$

예제2 함수 $f(x)=xe^{ax+b}$이 $x=-2$에서 극솟값 $-\dfrac{2}{e}$를 가질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

예제3 함수 $f(x)=kx-2\cos x$가 극값을 갖지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구하여라.

예제4 함수 $f(x)=ax+\ln(x^2+4)$가 실수 전체에서 증가하게 되는

상수 a의 값의 범위를 구하여라.

예제5 함수 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{4x}-4x$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지는

상수 a의 값의 범위를 구하여라.

B27 | 오목과 볼록

개념1 이계도함수의 부호와 원함수의 요철

① $f''(x)>0$이면 $f(x)$는 아래로 볼록이다.

② $f''(x)<0$이면 $f(x)$는 위로 볼록이다.

개념2 $x=a$의 좌우에서 볼록성이 바뀌면 $(a, f(a))$를 변곡점이라 한다.

$\Rightarrow$ 두 번 미분 가능할 때, $(a, f(a))$가 변곡점이면 $f''(a)=0$이다.

예제1 다음 곡선의 오목, 볼록을 조사하고 변곡점을 구하여라.

(1) $y=x^3-3x^2+5$ (2) $y=xe^x$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2+3}$ (4) $y=\ln(x^2+1)$

예제2 곡선 $f(x)=x+2\sin x$ $(0<x<2\pi)$의 변곡점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

B27E1 | 변곡점에서 접하는 직선

예제1 점 $(a, 2)$에서 곡선 $y=x^3-3x^2+2$에 그은 접선이 오직 한 개 존재하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

예제2 점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=xe^{-x}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, 양의 정수 a의 최솟값을 구하여라.

B28 | 함수의 그래프

개념1 그래프를 그릴 때에는 다음 사항을 체크한다.

① 정의역 ② 정의역 경곗값에서의 함숫값

③ 극점과 증감 (by 도함수)

개념2 다음 사항을 체크해보면 더 예쁜 그래프를 그릴 수 있다.

④ 절편 ⑤ 오목과 볼록(변곡점)

⑥ 점근선 ⑦ 대칭성

예제1 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=xe^x$ (2) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

(3) $y=x\ln x$ (4) $y=\dfrac{1}{x(x-2)}$

(5) $y=e^{-x^2}$ (6) $y=x^x$

(7) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ (8) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

B28E1 | 연산된 함수의 그래프

개념1 $f(x)\pm g(x)$나 $f(x)g(x)$의 그래프 등을 알 수 있다.

① $f(x)\pm g(x)$의 도함수는 $f'(x)\pm g'(x)$이다.

② $f(x)g(x)$의 그래프를 그릴 때는, 0이나 1이 되는 점에 주목해 본다.

예제1 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$ (2) $y=\sqrt{x}+\sqrt{10-x}$

(3) $y=x+\sin x$ (4) $y=x+\sqrt{1-x^2}$

(5) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (6) $y=\sin x\cdot\cos x$

(7) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ (8) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

B28E2 | 지수함수와 다항함수의 곱

✓ 많이 나오므로 미분 없이도 대충의 개형을 잡을 수 있게 연습 해 두자.

$\Rightarrow$ $x=0$ 근처에서는 다항함수 따라가고 $x \to \pm\infty$일 때는 지수함수 따라간다.

예제1 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=xe^{x}$ (2) $y=x^2e^{-x}$

(3) $y=(x^2-x)e^{-x}$ (4) $y=x^2(x-2)e^{x}$

B28E3 | 합성된 함수의 그래프

개념1 함숫값의 증감을 조사하는 것이 가능하다.

※ $\dfrac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$이므로 미분가능한 $y=f(g(x))$의 극값은

① $f'(g(x))=0$일 때, 혹은 ② $g'(x)=0$일 때 생긴다.

예제1 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=e^{-x^2}$ (2) $y=\ln(x^2+1)$

(3) $y=\sin(x^2)$ (4) $y=\sin\dfrac{1}{x}$

(5) $f(x)=2x^2-1$일 때, $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}$

B29 | 함수의 최대최소

✓ 그래프만 잘 그리면 된다.

예제1 $x>0$일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{x}$의 최솟값을 구하여라.

예제2 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$의

최댓값/최솟값을 구하여라.

예제3 함수 $f(x)=x\ln x$가 범위 $\dfrac{1}{e^2}\le x\le e$에서 가지는 최댓값/최솟값을 구하여라.

예제4 닫힌 구간 $[0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)=\sin 2x+2\sin x$의 최댓값을 구하여라.

B30 | 방정식과 부등식

✓ 그래프만 잘 그리면 대충 된다.

$\Rightarrow$ 한 쪽 변으로 어디까지 넘길지, 접선으로 풀지를 먼저 고민해보자.

예제1 방정식 $2\sqrt{x+1}-x=a$가 서로 다른 두 실근을 가질 때,

실수 a의 값의 범위를 구하여라.

예제2 방정식 $kx^2e^{-x}=1$이 오직 하나의 실근을 가질 때,

실수 k의 값의 범위를 구하여라.

예제3 방정식 $ke^x-x+1=0$이 실근을 갖도록 하는

실수 k의 최댓값을 구하여라.

예제4 방정식 $x^2-\ln(1+2x^2)=k$가 서로 다른 네 개의 실근을

갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

예제5 모든 x에 대하여 부등식 $e^x \geq 2x+k$가 성립할 때,

실수 k의 값의 범위를 구하여라.

예제6 모든 양수 x에 대하여 부등식 $\sqrt{x}>k\ln x$가 성립할 때,

양수 k의 값의 범위를 구하여라.

예제7 모든 양수 x에 대하여 부등식 $\cos x > k-\frac{1}{2}x^2$을 만족시키는

실수 k의 최댓값을 구하여라.

B31 | 속도와 가속도

개념1 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치가 $x(t)$일 때,

$\Rightarrow$ 점 P의 속도 $v(t)=x'(t)$

$\Rightarrow$ 점 P의 가속도 $a(t)=x''(t)$

개념2 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 시각 t에 대하여 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$를 만족할 때,

① 점 P의 속도 : $v(t)=(f'(t),\ g'(t))$

② 점 P의 속력 : $|v(t)|=\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}$

③ 점 P의 가속도 : $a(t)=(f''(t),\ g''(t))$

※ 속도는 점 P가 그리는 곡선에 접하는 벡터이다. ($\because\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt}$)

예제1 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=\dfrac{1}{2}t^3-\ln t,\ y=2t$이다.

점 P의 속력이 최소가 될 때, 점 P의 속도를 구하여라.