원포인트 개념주입 C

수열의 극한

개념1

✔ 극한의 진위판정 : 잘 해보자.

① a_n, b_n이 수렴하면 두 수열의 연산으로 이루어진 수열은 0으로 나누는 경우를 제외하고 모두 수렴한다. (근데 0으로 나누는 경우가 졸라 나옴.)

② $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$이다.

③ 수열 $\{a_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, $\cdots$, $\{b_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$은 반례가 자주 된다.

001.

다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[1)]

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 발산하고 수열 $\{a_n+b_n\}$이 0에 수렴하면 수열 $\{b_n\}$은 발산한다.

ㄴ. 수열 $\{a_n-b_n\}$이 0으로 수렴하면 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\left\{a_n+\frac{n}{2n+1}\right\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n^2\}$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

002.

다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[2)]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_{3n} = \alpha$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$이면 극한 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$가 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

003.

다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3)]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$이다.

ㄴ. 수열 $\{a_n b_n\}$이 발산하면 수열 $\{a_n\}$ 또는 수열 $\{b_n\}$이 발산한다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

개념2

✔ 샌드위치정리(조임정리)

① 모든 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

② 모든 n에 대하여 $a_n < b_n$이더라도 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$일 수 있다.

③ 모든 n에 대하여 $a_n \le b_n \le c_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이면, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

004.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n+1 < a_n < 2n+2$를 만족할 때,

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}}$의 값은?[4)]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$

④ 1　⑤ 2

005.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{n}{10}\right]$의 값을 구하여라.[5] (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

006.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 극한에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?[6]

ㄱ. $a_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이다.

ㄴ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴할 때 $a_n < b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

개념3

✔ 수렴하는 수열의 연산 : 0으로 나누는 것 말고는 잘 된다.
⇒ 형태를 맞추는 연습

007.

수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(n^2-1)a_n=2026$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2+1\right)a_n$의 값은?7)

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1013
④ 2026 ⑤ 4052

008.

수열 a_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\{2n^2-a_n\}=2$일 때, 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3a_n}{-n^2+a_n}$의 값을 구하여라.8)

009.

수열 a_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=2$일 때, 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{3^n a_{n-1}}$의 값은?9)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 3

개념4

✔ $n\to\infty$일 때의 상황을 잘 상상해서 대충 찍어본다. 생각보다 잘 맞는다.

010.

함수 $y=\dfrac{1}{x}$와 직선 $y=-x+n$의 두 교점 사이의 거리를 l_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}$의 값은?[10)]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

011.

자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{x}{n}$와 원 $x^2+(y-1)^2=9$가 만나는 두 점 사이의 거리를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[11)]

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

012.

두 점 $\mathrm{A}(n,\ 0)$, $\mathrm{B}(n,\ 10)$에 대하여 각 $\angle\mathrm{AOB}$의 이등분선을 l이라 하자. 직선 l과 선분 AB의 교점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty} b$의 값을 구하여라.[12)]

개념5

✔ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다. 역은 성립하지 않는다.

013.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^2+2}{n^2+2n}$가 수렴할 때, 이 무한급수의 합을 구하여라.[13] (단, a는 상수이다.)

014.

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$라 하자. $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2}$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)}$의 값은?[14)]

① 2　② 1　③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{4}$

015.

두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대한 보기의 설명에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[15)]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.

ㄴ. $a_n \neq 0$이고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$은 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$이고 $\alpha > \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념6

✔ 무한등비수열 $a_n = ar^{n-1}$은 $(a>0)$

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$　　② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

③ $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$　　④ $r\le -1$일 때, 진동

✔ 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 $(a>0)$

$-1<r<1$일 때 $\frac{a}{1-r}$로 수렴, 나머지는 발산

✔ 멱급수도 해두자 : $S-rS$의 값을 구한다.

016.

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 다음 보기에서 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?[16)]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$　　ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-r)^n$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{r}{3}\right)^n$　　ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r+2}{3}\right)^n$

① ㄱ, ㄴ　　② ㄱ, ㄴ, ㄹ　　③ ㄱ, ㄷ, ㄹ

④ ㄴ, ㄷ, ㄹ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

017.

등비급수 $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$ 의 합이 3일 때, 무한급수

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots$$

의 값을 구하여라.17)

018.

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\left(\dfrac{|x|+|y|-3}{2}\right)^n$이다.

등비수열 $\{a_n\}$은 수렴하고, 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산할 때, 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구하여라.18)

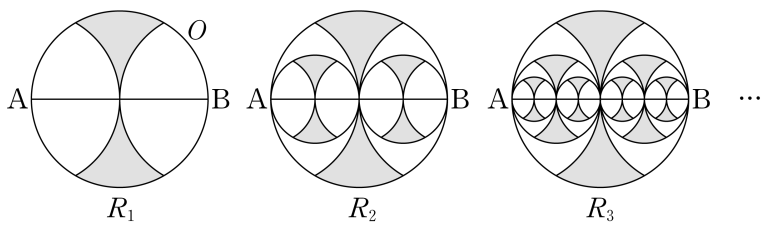
개념7

✔ 무한등비급수와 도형 :

닮음비가 $a:b$인 도형이 1개당 n개로 나뉘는 경우의 공비는 $\dfrac{na^2}{b^2}$ (넓이인 경우)

019.

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. A, B를 각각 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 두 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 ⧖ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 AB를 2등분한 선분을 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⧖ 모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 선분 AB를 4등분한 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⧖ 모양의 네 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 ⧖ 모양의 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$의 값은?[19)]

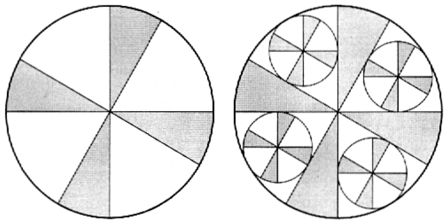


① $3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$ ② $2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi$ ③ $2\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}$

④ $3\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi$

020.

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 중심각의 크기가 60° 이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개 그린 후 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림1]이라 하자. [그림1]에서 색칠되지 않은 각 부채꼴에 두 반지름과 호에 모두 접하도록 원을 그린다. 새로 그린 각 원에 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 새로 그린 원의 반지름의 길이와 같은 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개씩 그린 후 새로 그린 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림2]라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[20)]



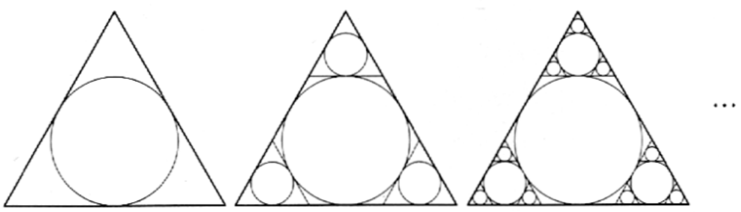
[그림 1] [그림 2]

① $\frac{7}{15}\pi$　② $\frac{8}{15}\pi$　③ $\frac{3}{5}\pi$

④ $\frac{2}{3}\pi$　⑤ $\frac{11}{15}\pi$

021.

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형에 내접원을 그려 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 내접원에 접하면서 정삼각형의 한 변 과 평행한 선분을 각각 그려 새로운 정삼각형 3개를 만들고, 새로 만들어진 3개의 정삼각형에 각각 내접원을 그려 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 새로 그려진 내접원에 접하면서 R_2에서 새로 만들어진 정삼각형의 한 변과 평행한 선분을 각각 그려 새로운 정삼각형 9개를 만들고, 새로 만들어진 9개의 정삼각형에 내접원을 그려 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 그려진 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{20S_n}{\pi}$의 값을 구하여라.[21)]



R_1　R_2　R_3　…

✔ 도형에 관련된 중요한 요령

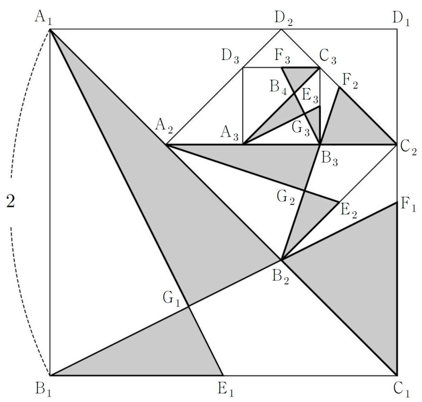
개념8

1) 원/부채꼴이 포함된 도형 ⇒ 중심과 이어라.

2) 좌표축을 설정하면 좋은 문제 ⇒ 기울기에 의해 닮음이 자동처리된다.

022.

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 두 선분 B_1C_1, C_1D_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 A_1E_1과 A_1C_1이 선분 B_1F_1과 만나는 두 점을 각각 G_1, B_2라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_1G_1B_2$, $B_1E_1G_1$, $C_1F_1B_2$의 넓이의 합을 S_1이라 하자. 점 B_2를 지나고 선분 A_1B_2에 수직인 직선과 선분 C_1D_1이 만나는 점을 C_2라 하자. 점 C_2를 지나고 선분 B_2C_2에 수직인 직선과 선분 A_1D_1이 만나는 점을 D_2라 하고, 점 D_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 A_2라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 두 선분 B_2C_2, C_2D_2의 중점을 각각 E_2, F_2라 하고, 두 선분 A_2E_2와 A_2C_2가 선분 B_2F_2와 만나는 두 점을 각각 G_2, B_3이라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_2G_2B_3$, $B_2E_2G_2$, $C_2F_2B_3$의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 삼각형 $A_nG_nB_{n+1}$, $B_nE_nG_n$, $C_nF_nB_{n+1}$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?22)

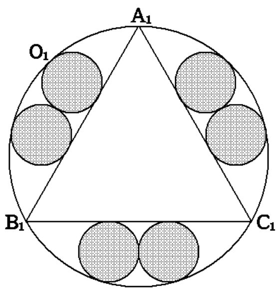


① $\frac{41}{35}$　② $\frac{44}{35}$　③ $\frac{46}{35}$

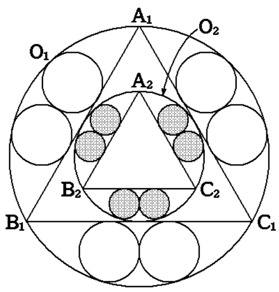
④ $\frac{48}{35}$　⑤ $\frac{51}{35}$

023.

반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. [그림1]과 같이 원 O_1과 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$에 동시에 접하고 모두 합동인 6개의 원을 각각 2개씩 서로 외접하도록 그릴 때, 6개의 원의 넓이의 합을 S_1이라 하자. [그림2]와 같이 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$에 내접하는 원 O_2를 그리고 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그린다. 원 O_2와 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$에 동시에 접하고 모두 합동인 6개의 원을 각각 2개씩 서로 외접하도록 그릴 때, 6개의 원의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 원 $O_n$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$을 그리고 원 O_n과 정삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$에 동시에 접하고 모두 합동인 6개의 원을 각각 2개씩 서로 외접하도록 그릴 때, 6개의 원의 넓이의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[23)]



[그림1]



[그림2]

① $12(6+2\sqrt{3})\pi$　② $12(7-4\sqrt{3})\pi$　③ $24(6-2\sqrt{3})\pi$
④ $24(7-4\sqrt{3})\pi$　⑤ $24(7+3\sqrt{3})\pi$

✔ 공비가 다른 양쪽으로 분화되는 경우 : 그냥 합쳐서 공비를 구한다.
✔ 가비의 리를 이용한 풀이법 :
반복되는 분할을 찾아서 구하려는 넓이가 차지하는 비율을 계산한다.

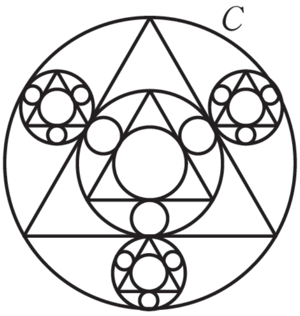
개념9

024.

그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원 C를 그리고 원 C에 대하여 다음과 같은 시행을 한다.24)

> [1단계] : 원 C에 내접하는 정삼각형을 그리고, 원의 내부와 정삼각형 외부의 공통 부분에 정삼각형의 한 변에 접하고 원 C에 내접하는 원 중 가장 큰 원 3개를 그리고, 정삼각형에 내접하는 원을 그린다.
> [$n+1$단계] : [n단계]에서 그린 각각의 원에 대하여 [1단계]와 같은 방법으로 정삼각형 1개와 원 4개를 각각 그린다.

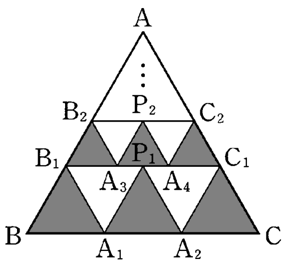
[n단계]에서 그린 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{110}{9}\pi$　② $\frac{112}{9}\pi$　③ $\frac{38}{3}\pi$
④ $\frac{116}{9}\pi$　⑤ $\frac{118}{9}\pi$

025.

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 BC의 삼등분 점을 A_1, A_2라 하고 세 선분 BA_1, A_1A_2, A_2C를 각각 한 변으로 하는 세 개의 정삼각형 B_1BA_1, $P_1A_1A_2$, C_1A_2C를 만든다. 다시 삼각형 AB_1C_1에서 선분 B_1C_1의 삼등분 점을 A_3, A_4라 하고 같은 방법으로 정삼각형 세 $B_2B_1A_3$, $P_2A_3A_4$, $C_2A_4C_1$을 만든다. 이와 같은 방법으로 계속하여 삼각형을 만들어 나갈 때, 어두운 부분의 넓이의 합은?25)

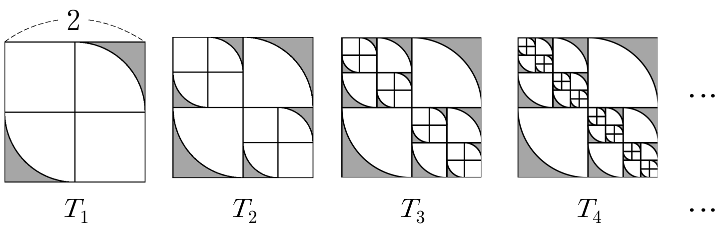


① $\frac{\sqrt{3}}{10}$　② $\frac{\sqrt{3}}{8}$　③ $\frac{3\sqrt{3}}{20}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$　⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

026.

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 1인 사분원 2개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_1이라 하자. T_1에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 2개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 사분원 4개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_2라 하자. T_2에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형 4개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 사분원 8개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형을 T_n, 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?26)



① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ $\frac{3}{4}\pi$

④ π　⑤ $\frac{5}{4}\pi$

1) ⑤

2) ①

3) ④

4) ②

5) $\frac{1}{10}$

6) ①

7) ③

8) 7

9) ⑤

10) ②

11) ④

12) 5

13) $\frac{3}{2}$

14) ④

15) ②

16) ②

17) 9

18) $20\sqrt{2}$

19) ②

20) ③

21) 10

22) ④

23) ④

24) ②

25) ③

26) ④