원포인트 개념주입 B

수열의 극한

개념1

✔ $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 : 분모분자를 최고차항으로 나눈다.

001.

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+3n+5}{n+2}-\frac{n^2-2n-4}{n-3}\right)$의 값은?1)

① -3 ② -2 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

002.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2020}+n}{2n-1}$의 값은?2)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

003.

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+3}{2n+1}=12$일 때,
$a+b$의 값을 구하여라.3)

004.

자연수 k, α에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}-n}{n^{k-1}}=\alpha$일 때,
$k+\alpha$의 값은?4)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

개념2

✔ $\infty - \infty$ 꼴의 부정형 : 대충 유리화

※ $\sqrt{n^2+2an+b} \sim (n+a)$

005.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$의 값을 구하여라.5)

006.

$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})^2$의 값은?6)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 6 ⑤ 9

007.

$\lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n^2+4n}-(an+b)\right\}=3$일 때, $a+b$의 값은?7)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

008.

$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+an+3}-\sqrt{n^2+bn+2})=5$일 때,
$a-b$의 값은?8)

① 2 ② 5 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

009.

$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+6n}+\cdots+\sqrt{n^2+30n}-pn)$
의 값이 A일 때, $2A$의 값을 구하여라.9)

개념3

✔ $\infty-\infty$ 꼴은 차수, 최고차항의 계수가 맞을 때만 유리화한다.

010.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n+1}}$의 값은?10)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1

④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

011.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$의 값은?11)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1

④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

012.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$가

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$,

$\lim_{n\to\infty}\{a_n-b_n\}=4$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_n}$의 값은?12)

✔ 수렴하는 수열의 연산 :
0으로 나누는 것만 아니면 수렴할 때는 대충 계산된다.

개념4

013.

수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(2n^2+3n-5)a_n=12$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}n^2a_n$의 값은?13)

① 6　② 8　③ 12
④ 18　⑤ 24

014.

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n=3$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\alpha,\quad \lim_{n\to\infty}(3n+2)a_{n+1}=\beta$$

이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.14) (단, α, β는 상수)

015.

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_{n+2}+3}{a_n-3}=-4$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?15)

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{5}{3}$
④ 2　⑤ 3

016.

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{2a_n+1}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?16)

① $-\frac{5}{3}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{3}{5}$　⑤ $-\frac{1}{2}$

✔ 수렴하는 수열의 연산 :
가진 모양과 구하려는 모양을 잘 맞춰본다.

개념5

017.

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n+n}-\sqrt{n})=10$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$의 값은?17)

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

018.

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right),\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^2}{b_n}-\frac{b_n^2}{a_n}\right)$$

의 값을 구하여라.18) (단, $a_nb_n\neq 0$이다.)

019.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{6^n a_n}{2^n+3}=1$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$의 값을 구하여라.19)

개념6

✔ 수렴하는 수열의 연산 : 0으로 나누는 건 안 돼.

020.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[20]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$이다.

ㄴ. 두 수열 $\{a_n b_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_n\}$가 수렴한다.

ㄷ. 두 수열 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_n\}$이 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

021.

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[21]

ㄱ. 두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_n\}$이 수렴한다.

ㄴ. 두 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_n\}$가 수렴한다.

ㄷ. 모든 자연수 n에서 $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

개념7

✔ 샌드위치 정리 : 모든 n에 대하여 $a_n < b_n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

022.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n}\left[\dfrac{n}{4}\right]$의 값은?22) (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

023.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n^2-3n+1 < a_n < 2n^2+3n+5$$

를 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2a_n}{3n^2+2n-1}$의 값은?23)

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1

④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

024.

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$일 때,

$$\frac{3}{\sqrt{n^2+3n}} \le \frac{3}{\sqrt{n^2+3k}} \le \frac{3}{\sqrt{n^2+3}}$$

이 성립한다. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{3}{\sqrt{n^2+3k}}$의 값은?24)

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 2

④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 3

개념8

✔ 등비수열의 극한 : 등비수열 $\{r^n\}$은 $-1<r\le 1$일 때 수렴한다.

※ 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$은 $-1<r<1$일 때 수렴한다.

025.

수열 $\{(r+2)(r-2)^n\}$이 수렴하도록 하는 r의 값의 범위를 구하여라.25)

026.

수열 $\left\{\left(\frac{x-x^2}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구하여라.26)

개념9

✔ 등비수열을 포함한 부정형 :
분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 나눈다.

027.

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+2^{2n}}{4^n+3^n}$의 값은?27)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

028.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n+3^n)^2}{4^{n+1}+9^{n+1}}=A$일 때, $\log_3 A$의 값은?28)

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

029.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}$의 값은?29)

① -1 ② $1-\sqrt{2}$ ③ 0
④ $\sqrt{2}-1$ ⑤ 1

030.

자연수 n에 대하여 6^n의 모든 약수의 합을 $T(n)$이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{T(n)}$의 값은?30)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

개념10

✔ 상황에서 $n \to \infty$로 보낸다.

031.

이차함수 $y = x^2$의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{n}x + 2$의 두 교점 사이의 거리를 l_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} l_n$의 값은?31) (단, n은 자연수이다.)

① 2　② $\sqrt{6}$　③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

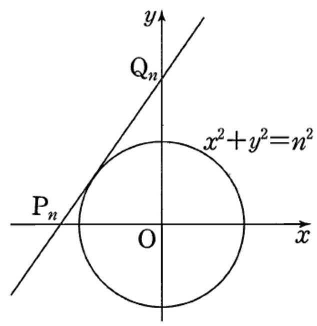
032.

함수 $y = \frac{1}{x}$의 그래프와 직선 $y = -x + n$의 두 교점 사이의 거리를 l_n이라 하자. $\lim_{n \to \infty} \frac{l_n}{n}$의 값은?32)

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2
④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

033.

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2 + y^2 = n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{l_n}{2n^2}$의 값은?33)



① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

개념11

✔ 시그마 대충 처리하기

① $\sum_{k=1}^{n} k \fallingdotseq \frac{n^2}{2}$ ② $\sum_{k=1}^{n} k^2 \fallingdotseq \frac{n^3}{3}$ ③ $\sum_{k=1}^{n} k^3 \fallingdotseq \frac{n^4}{4}$

034.

$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+2+3+\cdots+n)(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)}{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)}$의 값은?34)

035.

$T_n = \sum_{k=1}^{n} (n+k)(n+k+2)$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n^3}$의 값은?35)

036.

자연수 n에 대하여 두 집합 A_n, B_n을

$A_n = \{(x,\ y) | 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le n^2\}$,

$B_n = \{(x,\ y) | 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le x^2\}$

으로 정의할 때, 두 집합 A_n, B_n의 원소 중 x, y의 값이 모두 정수인 것의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$의 값은?36)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

개념12

✏ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$

✏ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

037.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$의 값은?37)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

038.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\frac{1}{2+4+6+8}+\cdots$ 의 값은?38)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

039.

급수

$$(a_1-1)+\left(\frac{a_2}{2}-2\right)+\left(\frac{a_3}{3}-3\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{n}-n\right)+\cdots$$

이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+4n-3n^2}{4a_n+3n-4n^2}$의 값은?39)

① 0　② $\frac{3}{4}$　③ 1
④ $\frac{4}{3}$　⑤ 2

040.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n = 4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+S_n}{S_n^{\,2}}$의 값은?40)

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

개념13

✏ $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}(a_1>0)$는 $-1<r<1$일 때, $\frac{a_1}{1-r}$로 수렴한다.

041.

첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=5, \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n=\frac{3}{2}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$의 값은?41)

① $\frac{13}{5}$ ② $\frac{41}{15}$ ③ $\frac{43}{15}$
④ 3 ⑤ $\frac{47}{15}$

042.

$|x|<\frac{1}{2}$일 때,

$$1+3x+7x^2+\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots$$

의 값은 $\frac{9}{2}$이다. x의 값은?42)

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

✏ 프렉탈 도형 문제는 첫항과 공비, 두 가지를 찾으면 된다.
✏ 공비를 찾을 때는 첫 도형과 두 번째 도형의 닮음비를 이용한다.

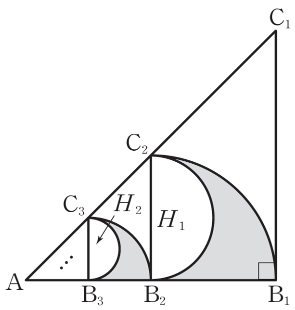
개념14

✔ 닮음비가 $a:b$이면 넓이비는 $a^2:b^2$, 공비는 $\frac{b^2}{a^2}$ (넓이인 경우)

✔ 닮음 도형에다가 같은 방법으로 그린 도형의 닮음에 주목한다.

043.

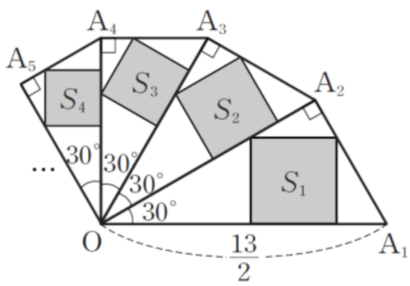
그림과 같은 $\overline{AB_1}=\overline{B_1C_1}=4$인 직각삼각형 AB_1C_1이 있다. 두 선분 AB_n, AC_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 중점을 각각 B_{n+1}, C_{n+1}이라 하고, 부채꼴 $B_{n+1}B_nC_{n+1}$을 삼각형 AB_nC_n의 내부에 그리고, 선분 $B_{n+1}C_{n+1}$을 지름으로 하는 반원 H_n을 부채꼴 $B_{n+1}B_nC_{n+1}$의 내부에 그린다. 이때, 부채꼴 $B_{n+1}B_nC_{n+1}$의 내부와 반원 H_n의 외부의 공통 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?43)



① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ $\frac{3}{4}\pi$
④ $\frac{4}{5}\pi$　⑤ $\frac{5}{6}\pi$

044.

$\overline{OA_1}=\frac{13}{2}$, $\angle A_2OA_1=30^\circ$, $\angle OA_2A_1=90^\circ$인 직각삼각형 OA_1A_2가 있다. 두 꼭짓점은 변 OA_1 위에 있고, 나머지 두 꼭짓점은 변 OA_2와 변 A_1A_2 위에 있는 정사각형의 넓이를 S_1이라 하자. 그림과 같이 변 OA_2를 빗변으로 하고 $\angle A_3OA_2=30^\circ$인 직각삼각형 OA_2A_3이 있다. 두 꼭짓점은 변 OA_2 위에 있고, 나머지 두 꼭짓점은 변 OA_3과 변 A_2A_3 위에 있는 정사각형의 넓이를 S_2라 하자. 변 OA_3을 빗변으로 하고 $\angle A_4OA_3=30^\circ$인 직각삼각형 OA_3A_4가 있다. 두 꼭짓점은 변 OA_3 위에 있고, 나머지 두 꼭짓점은 변 OA_4와 변 A_3A_4 위에 있는 정사각형의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?44)



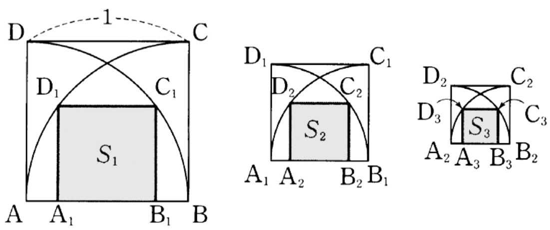
① $53-24\sqrt{3}$　② $54-24\sqrt{3}$
③ $55-24\sqrt{3}$　④ $56-24\sqrt{3}$
⑤ $57-24\sqrt{3}$

개념15

✏ 원/부채꼴이 보이면 교점이나 접점에서 중심까지 이어라.

045.

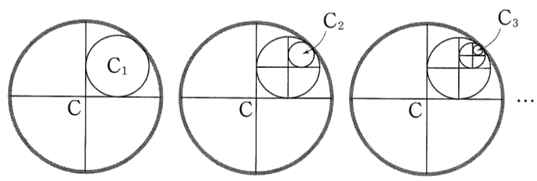
한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD 안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_1B_1C_1D_1$이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 두 점 A_1, B_1을 각각 중심으로 하고 변 A_1B_1을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_2B_2C_2D_2$라 하자. 이 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?45)



① $\frac{3}{8}$　② $\frac{9}{16}$　③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{9}{8}$　⑤ $\frac{23}{16}$

046.

반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1, 원 C_1을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2, 원 C_2를 사분원으로 나누어 한사분원에 내접하는 원을 C_3이라 한다. 이와 같은 과정을 반복하여 얻어진 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k$의 값은?46)



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$　⑤ 1

[수열의 극한B]

1) ⑤
2) ②
3) 24
4) ③
5) 2
6) ⑤
7) ③
8) ④
9) 165
10) ④
11) ③
12) 2
13) ①
14) 6
15) ②
16) ①
17) ③
18) 9
19) 3
20) ③
21) ②
22) ④
23) ⑤
24) ⑤
25) -2 또는 $1 < r \leq 3$
26) $-1 < x < 2$
27) ⑤
28) ②
29) ④
30) ②
31) ④
32) ②
33) ④
34) $\frac{6}{5}$
35) $\frac{7}{3}$
36) ③
37) ④

38) ①

39) ④

40) ②

41) ⑤

42) ⑤

43) ②

44) ⑤

45) ②

46) ③