[수열의 극한]

B01 | 수열의 수렴과 발산

탐구 다음 수열을 계속 쓰면 어떻게 될지 말하여라.

(1) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots \to\ ?$

(2) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \cdots \to\ ?$

(3) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \cdots \to\ ?$

개념1 수열 a_n이 α로 수렴한다.

$\Rightarrow$ n이 무한히 커질 때, a_n이 α에 한없이 가까워진다.

Note $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (혹은 $a_n \to \alpha$)

eg1) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

eg2) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

eg3) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$

eg4) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = ?$

eg5) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^n\frac{1}{n},\ \cdots \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\frac{1}{n} = 0$

개념2 발산 : 수렴하지 않는다.

① 양의 무한대로 발산, ② 음의 무한대로 발산, ③ 진동

cf) 진동하는 형태 :

B02 | 부정형의 극한값

개념1 부정형 : 어떻게 될지 모른다.

① $\frac{\infty}{\infty}$, ② $\frac{0}{0}$, ③ $0\cdot\infty$, ④ $\infty-\infty$ 꼴 등이 존재한다.

cf) $\infty+\infty$, $\frac{k}{\infty}$, $\cdots$

개념2 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값 구하기 : 차수와 최고차항의 계수비교

예제1 다음 수열의 극한값을 구하여라.

(1) $\frac{n^2-3}{n^2+3n}$

(2) $\frac{6n^3+n^2-n+1}{2n^3-4n}$

(3) $\frac{2n^2}{3n^2+4n+1}$

(4) $\frac{5n^3+1}{3n^2-4n}$

(5) $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

(6) $\frac{3n}{n+\sqrt{n^2+1}}$

(7) $\frac{3n^2+n\sqrt{n}}{n^2+n\sqrt{n^2+2n+3}}$

(8) $\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

(9) $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n+2n+3n+\cdots+n^2}$

예제2 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+c}{n^2+2n}=4$일 때, a, b, c의 값을 구하여라.

B02E1 | 무한대−무한대의 극한값

개념1 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값 구하기

① 차수가 다르거나 최고차항의 계수가 다르면 답을 그냥 알 수 있다.

② 차수와 최고차항의 계수가 같으면.. 일단 유리화해 보자.

예제3 다음 수열의 극한값을 구하여라.

(1) $n-n^2$

(2) $\sqrt{n}-n$

(3) $\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}$

(4) $\sqrt{n^2+2n}-2n$

(5) $\sqrt{n^2+2n}-n$

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

(7) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$

(8) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}$

예제4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n}-\sqrt{an^2+bn+c}\right)=2$일 때, a, b, c의 값을 구하여라.

B03 | 극한값의 성질

개념1 두 수열이 수렴할 때는 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기가 가능하다.

eg1) $a_n\to 3$, $b_n\to 2$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2+2b_n)$의 값은?

eg2) 수렴하는 수열 a_n에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-2}{a_n+3}=2$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값은?

eg3) $\lim_{n\to\infty} na_n = 2$일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty} (n+1)a_n = ?$ (2) $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

eg4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 3$일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+2n} a_n = ?$ (2) $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

eg5) $\lim_{n\to\infty} (n^2+2n)a_n = 4$일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = ?$ (2) $\lim_{n\to\infty} na_n = ?$

개념2 0으로 나누는 건 안 돼요.

eg1) a_n과 $a_n + b_n$이 수렴하면 b_n이 수렴한다.

eg2) a_n과 $a_n b_n$이 수렴하면 b_n이 수렴한다.

$\Rightarrow$ a_n이 0이 아닌 값으로 수렴하고 $a_n b_n$이 수렴하면 b_n이 수렴한다.

$\Rightarrow$ a_n이 수렴하고 $a_n b_n$이 발산하면 b_n이 발산한다.

eg3) a_n과 $\frac{b_n}{a_n}$이 수렴하면 b_n이 수렴한다.

eg4) a_n^2이 수렴하면 a_n이 수렴한다.

eg5) a_n이 수렴하면 $\frac{1}{a_n}$이 수렴한다.

$\Rightarrow$ a_n이 0이 아닌 값으로 수렴하면 $\frac{1}{a_n}$이 수렴한다.

개념3 수열의 조작과 수렴성

eg1) a_n이 수렴하면 a_{2n}이 수렴한다.

eg2) a_{2n}이 수렴하면 a_n이 수렴한다.

eg3) a_{n+1}이 수렴하면 a_n이 수렴한다.

eg4) a_n이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{2n+1}+3} = 2$이다. $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$의 값은?

eg5) a_n이 수렴하면 $|a_n|$이 수렴한다.

eg6) $|a_n|$이 수렴하면 a_n이 수렴한다.

eg7) $a_n b_n$이 수렴하면 a_n, b_n 중 적어도 하나는 수렴한다.

B03E1 | 샌드위치 정리

개념1 모든 n에 대하여 $a_n < b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$이다. (등호 조심!)

개념2 모든 n에 대하여 $a_n < b_n < c_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이다.

예제1 다음 물음에 답하여라.

(1) 모든 n에 대하여 $-1 \le a_n \le 1$일 때, $\frac{a_n}{n}$의 극한값은?

(2) 모든 n에 대하여 $\frac{2n}{n+1} < a_n < \frac{2n}{n-1}$이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

(3) 모든 n에 대하여 $n-1 \le a_n \le n+1$일 때, $\frac{a_n+n}{n}$의 극한값은?

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{n}{10}\right]$의 값은?

(5) 모든 n에 대하여 $n < a_n < n+1$이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^2}$의 값은?

B04 | 등비수열의 극한

개념1 $a_n = a_1 r^{n-1}$ $(a_1 > 0)$ 의 극한값은,

① $r > 1$이면 ∞로 발산

② $r = 1$이면 a로 수렴

③ $-1 < r < 1$이면 0으로 수렴

④ $r = -1$이면 진동

⑤ $r < -1$이면 진동

개념2 $\{a_1 r^{n-1}\}$은 $-1 < r \le 1$이거나 $a_1 = 0$이면 수렴한다.

예제1 수열 $\{x(x-3)^{n-1}\}$이 수렴하는 정수 x의 개수를 구하여라.

B04E1 | 등비수열을 포함한 부정형

✓ 차수 대신 밑의 크기를 본다.

※ 무한대로 갈 때 다항함수에 비해서 빠르다는 것도 상식으로 알아두자.

eg) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

예제1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(2^n-3^n)$ (2) $\lim_{n\to\infty}((-3)^n+4^n)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{3^n}$ (4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+4^n}{5^n+3^n}$ (6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}}{3^{n-1}-2^n}$

(7) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^n+2^{2n+1}+1}{4^n+3^n}$ (8) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$

예제2 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$일 때, $f(2)$, $f(1)$, $f(0.5)$의 값을 각각 구하여라.

예제3 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}+x}{x^{2n+1}+1}$일 때, $f(3)$, $f(1)$, $f(-0.1)$의 값을 각각 구하여라.

B05 | 점화식의 수렴

개념1 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이다.

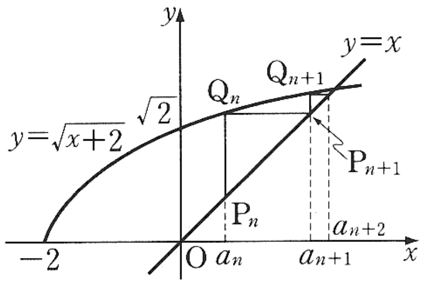
예제1 $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+6$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

예제2 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$

(2) $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}$

B05E1 | 거미줄 그림



예제1 점화식 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ 을 만족하는 수열의 극한값을 오른쪽 그림을 이용하여 찾으라.

예제2 $a_1=1,\ a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$ 을 만족하는 수열의 극한값을 구하여라.

[급수]

B06 | 무한급수의 뜻

탐구1 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$의 값은?

탐구2 $1-1+1-1+1-\cdots$의 값은?

Note $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

개념1 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$

무한급수를 구할 때는 ① S_n(부분합)을 구하고 ② 극한 때린다.

예제1 다음 무한급수의 값을 구하여라.

(1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$

(2) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

(3) $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$

(4) $1-1+1-1+1-1+\cdots$

(5) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots$

B07 | 급수의 수렴과 수열의 수렴성

탐구 $3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots=\frac{9}{2}$ 에서 수열 $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots$ 은?

개념1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 이다.

증명1 $S_n-S_{n-1}=a_n$ 에서

증명2 대우 : 급수의 수렴가능성?

예제1 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n}{n+2}\right)=3$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{a_n+3}$ 의 값을 구하여라.

예제2 $\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$ 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n=4$ 이다. $\lim_{n\to\infty}(S_n+a_n+3)$ 의 값을 구하여라.

개념2 역은 성립하지 않는다.

eg1) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

eg2) $a_n=\frac{1}{n}$

B08 | 무한등비급수

개념1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ $(a_1 > 0)$ 의 극한값은,

① $r > 1$이면 ∞로 발산

② $r = 1$이면 ∞로 발산

③ $-1 < r < 1$이면 $\frac{a_1}{1-r}$으로 수렴

④ $r = -1$이면 진동

⑤ $r < -1$이면 진동

개념2 $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$은 $-1 < r < 1$이거나 $a_1 = 0$이면 $\frac{a_1}{1-r}$으로 수렴한다.

예제1 다음 무한급수의 값을 구하여라.

(1) $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$

(3) $2+\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\cdots$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{4^n}$

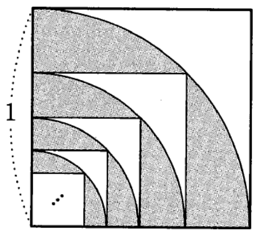
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{4^n}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-(-1)^n)^n}{4^n}$

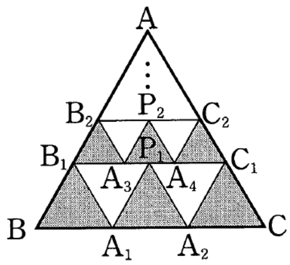
B08E1 | 무한등비급수와 도형

개념1 첫 항 안 구해지면 빠른 포기 추천. 공비는 닮음비로 찾는다.

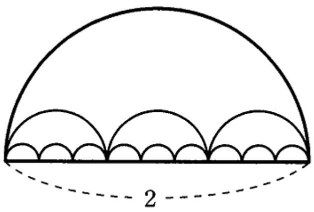
예제1



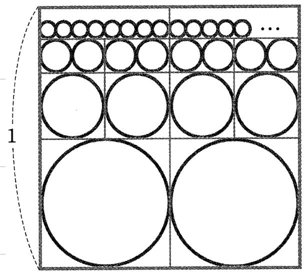
예제2



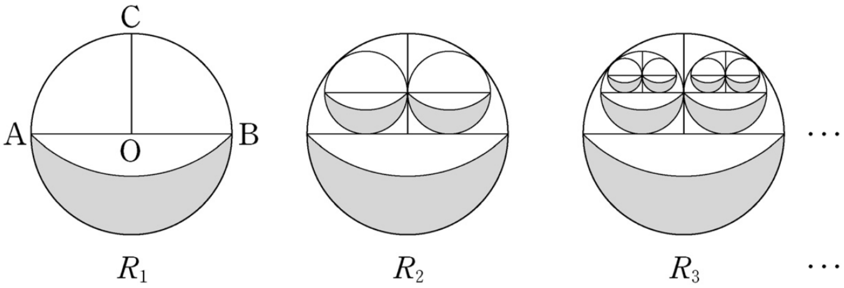
예제3



예제4



예제5



B09 | 등비수열과 등비급수의 수렴성

개념1 $a_1 \neq 0$일 때,

① $\lim_{n\to\infty} a_1 r^{n-1}$은 $-1 < r \leq 1$일 때 수렴하고

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$은 $-1 < r < 1$일 때 수렴한다.

예제1 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 등비수열일 때, 다음의 참거짓을 말하여라.

ㄱ. a_n이 수렴하면 $\dfrac{a_n}{2^n}$이 수렴한다.

ㄴ. a_n이 수렴하면 $2^n a_n$이 수렴한다.

ㄷ. a_n, b_n이 모두 수렴하면 $a_n b_n$이 수렴한다.

ㄹ. a_n, b_n이 모두 수렴하면 $\dfrac{b_n}{a_n}$이 수렴한다.

ㅁ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 a_n이 수렴한다.

ㅂ. a_n이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.

ㅅ. a_n이 수렴하면 $\dfrac{1}{a_n}$이 발산한다.

ㅇ. a_n이 수렴하면 $\dfrac{(-1)^n}{a_n}$이 발산한다.

ㅈ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$이 발산한다.