PSTP [4]

다항함수와 정적분으로 정의된 함수

난이도 ○○○●○ 쓸모 ○○●○○

Problem 001

$a<0$인 실수 a에 대하여 $f(x)=x^2(x-a)$일 때 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 각각

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases},\quad h(x)=\int_{a-1}^{x} g(t)dt$$

이다. 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, $h(a)$의 값은?[1)]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$

④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

Path Through 〉

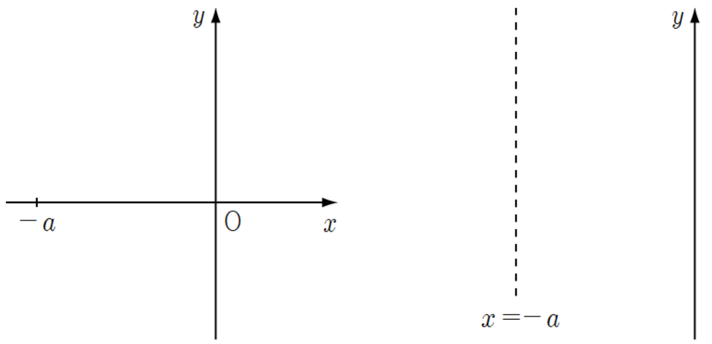
$h(x)=\int_{a-1}^{x} g(t)dt$에서

① $h(a-1)=$ $\boxed{㉠}$

② $h'(x)=$ $\boxed{㉡}$

이다.

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(㉢) $y=g(x)$ (㉣) $y=h(x)$

얘가 $h(x)$의 도함수이므로 $h(x)$는

$x<a$에서 증가,

$a<x<0$에서 감소,

$0<x$에서 증가

한다. 또, $h(a-1)=0$이다.

방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이기 위해서는 $\boxed{㉤}$ $=0$이다.

$h(0)=\int_{a-1}^{0} g(x)dx=0$에서 $\int_{a-1}^{0}\{-x^2(x-a)\}dx=0$이다.

계산하면 $a=$ $\boxed{㉥}$ 이다. $h(a)$의 값은 $\left|\int_{-3}^{0} f(x)dx\right|$이다.

※ a의 값은 사차함수의 성질과 관련한다.

‘함수 $(x-a)^3(x-b)$가 $x=\frac{a+3b}{4}$에서 극값을 가진다.’

와 문제상황을 잘 째려보면 $|a-1|:|a|$가 $4:3$이 되는 각이 뜬다.

Exercise 002

$0<a<b$인 실수 a, b에 대하여 $f(x)=(x-a)(x-b)$일 때, 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=g(x)$는 x축에 접한다.

(나) 방정식 $g(x)=\frac{g(4)}{4}x$의 모든 실근의 합은 12이다.

$g(8)$의 값은?[2)]

① $\frac{16}{3}$ ② 8 ③ $\frac{32}{3}$

④ $\frac{40}{3}$ ⑤ 16

Path Through 〉

$g(0)=0$이고 $g'(x)=f(x)=(x-a)(x-b)$이다.
곡선 $y=g(x)$가 x축에 접하려면 $g(b)=0$이므로

$$\int_0^b (x-a)(x-b)=0$$

이고, 이를 풀면 $\boxed{\quad ㉦ \quad}$이다.

(나)의 방정식은 0, 4를 근으로 가진다. 넣어봐.
이 방정식은 삼차 방정식이므로 나머지 한 실근이 8이다.

$\dfrac{g(4)}{4}=m$이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 x값 0, 4, 8에서 만나므로

$$f(x)-mx=\boxed{\quad ㉧ \quad}$$

이다. $f'(x)=0$의 두 근이 a, $3a$이므로..

※ $b=3a$는 삼차함수의 $2:1$에서 뽑아낼 수 있고,
변곡점에 대한 대칭성에서 (나) 방정식의 근 8을 뽑아낼 수 있다.

극한과 미정계수

난이도 ○●○○○ 쓸모 ○○○●○

Problem 003

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0+}\left(\sqrt{g(x)}-\frac{1}{x^2}\right)=2$

(나) $\lim_{x \to \infty}\{x \times g(x)\}=2$

$f(2)$의 값을 구하여라.[3)]

Path Through 〉

다항식의 극한에서는 대체로

무한대로 갈 때는 최고차항,

0으로 갈 때는 $\boxed{\text{㉠}}$

에 대한 정보를 얻을 수 있다.

이 문항은 $\dfrac{1}{x}$을 이용하여 뒤집어 줬다.

(가)의 식에서 $\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면

$$\lim_{t\to\infty}\left(\boxed{\text{㉡}}\right)=2$$

이다. 수렴하려면 $f(t)=t^4+\cdots$이고 유리화치고 더 째려보면

$$f(t)=t^4+\boxed{\text{㉢}}+\cdots$$

이다.

(나)의 식에서 $\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}=2$$

이다. $f(0)=0$, $f'(0)=\boxed{\text{㉣}}$에서 $f(t)=\cdots+\boxed{\text{㉤}}$이다.

위의 두 사실를 조합하면 $f(x)=x^4+4x^2+2x$이다.

Exercise 004

다항함수 $f(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}+1}=2$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$

$f'(1)=20$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.4)

Exercise 005

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가
다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?5)

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$

(나) $\lim_{x\to 2}\frac{\{g(x)\}^2}{(x-2)f(x)}=\frac{9}{2}$

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 12

Path Through 〉

(가)는 최고차항에 대한 정보를 준다.

$\Rightarrow f(x) = \boxed{\text{ㅂ}} + \cdots$

(나)는 최저차항에 대한 정보를 준다.

$\Rightarrow f(x) = \cdots + \boxed{\text{ㅅ}}$

Path Through 〉

(가)에서 $f(x)g(x) = 2x^3 + \cdots$ 이다.

(나)에서 $x \to 2$이면 분모가 0으로 수렴하므로 $g(2) = 0$이다.
$\{g(x)\}^2 = (x-2)^2(\cdots)$에서 분자가 $\boxed{\text{ㅇ}}$을 인수로 갖는데,
수렴값이 0이 아니므로 $f(2) = 0$이다.

여기서부터 빡치는데, 네 가지 케이스가 가능하다.

Case1) $f(x) = x-2,\ g(x) = (x-2)(2x-\alpha)$

Case2) $f(x) = 2(x-2),\ g(x) = (x-2)(x-\alpha)$

Case3) $f(x) = (x-2)(x-\alpha),\ g(x) = 2(x-2)$

Case4) $f(x) = (x-2)(2x-\alpha),\ g(x) = x-2$

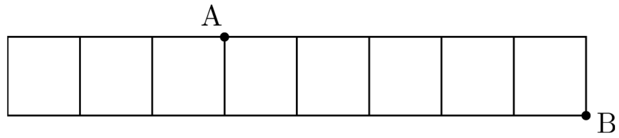
수렴값 $\dfrac{9}{2}$를 가지는 것은 딱봐도 두 번째 케이스.

자동 배열되는 순열

난이도 ○○●○○ 쓸모 ○●○○○

Problem 006

아래 그림과 같은 도로망이 있다.

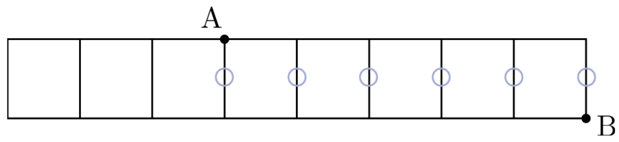


이 도로망을 따라 A지점에서 B지점까지 이동할 때,
한 번 지나간 점은 다시 지나가지 않는 경우의 수를 구하여라.[6)]

Path Through 〉

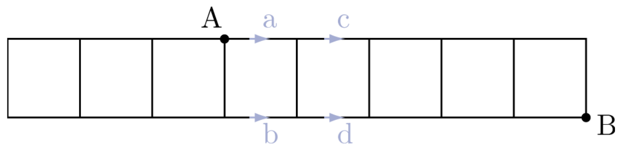
우선 왼쪽으로 이동하지 않는 경우의 수를 구하자. 두 가지로 풀어볼게.

풀이1) 세로 선을 몇 개 타는지를 생각한다.



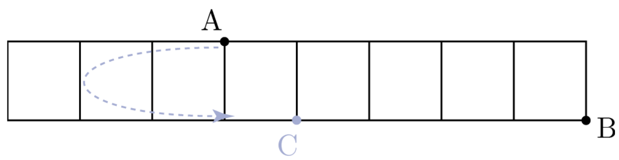
위의 동그라미 친 여섯 개의 세로 선 중 홀수 개를 건너 B지점에 도착할 수 있다.
경우의 수는 ㉠ $=2^5$이다.

풀이2) 한 칸 오른쪽으로 진행할 때, 위 아래 선 중 어느 것을 타는지를 생각한다.



위 그림에서 a와 b 중 하나를 선택하고, c와 d 중 하나를 선택하고, … 를 통해
B지점까지의 경로를 정할 수 있다. 애네를 선택하면 경로는 자동이다. ㉡ 이네.

이제 왼쪽으로 도는 경우의 수를 생각하자. 여지가 거의 없는 것이,
아래 그림과 같이 ㄷ자 형태로 C지점까지 오는 것은 고정이다.



ㄷ자를 그릴 때 어느 세로선을 선택하는지의 경우의 수가 ㉢ 이고,
C지점에서 B지점까지 이동하는 경우의 수는 ㉣ 이다.

왼쪽으로 도는 경로의 수는 ㉤, 정답은 80이다.

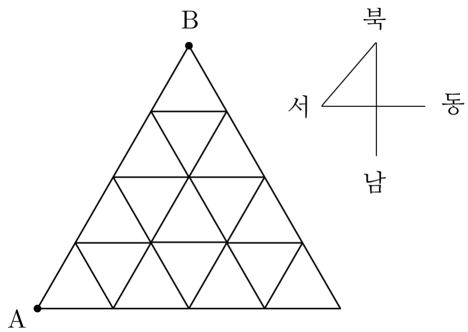
Exercise 007

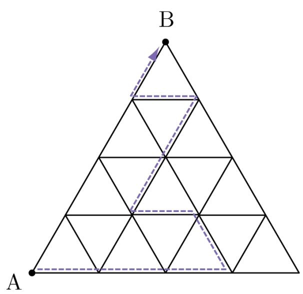
1부터 9까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 구슬이 들어 있는 주머니가 있다. 세 명의 학생 A, B, C가 차례로 주머니에서 구슬을 2개씩을 꺼내어 확인한 후 다시 넣지 않는다. A가 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자 중 큰 숫자가 B가 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자 중 작은 것보다 작고, B가 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자 중 큰 숫자가 C가 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자 중 작은 것보다 작은 경우의 수는?[7]

① 68　　② 72　　③ 76
④ 80　　⑤ 84

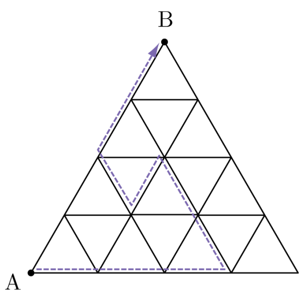
Exercise 008

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 B지점까지 이동할 때, 한 번 지나간 점은 다시 지나가지 않으며 남쪽으로는 이동하지 않는 경우의 수를 구하여라.[8] (예를 들어, [그림1]은 가능한 경로, [그림2]는 불가능한 경로이다.)





[그림1]



[그림2]

Path Through 〉

분류하기 시작하면 꽤 복잡하다. 그냥 ${}_9C_6$으로 6개 선택만 하면 끝.
선택한 6개 중 A, B, C가 무엇을 가져갈 지는 자동으로 결정된다.

이 문제 알지? $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$일 때,

$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$를 만족하는 $f: X \to Y$의 개수는? $\boxed{ㅂ}$개

$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$를 만족하는 $f: X \to Y$의 개수는? $\boxed{ㅅ}$개

Path Through 〉

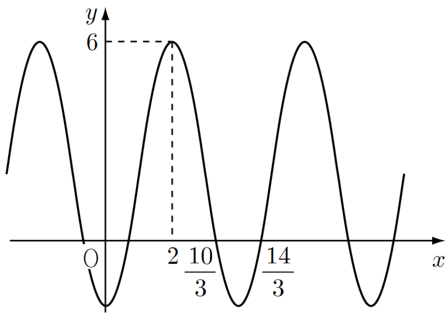
위쪽(북쪽)으로 올라갈 때 어느 길을 탈 것인지만 선택해 주면 된다.
올라가는 길을 선택하면 좌우(동서) 이동은 자동으로 결정된다.

삼각함수의 그래프와 미정계수

난이도 ○○●○○ 쓸모 ●○○○○

Problem 009

함수 $f(x)=a\sin(bx-c)+d$의 그래프가 그림과 같다. $f(x)$가 최대가 되는 가장 작은 양수는 2이며 $f(2)=6$이다. 방정식 $f(x)=0$의 양수인 근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$ 라 하면 $\alpha_2=\dfrac{10}{3}$, $\alpha_3=\dfrac{14}{3}$이다. $a+d+\dfrac{c}{b}$의 값은?[9]
(단, $b>0$이고, $2b\le c<4b$이다.)



① 1
② $\dfrac{4}{3}$
③ $\dfrac{5}{3}$
④ 2
⑤ $\dfrac{7}{3}$

Path Through 〉

대칭성에 의해 $f(x)$는 $\boxed{\quad ㉠ \quad}$에서 최솟값을 가진다. 따라서

$f(x)$의 주기는 4이고, $b=\frac{\pi}{2}$이다.

함수의 최댓값 6은 $\boxed{\quad ㉡ \quad}$이고, $\frac{10}{3}$이 2와 4의 $2:1$ 내분점이므로

$f\left(\frac{10}{3}\right)=\boxed{\quad ㉢ \quad}$이고 이 값이 0이다. 연립하면 $|a|=4$, $d=2$이다.

※ $\sin\frac{\pi}{6}$이나 $\sin\frac{5\pi}{6}$의 값이 $\frac{1}{2}$인 것과 같이 생각해보자.

c의 범위 $b\pi \le c < 2b\pi$에서 함수 $f(x)$는 함수 $a\sin bx+d$를 x축의 양의 방향으로 반주기에서 한주기 사이를 평행이동한 것이다.

$4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+2$는 $x=\boxed{\quad ㉣ \quad}$(단, n은 정수)에서 최대이다.
반주기 2에서 한주기 4 사이를 평행이동 해서는 $x=2$에서 최대를 얻을 수 없다.

일단 뒤집어 줘야 하므로 $a<0$이고, 평행이동은 x축의 방향으로 3만큼이네.
$\boxed{\quad ㉤ \quad}$이므로 $c=\frac{3\pi}{2}$이다.

여기서부터 어렵다.

$$a+d+\frac{c}{b}=-4+2+\frac{\frac{3\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=1$$

이다.

Exercise 010

네 양수 a, b, c, d에 대하여 함수

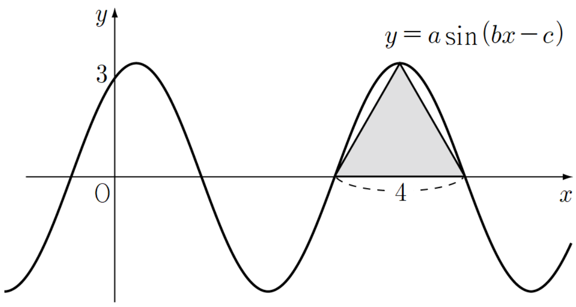
$$f(x)=a\cos\{b(x-c)\}+d$$

의 최솟값은 -1이다. 방정식 $f(x)=0$의 양수인 근을 작은 수부터 크기순으로 세 개를 나열한 것이 2π, 6π, 8π일 때, $\dfrac{bc}{a+d}$의 값은?[10] (단, $0<c<6\pi$이다.)

① $\dfrac{2}{9}\pi$　② $\dfrac{1}{3}\pi$　③ $\dfrac{4}{9}\pi$　④ $\dfrac{5}{9}\pi$　⑤ $\dfrac{2}{3}\pi$

Exercise 011

세 양수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=a\sin(bx-c)$의 그래프는 점 $(0,\ 3)$을 지나고, 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형에 길이 4인 정삼각형을 그림과 같이 내접시킬 수 있다. $\dfrac{a^2c}{b}$의 값은?[11] (단, $c<8b$이고, $x=0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.)



① 30　② 48　③ 60　④ 80　⑤ 96

Path Through 〉

$x=\pi$에서 최소, $x=4\pi$에서 최대이고, 최댓값은 3이다.

$\sin x$의 값이 $\pm\frac{1}{2}$가 될 때를 잘 생각해보자. $a=2$, $b=\frac{1}{3}$, $c=4\pi$, $d=1$이다.

Path Through 〉

최댓값은 $2\sqrt{3}$, 주기는 8이므로 $a=2\sqrt{3}$, $b=\boxed{㉥}$이다.
c를 결정하는 것이 좀 빡치는데, y절편이 3을 지나야 함을 이용하되,
내려가면서 만나는 것이 아니라 올라가면서 만난다는 것에 신경써야 한다.

확률의 대칭성

난이도 ○○●○○ 쓸모 ○○●○○

Problem 012

주머니에 1부터 10까지의 숫자가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있다.
이 주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고,
나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를 a, b, c, d, e라 할 때, a, b, c, d, e 중 가장 작은 자연수가 b, 가장 큰 자연수가 d일 확률은?[12)]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

Path Through 〉

문항의 시행에 따른 전체 경우의 수는 ${}_{10}P_5 = {}_{10}C_5 \times 5!$이지만
선택된 다섯 개의 공이 어떤 것이든 배열의 순서만을 따지고 있기 때문에
전체 경우의 수를 5!로 두고 답을 구할 수 있다.

확률문항을 풀다보면 알게 모르게 대칭성을 쓰는 경우가 자주 있다.
너무 깊게 고민은 하지 말자. 평소에 양쪽으로 풀어보는 버릇 추천.

서로 다른 숫자가 적힌 다섯 개의 공을 일렬로 나열할 때,
가장 작은 숫자가 적힌 공이 2번째 자리에, 가장 큰 자연수가
4번째 자리에 놓일 확률을 구하면 충분하다.

분모를 5!으로 두고 풀어보자. 두 번째, 네 번째 자리에 오는 숫자는
정해져 있으므로 사건의 경우의 수는 $\boxed{㉠}$이다. 답은 $\dfrac{\boxed{㉠}}{5!}$이다.

특정한 다섯 개의 숫자가 각 자리에 놓일 확률을 생각해보자.
가장 작은 숫자가 적힌 공이 2번째 자리에 놓일 확률이 $\boxed{㉡}$,
이때 가장 큰 숫자가 적힌 공이 4번째 자리에 놓일 확률이 $\boxed{㉢}$이므로
답은 $\dfrac{1}{20}$이다.

뭐가 어떻게 대칭성인지를 머누 고민하지 말자.
이렇게 풀어도 된다는 삘이 빡 오면 된다고 할까.

Exercise 013

파란 공 4개, 빨간 공 4개, 흰 공 4개, 모두 12개의 공이 들어 있는 주머니가 있다.
이 주머니에서 임의로 두 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 두 공의 색이 서로 다를 확률은?[13)]

① $\frac{4}{11}$ ② $\frac{5}{11}$ ③ $\frac{6}{11}$

④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{8}{11}$

Exercise 014

빨간색 공 4개, 파란색 공 4개, 노란색 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다.
주머니에서 네 사람 A, B, C, D가 차례로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 한다.
A가 꺼낸 공과 B가 꺼낸 공의 색이 서로 같고, C가 꺼낸 공과 D가 꺼낸 공의 색이 서로 같을 확률은?[14)] (단, 한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

① $\frac{13}{165}$ ② $\frac{1}{11}$ ③ $\frac{17}{165}$

④ $\frac{19}{165}$ ⑤ $\frac{7}{53}$

Path Through 〉

풀이1) 분모를 ${}_{12}C_2$로 깔면, 분자는 $\boxed{\text{㉣}}$이다.

풀이2) 공 하나를 꺼낸 상태를 생각하자. 두 번째 공이 색이 맞을 확률은 $\frac{3}{11}$이다.

※ 색깔마다 공의 개수가 서로 같기 때문에 사용할 수 있는 풀이이다.

Path Through 〉

풀이1) 분모를 $12\times11\times10\times9$로 두고 풀어보자.

풀이2) A가 어떤 공을 꺼내든 사건이 일어날 확률이 일정하므로
분모를 $11\times10\times9$로 두고 풀 수 있다.

세는 방법은 여러 가지가 가능할 것 같다. 하나를 제시하면,

A와 C가 같은 색의 공을 꺼내는 경우의 확률 : $\boxed{\text{㉤}}$

A와 C가 다른 색의 공을 꺼내는 경우의 확률 : $\boxed{\text{㉥}}$

이다.

문제 정답

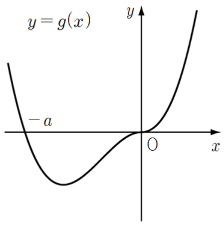
1번	④	2번	③	3번	36	4번	64	5번	②
6번	80	7번	⑤	8번	384	9번	①	10번	③
11번	④	12번	①	13번	⑤	14번	①		

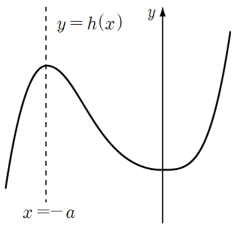
박스 정답

[다항함수와 정적분으로 정의된 함수]

㉠ : 0

㉡ : $g(x)$

㉢ : 

㉣ : 

㉤ : $h(0)$

㉥ : -3

㉦ : $b=3a$

㉧ : $\frac{1}{3}x(x-4)(x-8)$

[극한과 미정계수]

㉠ : 최저차항

㉡ : $\sqrt{f(t)}-t^2$

㉢ : $4t^2$

㉣ : 2

㉤ : $2t$

㉥ : $2x^{n+1}$

㉦ : $4n^2$

㉧ : $(x-2)^2$

[자동 배열되는 순열]

㉠ : ${}_6C_1+{}_6C_3+{}_6C_5$

㉡ : 2^5

㉢ : 3

㉣ : 2^4

㉤ : 48

㉥ : ${}_6C_4$

㉦ : ${}_6H_4$

[삼각함수 그래프와 미정계수]

㉠ : $x=4$

㉡ : $|a|+d$

㉢ : $-\frac{1}{2}|a|+d$

㉣ : $4n+1$

㉤ : $f(x)=-4\sin\left\{\frac{\pi}{2}(x-3)\right\}+2$

㉥ : $\frac{\pi}{4}$

[확률의 대칭성]

㉠ : $3!$

㉡ : $\frac{1}{5}$

㉢ : $\frac{1}{4}$

㉣ : ${}_4C_2\times3$

㉤ : $\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}$

㉥ : $\frac{3}{11}\times\frac{8}{10}\times\frac{3}{9}$