PSTP [2]

정적분으로 정의된 함수의 그래프

난이도 ○○●○○ 쓸모 ○○○●○

Problem 001

$0 < a < b$인 실수 a, b에 대하여 $f(x) = (x-a)(x-b)$일 때, 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y = g(x)$는 x축에 접한다.

(나) 방정식 $g(x) = \dfrac{g(4)}{4}x$의 모든 실근의 합은 12이다.

$g(8)$의 값은?[1)]

① $\dfrac{16}{3}$ ② 8 ③ $\dfrac{32}{3}$

④ $\dfrac{40}{3}$ ⑤ 16

Path Through 〉

정적분으로 정의된 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$는

① $g(0)=0$,
② $g'(x)=f(x)$
로 다루자. $f(x)$의 넓이 조사하다 돌아버리는 수가 있다.

$g'(x)=$ $\boxed{\quad ㉠ \quad}$ 이므로 함수 $g(x)$는 $x=a$, $x=b$에서 극값을 가지는 삼차함수이다.

x축에 접하려면 $g($ $\boxed{㉡}$ $)=0$이어야 한다.

$\Rightarrow \int_0^b (x-a)(x-b)=0$, 풀면 $b=$ $\boxed{㉢}$ 이다.

※ 보통 비율관계가 더 익숙할 듯. 딱 봐도 $a:b=1:3$이거든.

(나)의 방정식은 0, 4를 포함한 세 근을 가지므로 나머지 한 근은 8이다.

기울기 $\dfrac{g(4)}{4}$를 m이라 하면

$g(x)-mx=$ $\boxed{\quad ㉣ \quad}$
이다. $f'(x)=0$의 두 근이 a, $3a$이다. 대입하여 풀면 $a=$ $\boxed{㉤}$ 이고

$$g(x)=\frac{1}{3}x(x-6)^2$$

이다.

※ 삼차함수가 변곡점에 대하여 점대칭임을 째려보면 좋다.

Exercise 002

x에 대한 방정식 $\int_{\alpha}^{x}(t^3-3t+1)dt=0$의 근이 3개가 되도록 하는 실수 α의 개수는?2)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

Exercise 003

$a<0$인 실수 a에 대하여 $f(x)=x^2(x-a)$일 때
두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 각각

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases},$$
$$h(x)=\int_{a-1}^{x}g(t)dt$$

이다. 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, $h(a)$의 값은?3)

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

Path Through 〉

$g(x)=\int_{\alpha}^{x}(t^3-3t+1)dt$라 하자. $y=g'(x)$의 그래프에서

곡선 $y=g(x)$을 먼저 그린 후 근이 3개가 되는 x축의 위치를 잡아보자.

$\Rightarrow$ x축은 $\boxed{\text{ㅂ}}$개가 가능하고 α의 값은 6개가 가능하다.

Path Through 〉

$\int_{a-1}^{0}g(x)dx=0$에서 $a=\boxed{\text{ㅅ}}$이다. $h(a)$의 값은 $\boxed{\text{ㅇ}}$이다.

삼차함수와 비율관계

난이도 ○○○●○ 쓸모 ○○●○○

Problem 004

최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$이고 $f(0)=0$, $f'(0)>1$인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x+t$가 있다. 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 $t=0$, $t=8$에서 불연속이다. $f(8)$의 값을 구하여라.[4)]

Path Through 〉

다항함수에 관련된 스킬들은 공부하고 익혀두자.
킬러 문항에 도전한다면 특히 더 중요하다.

소위 ‘스킬’ 향기가 진하게 나는 내용이지만,
문항들이 이걸 기반으로 만들어지는데 뭐.

무작정 외우지 말고, 증명하고 공부하세용.
‘인수정리’, ‘평행이동에 대한 불변’이 중요함을 이해하면 좋다.

삼차함수의 성질을 내가 생각하는 중요도 순서로 나열하면 다음과 같다.

① 변곡점에 대한 대칭성
② 소위 $2:1$ 또는 $1:1:1$
③ 극댓값과 극솟값의 차이 $\frac{k}{2}(\beta-\alpha)^3$
④ 소위 $1:1:1:1$
⑤ 접할 때 넓이 $\frac{k}{12}(\beta-\alpha)^4$
⑥ 소위 $1:\sqrt{3}$

증명은 각자! 쓰레기 같은 성질이 몇 개 더 있지만.
내 마음 속 랭킹에서는 ③이 남들보다 좀 높은 듯. 좋던데..

곡선 $y=f(x)$는 두 직선 $y=x$와 $\boxed{\quad ㉠ \quad}$에 모두 접해야 한다.
곡선 $y=f(x)$과 직선 $y=x+8$의 접점의 x좌표를 α라 하면
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 접점의 x좌표는 $\boxed{\ ㉡\ }$다. $2:1$에 의하여!
$f(x)-x=\boxed{\qquad ㉢ \qquad}$이고 $f(\alpha)=\boxed{\quad ㉣ \quad}$이므로 $\alpha=2$이다.

Exercise 005

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)+\alpha=f(\beta)+\beta$
(나) $f'(0)=f'(4\alpha)$

$f'(4\alpha)$의 값은?[5)]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

Path Through 〉

점 $(2\alpha,\ f(2\alpha))$는 그거다, 그거. ㅂㄱㅈ.

(가)는 여러 가지 방법으로 다룰 수 있는데,
$f(\alpha)-f(\beta)=\beta-\alpha$가 좋아 보이는군. 기울기 뻘도 나고.

삼차함수의 극댓값과 극솟값의 차이 공식

$$|f(\alpha)-f(\beta)|=\frac{k}{2}(\beta-\alpha)^3$$

알아? 알아두도록 해.

(가)에서 $\beta-\alpha=|f(\alpha)-f(\beta)|$이므로 $\beta-\alpha=\boxed{\quad ㉤ \quad}$이다.
따라서 $\beta-\alpha=2$이다. 나머지는 비율에 짜맞춰서 대충.

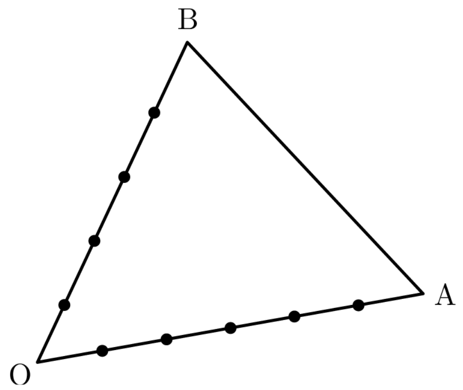
$\alpha=1$, $f'(x)=\boxed{\qquad ㉥ \qquad}$이고 $f'(4\alpha)=f'(4)=\dfrac{9}{2}$이다.

다른 구조로 적당히 세기

난이도 ○○○●○ 쓸모 ○●○○○

Problem 006

그림과 같이 삼각형 OAB의 두 변 OA, OB 위에 각각 5개, 4개의 점이 있다. 변 OA 위의 한 점과 변 OB 위의 한 점을 연결하여 만든 선분 중 2개를 선택할 때, 두 선분이 삼각형의 내부에서 서로 만나는 경우의 수는?[6] (단, 변 OA 위의 한 점과 변 OB 위의 한 점을 연결하여 만든 선분 중 어떠한 세 선분도 한 점에서 만나지 않으며, 변 위에서 만나는 경우는 세지 않는다.)

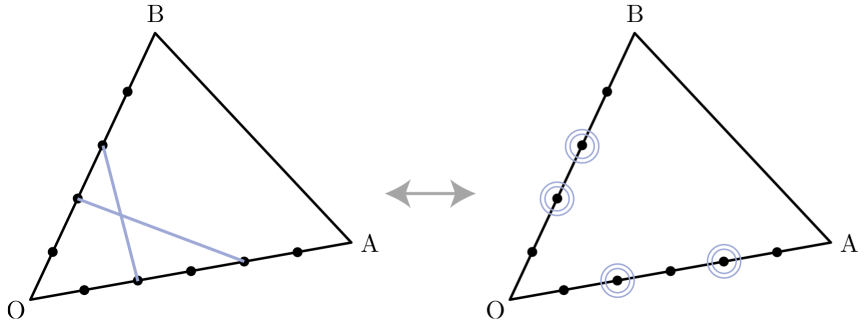


① 30　② 40　③ 50
④ 60　⑤ 70

Path Through 〉

변 OA 위의 한 점과 변 OB 위의 한 점을 연결하여 만든 선분은 모두 ㉠ 개가 존재한다.
이 중 하나를 선택했을 때 그 선분과 만나는 것의 개수를 세는 방법은 너무나 ㉡ 이다.

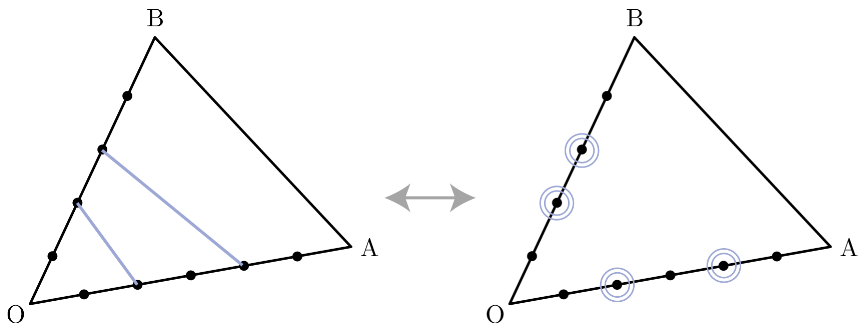
개쩌는 방법으로 셀 수 있다. 교점을 가지는 두 선분 쌍 하나는
변 OA 위의 두 점과 변 OB 위의 두 점 쌍과 일대일 대응된다는 것이다.



따라서 변 OA 위에서 두 개의 점을 고르고, 변 OB 위에서 두 개의 점을 고르는
경우의 수를 구하면 된다. 답은 ㉢ 인 60이다.

이 20개의 선분 중 한 쌍을 고르는 경우의 수는 ㉣ 인 190이다.
이 190개의 경우의 수는 다음 세 가지 케이스 중 하나에 속한다.

Case1) 두 선분이 삼각형의 내부에서 서로 만난다.
경우의 수는 60이다.
Case2) 두 선분이 삼각형의 변 위에서 서로 만난다.
경우의 수는 ㉤ 와 ㉥ 의 합 70이다.
Case3) 두 선분이 삼각형의 변 위나 내부에서 서로 만나지 않는다.
'두 선분이 삼각형 밖에서 만나거나 서로 평행하다.'라고도 할 수 있다.
Case1)과 같은 방법으로 셀 수 있다. ㉦ 이다.



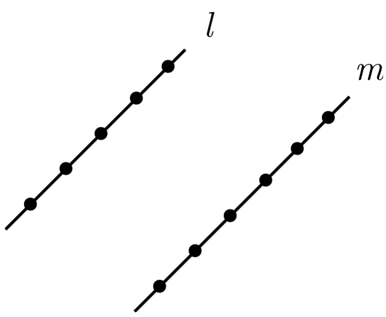
Exercise 007

어느 세 대각선도 한 점에서 만나지 않는 12각형이 있다.
이 12각형의 서로 다른 두 대각선이 만드는 모든 교점의 개수는?[7]
(단, 대각선의 교점은 십이각형의 내부에서 만나는 것만을 의미한다.)

① 435 ② 450 ③ 465
④ 480 ⑤ 495

Exercise 008

그림과 같이 서로 평행한 두 직선 l, m 위에 각각 5개, 6개의 점이 있다.
직선 l 위의 한 점과 직선 m 위의 한 점을 연결하여 만든 선분 중 3개를 선택할 때,
3개의 선분이 서로 만나지 않는 경우의 수는?[8]



① 140 ② 160 ③ 180
④ 200 ⑤ 220

Path Through 〉

점 네 개를 고르면 된다. 신기하지?

Path Through 〉

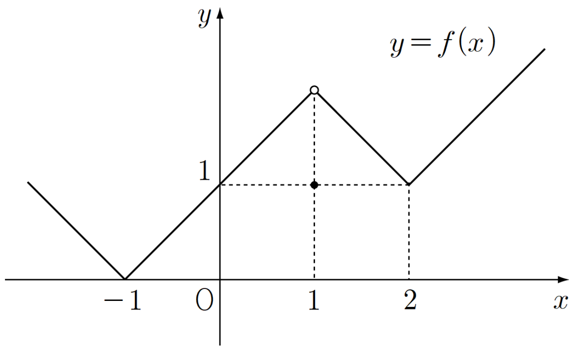
두 선분 위에서 각각 3개의 점을 선택하기만 하면 된다.
그 다음 선분끼리 만나지 않도록 연결하는 방법은 유일하다.

인수를 곱해 연속/미분가능한 함수 만들기

난이도 ○●○○○ 쓸모 ○○●○○

Problem 009

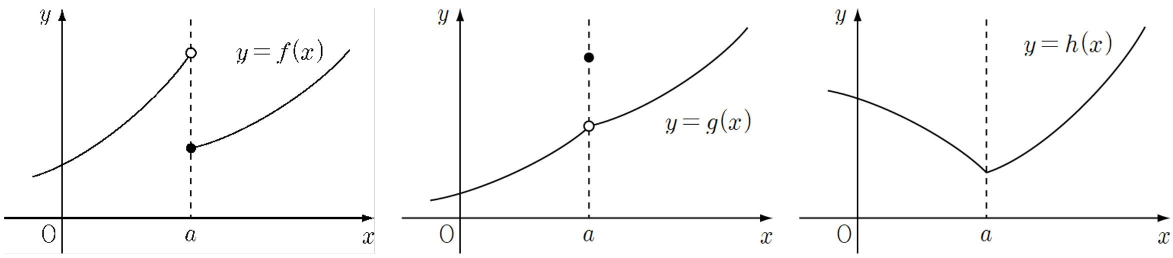
함수 $f(x)=\begin{cases} |x+1| & (x<1) \\ 1 & (x=1) \\ |x-2|+1 & (x>1) \end{cases}$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $g(4)$의 값을 구하여라.[9)]



Path Through 〉

$x=a$에서 좌극한, 우극한이 존재하고 불연속인 함수에 $(x-a)$를 곱하면 연속이 되고, (거의) 미분은 가능하지 않다. $(x-a)^2$을 곱하면 미분가능이 된다. 구체적으로 살펴보자.

다음과 같은 그래프를 가지는 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 있다.



1. 함수 $(x-a)f(x)$는 $x=a$에서 연속이고 미분가능하지 않다.
   $\Rightarrow$ $(x-a)f(x)$의 함숫값, 극한값은 모두 $\boxed{\quad ㉠ \quad}$이다. 연속이네.
   $\Rightarrow$ $x=a$에서 함수 $P(x)$의 미분가능성은 극한 $\boxed{\qquad ㉡ \qquad}$의 존재 확인이다.
   $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(a+h-a)f(a+h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}f(a+h)$라 없당.

2. 함수 $(x-a)^2f(x)$는 $x=a$에서 $\boxed{\quad ㉢ \quad}$하다.

3. 함수 $(x-a)g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.
   $\Rightarrow$ 당연히 연속이기도 하다.
   $\Rightarrow$ 보통 $f(x)$와 같은 형태를 좋아하기 때문에 $g(x)$와 같은 형태는 익숙하지 않다.

4. 함수 $(x-a)h(x)$는 $x=a$에서 $\boxed{\quad ㉣ \quad}$하다.

이제 문제를 째려보자. $g(x)$는 $(x+1)$, $(x-1)$, $(x-2)$를 인수로 가져야 한다.
$g(x)=\boxed{\qquad ㉤ \qquad}$이므로 $g(4)=30$이다.

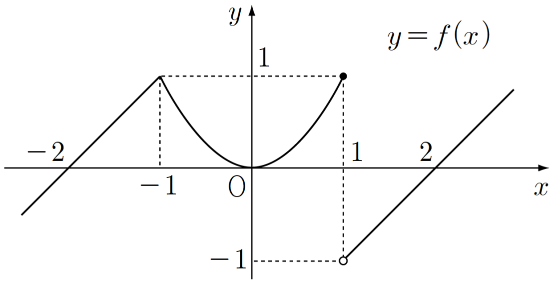
※ 엄밀하게는 위의 1. 2. 3. 4.와 필요한 명제의 방향이 반대이다.
$g(-1)=0$, $g(1)=0$, $g(2)=0$임을 보여야 한다. 확인해보자.

$g(-1)=b$라 가정하자. $f(x)g(x)=\begin{cases}(-x-1)g(x) & (x\le-1)\\(x+1)g(x) & (-1<x<1)\\\cdots & (\cdots)\end{cases}$이다.

함수 $f(x)g(x)$의 $x=-1$에서 좌미분계수는 $-b$, 우미분계수는 b인데
이 값들이 같아야 하므로 $b=0$이다. 나머지는 마찬가지로.

Exercise 010

함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le -1) \\ x^2 & (-1 < x \le 1) \\ x-2 & (x > 1) \end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)f(x-1)$이
불연속인 x값의 개수를 a, 미분가능하지 않은 x값의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값은?10)



① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

Exercise 011　2018년 대구11월 29번

각 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x & (x<3) \\ x^2-6x+10 & (x \ge 3) \end{cases},$$

$$g(x)=f(x-m)+n$$

이다. 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수에 대하여 미분가능할 때,
두 상수 m, n의 곱 mn의 값을 구하여라.11) (단, $m<0$)

Path Through 〉

두 함수 $f(x)$, $f(x-1)$의 그래프를 그리고 문제가 될 수 있는 x값

$-1,\quad 0,\quad 1,\quad 2$

에서 각각 어떤 형태끼리 곱해지는지 살펴보자.

$x=-1$, $x=0$, $x=1$에서는 미분가능,
$x=2$에서는 연속이며 미불가능이 뜬다.

Path Through 〉

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려보자. 예쁜 일대일 대응이다.
함수 $f(x)$는 $x=3$에서, 함수 $g(x)$는 $x=3+m$에서 미분불가능하다.

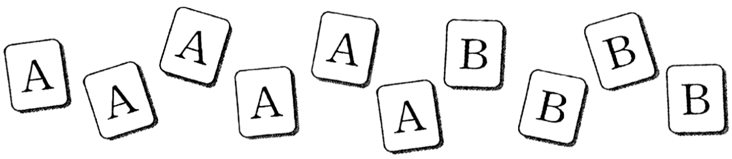
함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는
$g(3)=0$, $f(3+m)=0$이 되어야 한다.

묶음 단위로 관찰하기

난이도 ○○○●○ 쓸모 ○●○○○

Problem 012

A, A, A, A, A, A, B, B, B, B의 문자가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 문자열 'BA'가 두 번 나타나도록 나열되는 경우의 수는?[12] (예를 들어 AAABABBAAB는 조건을 만족시킨다.)



① 60 ② 72 ③ 84
④ 90 ⑤ 108

Path Through 〉

풀이1) A를 여러 개 나열한 것을 (⋯ A ⋯)라 나타내면
'BA'가 두 번 나타내는 배열은 다음이 가능하다.

Case1) (⋯ A ⋯)(⋯ B ⋯)(⋯ A ⋯)(⋯ B ⋯)(⋯ A ⋯)
Case2) (⋯ A ⋯)(⋯ B ⋯)(⋯ A ⋯)(⋯ B ⋯)(⋯ A ⋯)(⋯ B ⋯)
Case3) (⋯ B ⋯)(⋯ A ⋯)(⋯ B ⋯)(⋯ A ⋯)
Case4) (⋯ B ⋯)(⋯ A ⋯)(⋯ B ⋯)(⋯ A ⋯)(⋯ B ⋯)

Case1)을 세자. 앞의 (⋯ A ⋯)에 써진 A의 개수를 x, 두 번째 (⋯ A ⋯)에 써진 A의 개수를 y, 마지막 (⋯ A ⋯)에 써진 A의 개수를 z라 하면,
$x+y+z=6$, (단, x, y, z는 1 이상의 정수)
를 만족하므로 ${}_3\mathrm{H}_3=10$이다.

앞의 (⋯ B ⋯)에 써진 B의 개수를 k, 뒤의 (⋯ B ⋯)에 써진 B의 개수를 l라 하면,
$k+l=4$, (단, k와 l는 $\boxed{\quad ㉠ \quad}$)
를 만족하므로 ${}_2\mathrm{H}_2=3$이다.

※ 물론 얘는 $\boxed{\quad ㉡ \quad}$의 세 가지이므로 중복조합을 띄울 것 까지는 없다.

두 경우의 수의 곱이므로 Case1)의 경우의 수는 30이다.

마찬가지로 Case2), Case3), Case4)의 경우의 수는

Case2) $\#(x+y+z=6)\times\#(k+l+m=4)={}_3\mathrm{H}_1\times{}_3\mathrm{H}_3=30$
Case3) $\#(x+y=6)\times\#(k+l=4)=\boxed{\quad ㉢ \quad}=15$
Case4) $\#(x+y=6)\times\#(k+l+m=4)={}_2\mathrm{H}_4\times{}_3\mathrm{H}_1=15$

이다. 전체 경우의 수는 90이다.

풀이2) B를 깔아두고 생각하자.

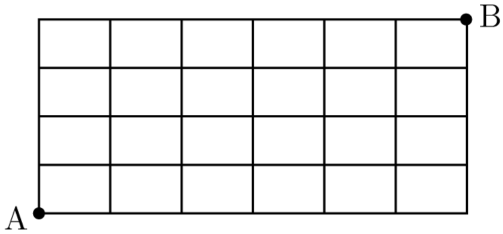
(⋯ A ⋯)B(⋯ A ⋯)B(⋯ A ⋯)B(⋯ A ⋯)B(⋯ A ⋯)

에서 (⋯ A ⋯)에 써진 A의 개수를 앞에서부터 a, b, c, d, e라 하면,
$a+b+c+d+e=6$이고, a는 0 이상의 정수, b, c, d, e 중 2개가 0이다.

b, c, d, e 중 0이 되는 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$이다. 만약 b, c가 0이라면
$a+d+e=6$, (단, d, e는 $\boxed{\quad ㉣ \quad}$)
이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4$이다. 답은 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{H}_4=90$이다.

Exercise 013

그림과 같이 직사각형 모양의 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 갈 때, 진행 방향을 4번 바꾸는 경우의 수를 구하여라.[13] (단, 진행 방향을 바꾼다는 것은 도로의 교차점에서 좌회전 또는 우회전을 한다는 것이다.)



Exercise 014

각각 A, B가 적혀 있는 두 종류의 흰 색의 카드와 C가 적혀 있는 파란 색의 카드가 있다. 이 3종류의 카드 중 중복을 허락하여 6장을 뽑아 일렬로 나열할 때, 카드 색의 변화가 2번 일어나는 경우의 수를 구하여라.[14] (단, 카드 색의 변화라는 것은 흰 색 카드 다음에 파란 색 카드가 놓이거나, 파란 색 카드 다음에 흰 색 카드가 놓이는 것을 의미한다.)

Path Through 〉

출발을 오른쪽으로 하냐 위쪽으로 하냐에 따라 분류한다.

Case1) $(\cdots \rightarrow \cdots)(\cdots \uparrow \cdots)(\cdots \rightarrow \cdots)(\cdots \uparrow \cdots)(\cdots \rightarrow \cdots)$는 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_2$가지이다.

오른쪽 배치는 $[a+b+c=6$이고 a, b, c는 1 이상의 정수$]$의 ${}_3\mathrm{H}_3$ 경우,

위쪽 배치는 $[x+y=4$이고 x, y는 1 이상의 정수$]$의 ${}_2\mathrm{H}_2$ 경우이다.

Case2) $(\cdots \uparrow \cdots)(\cdots \rightarrow \cdots)(\cdots \uparrow \cdots)(\cdots \rightarrow \cdots)(\cdots \uparrow \cdots)$는 ${}_2\mathrm{H}_4 \times {}_3\mathrm{H}_1$가지이다.

Path Through 〉

흰 색이 1장, 2장, 3장, 4장, 5장인 경우로 분류.
삽질이 약간 들어오는군.

문제 정답

1번	③	2번	③	3번	④	4번	16	5번	⑤
6번	④	7번	⑤	8번	④	9번	30	10번	①
11번	30	12번	④	13번	45	14번	248		

박스 정답

[정적분으로 정의된 함수의 그래프]

㉠ : $(x-a)(x-b)$
㉡ : b
㉢ : $3a$
㉣ : $\frac{1}{3}x(x-4)(x-8)$
㉤ : 2
㉥ : 2
㉦ : -3
㉧ : $\left|\int_{-3}^{0} f(x)dx\right|$

[삼차함수와 비율관계]

㉠ : $y=x+8$
㉡ : 3α
㉢ : $\frac{1}{4}x(x-3\alpha)^2$
㉣ : $\alpha+8$
㉤ : $\frac{\frac{1}{2}}{2}|\beta-\alpha|^3$
㉥ : $\frac{3}{2}(x-1)(x-3)$

[다른 구조로 적당히 세기]

㉠ : 20
㉡ : 심한 삽질
㉢ : ${}_5C_2 \times {}_4C_2$
㉣ : ${}_{20}C_2$
㉤ : ${}_4C_1 \times {}_5C_2$
㉥ : ${}_5C_1 \times {}_4C_2$
㉦ : 60

[인수를 곱해 연속/미분가능 만들기]

㉠ : 0
㉡ : $\lim_{h \to 0} \frac{P(a+h)-P(a)}{h}$
㉢ : 미분가능
㉣ : 미분가능
㉤ : $(x+1)(x-1)(x-2)$

[묶음 단위로 관찰하기]

㉠ : 1 이상의 정수
㉡ : $(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$
㉢ : ${}_2H_2 \times {}_2H_4$
㉣ : 1 이상의 정수