

PSTP_[1]



중복조합과 부정방정식

난이도



쓸모



Problem 001

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하여라.¹⁾

(가) $a + b + c + d = 7$

(나) $3^a \times 9^b$ 를 4로 나눈 나머지는 3이다.



Path Through >

중복조합은 한 문항 출제가 확실시 되며, 주관식 쓰면 정답률도 처참하다.
어떤 의미에서는 수능에서 가장 중요한 문항.

특히 케이스 분류를 얹은 부정방정식이 가능성이 높다.

우선 부정방정식이 반사적으로 풀려야 한다.

0 이상 정수 a, b, c 가 $a+b+c=10$ 을 만족시키는 경우의 수는? $\Rightarrow {}_3H_{10} = \boxed{\text{㉠}}$

자연수 a, b, c 가 $a+b+c=10$ 을 만족시키는 경우의 수는? $\Rightarrow \boxed{\text{㉡}} = {}_9C_7$

등이 바로바로 나와야 한다.

문제의 핵심인 조건이해와 케이스분류에 집중해야 하기 때문이다.

$3^a \times 9^b = 3^{a+2b}$ 는 1, 3, 9, 27, 81, ... 의 값을 가질 수 있고,

4로 나눈 나머지는 1, 3, 1, 3, 1, ...가 되네.

따라서 $a+2b$ 의 값으로 가능한 것은 1, 3, 5, 7, ... 이다.

어차피 $2b$ 는 짝수이므로 a 가 홀수면 되겠다. 케이스는

Case1) $a=1 \Rightarrow b+c+d=6$ 이다. 경우의 수는 $\boxed{\text{㉢}}$ 인 28이다.

Case2) $a=3 \Rightarrow \boxed{\text{㉣}}$ 이다. 경우의 수는 ${}_3H_4$ 인 15이다.

Case3) $a=5 \Rightarrow b+c+d=2$ 이다. 경우의 수는 ${}_3H_2$ 인 6이다.

Case4) $a=7 \Rightarrow b+c+d=0$ 이다. 경우의 수는 ${}_3H_0$ 인 $\boxed{\text{㉤}}$ 이다.

답은 네 케이스의 경우의 수의 합인 50이다.



Exercise 002

다음 조건을 만족시키는 -1 이상이고 0 이 아닌 정수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는?²⁾

$$(가) \ a + b + c + d + e = 8$$

$$(나) \ \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{d}{|d|} + \frac{e}{|e|} \leq 1$$

- ① 365 ② 390 ③ 415
④ 440 ⑤ 465

Exercise 003 2016학년도 9월 27번

다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하여라.³⁾

$$(가) \ a + b + c + d = 20$$

(나) a, b, c 는 모두 d 의 배수이다.



Path Through >

$\frac{a}{|a|}, \frac{b}{|b|}, \dots, \frac{e}{|e|}$ 의 값은 각각 -1 또는 1 이다.

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{d}{|d|} + \frac{e}{|e|} \leq 1$$

이므로 $\frac{a}{|a|}, \frac{b}{|b|}, \dots, \frac{e}{|e|}$ 중 -1 인 것의 개수는 이다.

Path Through >

a, b, c 가 모두 d 의 배수이므로 $a = d\alpha, b = d\beta, c = d\gamma$ 라 둘 수 있다.

$$d(\alpha + \beta + \gamma + 1) = 20$$

이므로 d 는 이다. 네 자연수가 2 이상이므로

$$d = 2, \quad d = 4, \quad d = 5$$

의 세 경우가 가능하다.



인수와 다항식의 구성

난이도



쓸모



Problem 004

최고차항의 계수가 k 인 사차함수 $f(x)$ 와 $g(x) = |x|$ 는 다음을 만족시킨다.

(가) x 에 대한 방정식 $f(x) = g(x)$ 는

$-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, a$ 의 세 근만을 가진다.

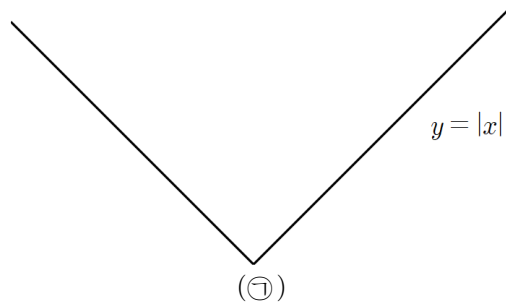
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이다.

$60(k+a)$ 의 값을 구하여라.⁴⁾ (단, a 는 양수이다.)



Path Through >

문제를 썰어보면 $y = f(x)$ 의 그래프는 대충 아래와 같음을 알 수 있다.



$f(x)$ 가 사차함수, 방정식 $f(x) = x$ 가 중근을 두 개 가진다는 것은 개꿀조건이다.

$$f(x) - x = \boxed{\text{㉠}} \dots (*)$$

이라 쓸 수 있다.

나머지는 간단하다. 방정식 $\boxed{\text{㉡}}$ 가 $-\frac{1}{3}$ 을 중근으로 가져야 한다.

$P(x) = f(x) + x$ 라 하면 (*)에서 $P(x) = k\left(x - \frac{2}{3}\right)^2(x - a)^2 + 2x$ 이다.

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 0, \boxed{\text{㉢}} \dots (**)$$

이다. 두 식을 연립하여 풀면 $k = \boxed{\text{㉣}}$, $a = \frac{5}{3}$ 이다.

※ 말리는 방법은 풀이 앞쪽에 $x = -\frac{1}{3}$ 이 등장하는 것이다.

방정식 $f(x) = x$ 의 ‘네 근’을 이용하여 식을 구성하는 것이 좋았다.

(㉢) (**) 대신 다항식 $P(x)$ 가 $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$ 을 인수로 가짐을 이용할 수 있다. 풀어보자.

※ 다항식 문제는 ‘접한다.’는 상황을 ‘중근(인수의 개수)’을 이용하여 다룰 수 있다.

※ ‘중근’이라는 표현은 다항식에서만 사용한다.

방정식 $\sin x + 1 = 0$ 도 ‘중근’을 가지는 뻔이지만,
그렇게 말하지 않는다.



Exercise 005

사차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 점 $(1, f(1))$ 에서 직선 $y = 3$ 에 접한다.
- (나) 점 $(4, f(4))$ 에서 x 축에 접한다.

함수 $|f(x) - 3|$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않을 때, $f(-2)$ 의 값을 구하여라.⁵⁾

Exercise 006

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 와 이차함수 $g(x)$ 가 있다.

방정식 $f(x) = g(x)$ 의 근은 2개이고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이다.

함수 $f(x) - g(x)$ 의 극댓값이 16일 때, 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?⁶⁾

- ① $\frac{512}{15}$ ② $\frac{128}{3}$ ③ $\frac{256}{5}$
- ④ 64 ⑤ $\frac{256}{3}$



Path Through >

x 축보다 $y = 3$ 이 조건이 많다.

- ① $f(1) = 3$,
- ② $f'(1) = 0$,
- ③ $|f(x) - 3|$ 가 한 점에서만 미분불가능

개형 나오쥬? 이 시점에서 $f(x) = \boxed{\text{㉔}}$ 이다.

Path Through >

함수 $h(x) = f(x) - g(x)$ 를 생각하는 것이 개꿀.
 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.

곡선 $y = h(x)$ 는 x 축과 두 점에서 접한다.

이 두 근을 α, β 라고 놓을 필요가 없다.

대충 옆으로 평행이동시켜도 문제의 답을 구할 수 있으므로
0과 α 로 놓거나 $-\alpha$ 와 α 로 놓으면 똑똑.

(㉔) 사차함수 $(x-a)^2(x-b)^2$ 은 $x = \frac{a+b}{2}$ 에서 극댓값을 가짐을 증명해보자.

※ $\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 dx = \frac{1}{30}(b-a)^5$ 을 유도해보자.

평행이동 시켜서 $\boxed{\text{㉕}}$ 로 구하면 되지. $b-a=l$ 로 치환해.



삼각형의 분석

난이도

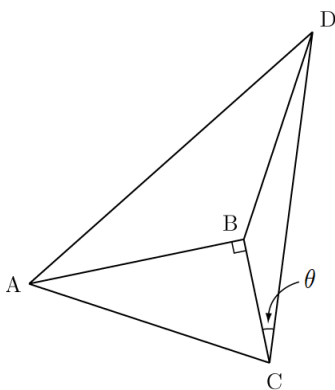


쓸모



Problem 007

그림과 같이 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$, $\overline{BC} = 2$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이고, 점 D는 $\overline{BD} = 2\sqrt{3}$, $\tan(\angle BCD) = \frac{\sqrt{3}}{5}$ 를 만족시킨다. \overline{AD} 의 값을 구하여라. ⁷⁾ (단, $\angle ACD > \frac{\pi}{3}$ 이다.)





Path Through >

여러 가지를 공부하고 계속 연습해야 하는 단원이다. 기본은 ‘삼각형에 대한 3가지 정보가 있으면 삼각형이 결정 된다.’는 사실이다.

애매하게 ‘정보’라는 표현을 썼는데, 정보라는 것은, 삼각형의 세 변의 길이, 세 각이 기본이고 삼각형의 넓이, 내접원 또는 외접원 반지름의 길이 등도 대표적이고 관계식이라든가, 두 변의 길이의 비라든가.. 말하자면 변수 하나를 소거할 수 있는 식이다.

삼각형이 결정된다는 것은, 말 그대로 뭐든지 알 수 있다는 것. 세 변의 길이, 세 각의 크기, 넓이, 내접원/외접원의 반지름의 길이 등을 구할 수 있다. 막상 해보면 덧셈정리가 필요할 수 있고, 거지같은 이차식이 뜰 수 있다.

\overline{BC} , \overline{BD} , $\tan(\angle BCD)$ 에 의해 삼각형 BCD가 결정되었다. 코사인 법칙으로 \overline{CD} , 사인 법칙으로 $\angle CBD$ 를 구할 수 있다.

\overline{AB} , \overline{BD} , $\angle ABD$ 에 의해 삼각형 ABD가 결정되었다. 코사인 치시든가.

$\overline{CD} = x$ 라 하자. 삼각형 BCD에서

$$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 + x^2 - 4x \cos\theta$$

이므로 $x = \boxed{\text{㉠}}$ 이다.

삼각형 BCD에서

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta} = \frac{2\sqrt{7}}{\sin(\angle CBD)}$$

이므로 $\angle CBD = \boxed{\text{㉡}}$ 이다.

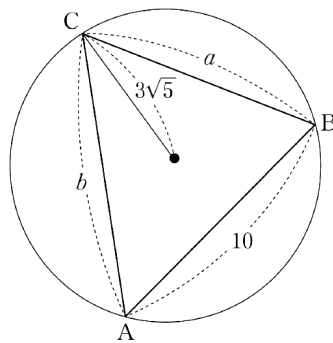
$\angle ABD = \boxed{\text{㉢}}$ 이고 삼각형 ABD에서 $\overline{AD} = \boxed{\text{㉣}}$ 이다.



Exercise 008 2020년 3월(나형) 19번

길이가 각각 10, a , b 인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는
예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이고 $\frac{a^2 + b^2 - ab \cos C}{ab} = \frac{4}{3}$ 일 때, ab 의 값은?8)



- ① 140 ② 150 ③ 160
④ 170 ⑤ 180



Path Through >

3가지 정보

① $\overline{AB} = 10$,

② 외접원의 반지름의 길이 $3\sqrt{5}$,

③ $\frac{a^2 + b^2 - ab \cos C}{ab} = \frac{4}{3}$

이 주어졌다. \Rightarrow 뭐든지 할 수 있다는 자신감.

사인법칙을 돌리면 $\sin C = \boxed{\text{㉠}}$ 이다. $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{2}{3}$ 이고,

코사인법칙에 의해 $a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 100$ 이므로 준 식과 연립하면 $\boxed{\text{㉡}}$ 이다.

계속 풀어? $a = 5\sqrt{6}$ 이야.



극한의 활용

난이도

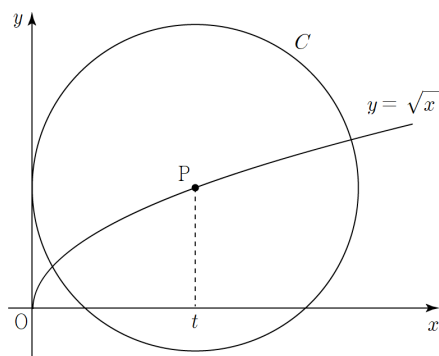


쓸모



Problem 009

그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x}$ 위의 점 $P(t, \sqrt{t})$ 를 중심으로 하고 y 축에 접하는 원 C 가 있다. 원점에서 원 C 위를 움직이는 점까지의 거리 중 최솟값을 $f(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 의 값은? ⁹⁾



- ① $\frac{1}{4}$
- ④ 2

- ② $\frac{1}{2}$
- ⑤ 4

- ③ 1



Path Through >

도형이나 그래프에서 길이 또는 넓이를 함수로 정의하여 극한을 묻는 문항. 조금 예스럽긴 하다. 그러니까 요즘 평가원 스타일이군.

원은 중심과 반지름의 길이를 정해줘야 한다. 문제의 상황은 접한다가 반지름을 결정한다.

반지름의 길이는 $\boxed{\text{㉠}}$, 중심의 위치는 (t, \sqrt{t}) 이다.

‘원점에서 원 C 위를 움직이는 점까지의 거리 중 최솟값’은 자주 봐서 익숙? 선분 OP 의 길이에서 반지름을 빼 준 것이다.

$f(t) = \boxed{\text{㉡}}$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 + t} - t)$ 이다.

$\infty - \infty$ 꼴을 날려주기 위한 유리화.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 + t} - t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\sqrt{t^2 + t} + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \boxed{\text{㉢}}} + 1} = \frac{1}{2} \text{이다.}$$



Exercise 010

그림과 같이 점 $P(t, t)$ ($0 < t < 1$)를 지나고 y 축과 수직인 직선이 두 곡선 $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ 와 만나는 점을 각각 Q , R 라 하자. $\overline{PQ} = f(t)$, $\overline{PR} = g(t)$ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{g(t)}{f(t)}$ 의 값은? ⁽¹⁰⁾

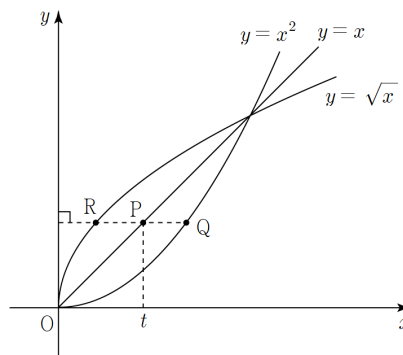
① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

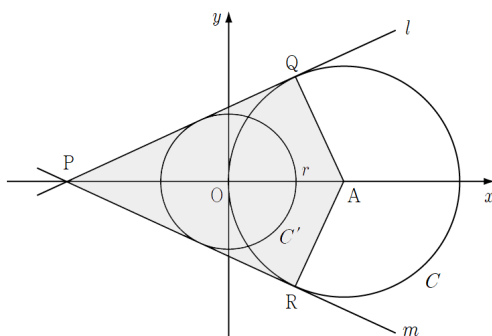
④ 2

⑤ 4



Exercise 011

좌표평면 위의 두 원 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 과 $C': x^2 + y^2 = r^2$ ($0 < r < 1$)에 동시에 접하는 두 직선 l , m 이라 하자. 원 C 의 중심을 A , 직선 l 과 x 축의 교점을 P , 두 직선 l , m 과 원 C 의 접점을 각각 Q , R 이라 할 때 사각형 $AQPR$ 의 넓이를 $S(r)$ 이라 하자. $\lim_{r \rightarrow 1^-} (1-r)S(r)$ 의 값은? ⁽¹¹⁾



① $\frac{1}{2}$

② $\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ 1

④ $\sqrt{2}$

⑤ 2



Path Through >

그냥 보이는 대로

$$f(t) = \boxed{\text{㉔}}, \quad g(t) = t - t^2$$

이다.

Path Through >

풀이는 여러 가지 가능할 것 같다. 점 O에서 선분 AQ에 수선의 발 M, PQ에 수선의 발 N을 내리면 삼각형 POM과 삼각형 PAQ가 서로 닮았다. $\overline{PO} = a$ 라 하면, $a : r = (a+1) : 1$ 이다. a 를 r 에 대한 식으로 나타내면 된다.

$$S(r) = \frac{\boxed{\text{㉕}}}{1-r}$$

이다. 점 O에서 PQ에도 수선의 발을 내리고 싶은데 필요 없네.



점화식의 활용

난이도



쓸모



Problem 012

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 모든 자연수 n 에서

$$b_{n+1} = b_n + (-1)^n a_n$$

인 수열 $\{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_3 + b_4 = 1$

(나) $b_8 + b_9 = 3$

$b_9 - b_5$ 의 값은?¹²⁾

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12



Path Through >

점화식을 다루는 기본은 나열해보는 것이다.

나열하다보면 문제가 놓인 상황이 이해될 때가 자주 있다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 할 때,

$$b_2 = b_1 - a_1,$$

$$b_3 = b_2 + a_2,$$

$$b_4 = b_3 - a_3,$$

$$b_5 = b_4 + a_4,$$

...

에서

$$b_3 = b_1 + d, \quad b_5 = b_3 + d, \quad b_7 = b_5 + d, \quad \dots$$

$$b_4 = b_2 - d, \quad b_6 = b_4 - d, \quad b_8 = b_6 - d, \quad \dots$$

이다. (나)의 식에서 (가)의 식을 빼면

$$(b_9 - b_3) + (b_8 - b_4) = \boxed{\text{㉠}}$$

이므로 $d = 1$ 이다. 구하는 값 $b_9 - b_5$ 는 $2d$ 이므로 4이다.

$a_{n+1} = a_n + f(n)$ 꼴의 점화식은 축차대입 때려서

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

가 된다는 정도는 알지? 이 문항에 적용하기는 좀 뽀뽀한데,

$$b_3 = b_1 - a_1 + a_2 = b_1 + \boxed{\text{㉡}},$$

$$b_4 = b_1 - a_1 + a_2 - a_3 = b_1 + \boxed{\text{㉢}},$$

$$b_8 = b_1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_7 = b_1 - a_1 - 3d,$$

$$b_9 = b_1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_7 + a_8 = b_1 + 4d$$

이므로 (가)에서 $2b_1 - a_1 = 1$ 이고, (나)에서 $2b_1 - a_1 + d = 3$ 이다.

이 문항은 d 로 답을 구할 수 있고, a_1, b_1 은 결정되지 않는구나.



Exercise 013

모든 자연수 n 에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad a_n + a_{n+1} = n$$

$$(나) \quad a_n + b_n = a_{n+1}$$

$a_1 = 0$ 일 때, $\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$ 의 값을 구하여라.¹³⁾

Exercise 014

일반항이 $a_n = 3 + \cos(n\pi)$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 은 다음을 만족시킨다.

$$(가) \quad b_1 = b_2 = 1$$

$$(나) \quad \text{모든 자연수 } n \text{에 대하여 } b_{n+2} = a_n b_n$$

$b_n = 1024$ 를 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하여라.¹⁴⁾



Path Through >

$\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 을 나열해보자. 충분히.

Path Through >

$\{b_n\}$ 은 훌쩍훌쩍 규칙이다. 식으로 쓰려면 좀 헛갈리지.

$$b_{2k-1} = \boxed{\text{㉔}} \text{에서 } k=11 \text{일 때, } b_{21} = 1024 \text{이다.}$$

$$b_{2k} = \boxed{\text{㉕}} \text{에서 } k=6 \text{일 때, } b_{12} = 1024 \text{이다.}$$

$$b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{은 홀수}) \\ \boxed{\text{㉖}} & (n \text{은 짝수}) \end{cases} \text{도 구해보자. 편한 것 쓰면 된다.}$$

문제 정답

1번	50	2번	⑤	3번	32	4번	110	5번	24
6번	①	7번	6	8번	②	9번	②	10번	④
11번	③	12번	①	13번	110	14번	33		

박스 정답

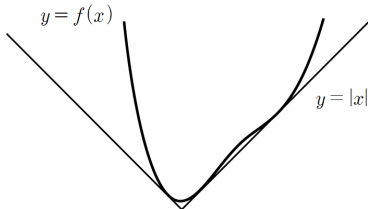
[중복조합과 부정방정식]

- ㉠ : ${}_{12}C_{10}$
- ㉡ : ${}_3H_7$
- ㉢ : ${}_3H_6$
- ㉣ : $b+c+d=4$
- ㉤ : 1
- ㉥ : 두 개 또는 세 개 또는 네 개
- ㉦ : 20의 약수

[삼각형의 분석]

- ㉠ : $2\sqrt{7}$
- ㉡ : $\frac{5}{6}\pi$
- ㉢ : $\frac{2}{3}\pi$
- ㉣ : 6
- ㉤ : $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- ㉥ : $a=b$

[인수와 다항식의 구성]



- ㉠ :
- ㉡ : $k\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x-\alpha)^2$
- ㉢ : $f(x)=-x$
- ㉣ : $P'\left(-\frac{1}{3}\right)=0$
- ㉤ : $\frac{1}{6}$
- ㉥ : $k\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x-\alpha)^2+2x$ 는 $k\left(x+\frac{1}{3}\right)^2(x^2+ax+b)$ 로 나타난다.
- ㉦ : $k(x-1)^3(x-a)+3$
- ㉧ : 미분해봐.
- ㉨ : $\int_0^{b-a} x^2(x-b+a)^2 dx$

[극한의 활용]

- ㉠ : t
- ㉡ : $\sqrt{t^2+t}-t$
- ㉢ : $\frac{1}{t}$
- ㉣ : $\sqrt{t}-t$
- ㉤ : $\sqrt{2r-r^2}$

[점화식의 적용]

- ㉠ : d
- ㉡ : d
- ㉢ : $-a_1-d$
- ㉣ : 2^{k-1}
- ㉤ : 4^{k-1}
- ㉥ : $4^{\frac{n}{2}-1}$