PSTP [1]

중복조합과 부정방정식

난이도 ○○●○○ 쓸모 ○○○●○

Problem 001

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하여라.1)

(가) $a+b+c+d=7$

(나) $3^a \times 9^b$를 4로 나눈 나머지는 3이다.

Path Through 〉

중복조합은 한 문항 출제가 확실시 되며, 주관식 뜨면 정답률도 처참하다.
어떤 의미에서는 수능에서 가장 중요한 문항.

특히 케이스 분류를 얹은 부정방정식이 가능성이 높다.
우선 <u>부정방정식이 반사적으로 풀려야 한다.</u>

0 이상 정수 a, b, c가 $a+b+c=10$을 만족시키는 경우의 수는? $\Rightarrow$ ${}_3H_{10}=\boxed{\quad ㉠ \quad}$

자연수 a, b, c가 $a+b+c=10$을 만족시키는 경우의 수는? $\Rightarrow$ $\boxed{\quad ㉡ \quad}={}_9C_7$

등이 바로바로 나와야 한다.
문제의 핵심인 조건이해와 케이스분류에 집중해야 하기 때문이다.

$3^a\times9^b=3^{a+2b}$는 1, 3, 9, 27, 81, $\cdots$ 의 값을 가질 수 있고,
4로 나눈 나머지는 1, 3, 1, 3, 1, $\cdots$가 되네.
따라서 $a+2b$의 값으로 가능한 것은 1, 3, 5, 7, $\cdots$ 이다.

어차피 $2b$는 짝수이므로 a가 홀수면 되겠다. 케이스는

Case1) $a=1$ $\Rightarrow$ $b+c+d=6$이다. 경우의 수는 $\boxed{\quad ㉢ \quad}$인 28이다.

Case2) $a=3$ $\Rightarrow$ $\boxed{\quad ㉣ \quad}$이다. 경우의 수는 ${}_3H_4$인 15이다.

Case3) $a=5$ $\Rightarrow$ $b+c+d=2$이다. 경우의 수는 ${}_3H_2$인 6이다.

Case4) $a=7$ $\Rightarrow$ $b+c+d=0$이다. 경우의 수는 ${}_3H_0$인 $\boxed{\ ㉤\ }$이다.

답은 네 케이스의 경우의 수의 합인 50이다.

Exercise 002

다음 조건을 만족시키는 -1 이상이고 0이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는?2)

(가) $a+b+c+d+e=8$

(나) $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{d}{|d|}+\frac{e}{|e|}\leq 1$

① 365 ② 390 ③ 415
④ 440 ⑤ 465

Exercise 003 2016학년도 9월 27번

다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하여라.3)

(가) $a+b+c+d=20$

(나) a, b, c는 모두 d의 배수이다.

Path Through 〉

$\frac{a}{|a|}$, $\frac{b}{|b|}$, $\cdots$, $\frac{e}{|e|}$의 값은 각각 -1 또는 1이다.

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{d}{|d|}+\frac{e}{|e|}\leq 1$$

이므로 $\frac{a}{|a|}$, $\frac{b}{|b|}$, $\cdots$, $\frac{e}{|e|}$ 중 -1인 것의 개수는 $\boxed{\quad ㅂ \quad}$이다.

Path Through 〉

a, b, c가 모두 d의 배수이므로 $a=d\alpha$, $b=d\beta$, $c=d\gamma$라 둘 수 있다.

$$d(\alpha+\beta+\gamma+1)=20$$

이므로 d는 $\boxed{\quad ㅅ \quad}$이다. 네 자연수가 2 이상이므로

$$d=2,\quad d=4,\quad d=5$$

의 세 경우가 가능하다.

인수와 다항식의 구성

난이도 ○○○●○ 쓸모 ○○○●○

Problem 004

최고차항의 계수가 k인 사차함수 $f(x)$와 $g(x)=|x|$는 다음을 만족시킨다.

(가) x에 대한 방정식 $f(x)=g(x)$는

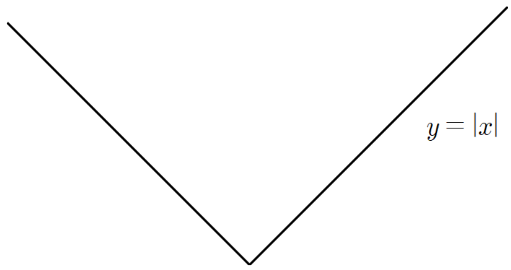
$-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, a의 세 근만을 가진다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$이다.

$60(k+a)$의 값을 구하여라.[4] (단, a는 양수이다.)

Path Through 〉

문제를 째려보면 $y=f(x)$의 그래프는 대충 아래와 같음을 알 수 있다.



(㉠)

$f(x)$가 사차함수, 방정식 $f(x)=x$가 중근을 두 개 가진다는 것은 개꿀조건이다.

$f(x)-x=$ $\boxed{\quad ㉡ \quad}$ $\cdots$ $(*)$

이라 쓸 수 있다.

나머지는 간단하다. 방정식 $\boxed{\quad ㉢ \quad}$가 $-\dfrac{1}{3}$을 중근으로 가져야 한다.

$P(x)=f(x)+x$라 하면 $(*)$에서 $P(x)=k\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2(x-a)^2+2x$이다.

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{3}\right)=0$, $\boxed{\quad ㉣ \quad}$ $\cdots$ $(**)$

이다. 두 식을 연립하여 풀면 $k=\boxed{㉤}$, $a=\dfrac{5}{3}$이다.

※ 말리는 방법은 풀이 앞쪽에 $x=-\dfrac{1}{3}$이 등장하는 것이다.
방정식 $f(x)=x$의 '네 근'을 이용하여 식을 구성하는 것이 좋았다.

(㉥) $(**)$ 대신 다항식 $\mathrm{P}(x)$가 $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2$을 인수로 가짐을 이용할 수 있다. 풀어보자.

※ 다항식 문제는 '접한다.'는 상황을 '중근(인수의 개수)'을 이용하여 다룰 수 있다.

※ '중근'이라는 표현은 다항식에서만 사용한다.
방정식 $\sin x+1=0$도 '중근'을 가지는 삘이지만,
그렇게 말하지 않는다.

Exercise 005

사차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ f(1))$에서 직선 $y=3$에 접한다.
(나) 점 $(4,\ f(4))$에서 x축에 접한다.

함수 $|f(x)-3|$가 한 점에서만 미분가능하지 않을 때, $f(-2)$의 값을 구하여라.5)

Exercise 006

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 있다.
방정식 $f(x)=g(x)$의 근은 2개이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$이다.
함수 $f(x)-g(x)$의 극댓값이 16일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?6)

① $\frac{512}{15}$ ② $\frac{128}{3}$ ③ $\frac{256}{5}$

④ 64 ⑤ $\frac{256}{3}$

Path Through 〉

x축보다 $y=3$이 조건이 많다.

① $f(1)=3$,
② $f'(1)=0$,
③ $|f(x)-3|$가 한 점에서만 미분불가능

개형 나오쥬? 이 시점에서 $f(x)=$ $\boxed{\quad ㉦ \quad}$ 이다.

Path Through 〉

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$를 생각하는 것이 개꿀.
$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.

곡선 $y=h(x)$는 x축과 두 점에서 접한다.

이 두 근을 α, β라고 놓을 필요가 없다.

대충 옆으로 평행이동시켜도 문제의 답을 구할 수 있으므로
0과 α로 놓거나 $-\alpha$와 α로 놓으면 똑똑.

(◎) 사차함수 $(x-a)^2(x-b)^2$은 $x=\dfrac{a+b}{2}$에서 극댓값을 가짐을 증명해보자.

※ $\displaystyle\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2dx=\frac{1}{30}(b-a)^5$을 유도해보자.

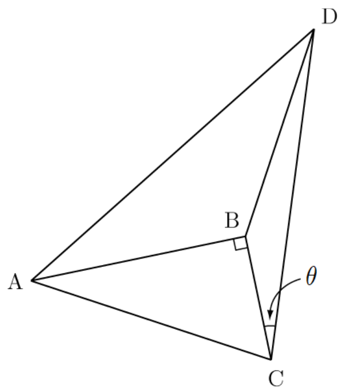
평행이동 시켜서 $\boxed{\quad ㉧ \quad}$ 로 구하면 되지. $b-a=l$로 치환해.

삼각형의 분석

난이도 ○○●○○ 쓸모 ○○○●○

Problem 007

그림과 같이 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2$, $\angle B=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고, 점 D는 $\overline{BD}=2\sqrt{3}$, $\tan(\angle BCD)=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$를 만족시킨다. $\overline{AD}$의 값을 구하여라.[7] (단, $\angle ACD > \dfrac{\pi}{3}$이다.)



Path Through 〉

여러 가지를 공부하고 계속 연습해야 하는 단원이다. 기본은
'삼각형에 대한 3가지 정보가 있으면 삼각형이 결정 된다.'
는 사실이다.

애매하게 '정보'라는 표현을 썼는데, 정보라는 것은,
삼각형의 세 변의 길이, 세 각이 기본이고
삼각형의 넓이, 내접원 또는 외접원 반지름의 길이 등도 대표적이고
관계식이라든가, 두 변의 길이의 비라든가..
말하자면 변수 하나를 소거할 수 있는 식이다.

삼격형이 결정된다는 것은, 말 그대로 뭐든지 알 수 있다는 것.
세 변의 길이, 세 각의 크기, 넓이, 내접원/외접원의 반지름의 길이 등을 구할 수 있다.
막상 해보면 덧셈정리가 필요할 수 있고, 거지같은 이차식이 뜰 수 있다.

$\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\tan(\angle BCD)$에 의해 삼각형 BCD가 결정되었다.
코사인 법칙으로 $\overline{CD}$, 사인 법칙으로 $\angle CBD$를 구할 수 있다.

$\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\angle ABD$에 의해 삼각형 ABD가 결정되었다.
코사인 치시든가.

$\overline{CD}=x$라 하자. 삼각형 BCD에서

$$(2\sqrt{3})^2=2^2+x^2-4x\cos\theta$$

이므로 $x=\boxed{\quad ㉠ \quad}$이다.

삼각형 BCD에서

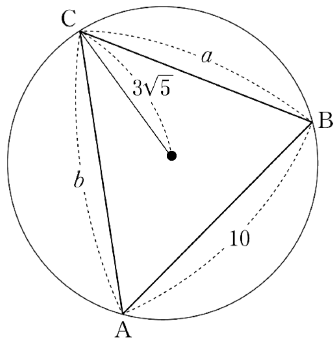
$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{7}}{\sin(\angle CBD)}$$

이므로 $\angle CBD=\boxed{\quad ㉡ \quad}$이다.

$\angle ABD=\boxed{\quad ㉢ \quad}$이고 삼각형 ABD에서 $\overline{AD}=\boxed{\ ㉣\ }$이다.

Exercise 008 2020년 3월(나형) 19번

길이가 각각 10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고 $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$일 때, ab의 값은?[8)]



① 140 ② 150 ③ 160
④ 170 ⑤ 180

Path Through 〉

3가지 정보

① $\overline{\text{AB}}=10$,

② 외접원의 반지름의 길이 $3\sqrt{5}$,

③ $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$

이 주어졌다. ⇒ 뭐든지 할 수 있다는 자신감.

사인법칙을 돌리면 $\sin C=$ $\boxed{\text{ㅁ}}$ 이다. $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{2}{3}$이고,

코사인법칙에 의해 $a^2+b^2-2ab\cos C=100$이므로 준 식과 연립하면 $\boxed{\text{ㅂ}}$ 이다.

계속 풀어? $a=5\sqrt{6}$이야.

부분적분의 의미

난이도 ○○●○○ 쓸모 ○○○●○

Problem 009

양의 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 이계도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f''(1)=f'(1)=1$
(나) 모든 양수 x에 대하여 $f(ex)=e\{f(x)+x\}$이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\int_{1}^{e^2}\{\ln t\times g''(t)\}dt$의 값은?9)

① $-e$ ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ e

Path Through 〉

부분적분은 $\int f(x)g(x)dx$를 구하는 문제를 $\int f'(x)G(x)dx$를 구하는 문제로 바꿔준다.
다시 말해, '두 함수의 곱'의 부정적분 문제를 '하나는 미분, 하나는 적분한 함수의 곱'의 부정적분 문제로 바꿔준다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$이고 y절편은 $\boxed{\quad ㉠ \quad}$이다.

$g(t)=-tf'(t)+f(t)$에서 $g'(t)=\boxed{\quad ㉡ \quad}$이고
$g''(t)$를 나타내려고 보니까 삼계도가 떠서 좀 부담스럽네.

구하려는 식 $\int \{\ln t \times g''(t)\}dt$를 보니까 $\ln t$의 미분인 $\frac{1}{t}$과
$g''(t)$의 적분인 $g'(t)=-tf''(t)$의 곱이 개꿀이네. 풀부분적분각이다.

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} \{\ln t \times g''(t)\}dt &= [\ln t \times g'(t)]_1^{e^2} - \boxed{\qquad ㉢ \qquad} \\ &= [\ln t \times g'(t)]_1^{e^2} + \int_1^{e^2} f''(t)dt\end{aligned}$$

이다. $g'(e^2)=-e^2 f''(e^2)$이므로 정리하면 $\boxed{\qquad ㉣ \qquad}$이다.

(나)의 식에서 $f(ex)$가 $f(x)$로 나타나므로
$x=1$을 대입하면 $x=e$에서의 정보를,
$x=e$를 대입하면 $x=e^2$에서의 정보를
얻을 수 있다.

(나)의 항등식을 미분하면 $f'(ex)=f'(x)+1$,
다시 한 번 미분하면 $\boxed{\qquad ㉤ \qquad}$이다.

두 식에 각각 $x=1$, $x=e$를 대입하면 $f'(e^2)=\boxed{\ ㉥\ }$, $f''(e^2)=\boxed{\ ㉦\ }$이다.
답은 0이다.

Exercise 010

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$g(x)=\int_1^x \frac{f'(t)}{t}dt$$

이다. $f(1)=2$, $\int_1^4 \frac{f(x)}{x^2}dx=15$일 때, $\int_1^4 g(x)dx$의 값을 구하여라.10)

Exercise 011 2017학년도 9월 21번

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가
모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$

(나) $g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$

$f(1)=\frac{1}{e}$일 때, $f(2)-g(2)$의 값은?11)

① $\frac{16}{3e^4}$ ② $\frac{6}{e^4}$ ③ $\frac{20}{3e^4}$

④ $\frac{22}{3e^4}$ ⑤ $\frac{8}{e^4}$

Path Through 〉

$g(1)=0$, $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{x}$이다. 부분적분법을 이해하면 아래의 계산이 그럴 듯하다.

① $\displaystyle\int_1^4 g(x)dx$를 $\displaystyle\int_1^4 \{1\times g(x)\}dx$로 보면 1을 적분, $g(x)$를 미분하고 싶다.

② $\displaystyle\int_1^4 \frac{f(x)}{x^2}dx$는 $\dfrac{1}{x^2}$을 적분, $f(x)$를 미분하고 싶다는 생각이 드는군.

Path Through 〉

$\displaystyle\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$ 를

$$\int_1^x \left\{te^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right\}dt$$

로 보고 te^{t^2}를 적분, $\dfrac{f(t)}{t}$를 미분하는 부분적분.

t를 곱하고 나눠보니, te^{t^2}은 적분이 되고, $\dfrac{f(t)}{t}$는 미분이 되니 개꿀이다.

여러 가지 말리는 루트를 안 타는 것이 중요한 문제이긴 하지만.

점화식의 활용

난이도 ○●○○○ 쓸모 ○○○○●

Problem 012

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 모든 자연수 n에서

$$b_{n+1}=b_n+(-1)^n a_n$$

인 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_3+b_4=1$
(나) $b_8+b_9=3$

b_9-b_5의 값은?12)

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

Path Through 〉

<u>점화식을 다루는 기본은 나열해보는 것이다.</u>
나열하다보면 문제가 놓인 상황이 이해될 때가 자주 있다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

$b_2 = b_1 - a_1$,

$b_3 = b_2 + a_2$,

$b_4 = b_3 - a_3$,

$b_5 = b_4 - a_4$,

$\cdots$

에서

$b_3 = b_1 + d,\ b_5 = b_3 + d,\ b_7 = b_5 + d,\ \cdots$

$b_4 = b_2 - d,\ b_6 = b_4 - d,\ b_8 = b_6 - d,\ \cdots$

이다. (나)의 식에서 (가)의 식을 빼면

$(b_9 - b_3) + (b_8 - b_4) = \boxed{㉠}$

이므로 $d = 1$이다. 구하는 값 $b_9 - b_5$는 $2d$이므로 4이다.

$a_{n+1} = a_n + f(n)$ 꼴의 점화식은 축차대입 때려서

$$a_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

가 된다는 정도는 알지? 이 문항에 적용하기는 좀 빡빡한데,

$b_3 = b_1 - a_1 + a_2 = b_1 + \boxed{㉡}$,

$b_4 = b_1 - a_1 + a_2 - a_3 = b_1 + \boxed{㉢}$,

$b_8 = b_1 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_7 = b_1 - a_1 - 3d$,

$b_9 = b_1 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_7 + a_8 = b_1 + 4d$

이므로 (가)에서 $2b_1 - a_1 = 1$이고, (나)에서 $2b_1 - a_1 + d = 3$이다.
이 문항은 d로 답을 구할 수 있고, a_1, b_1은 결정되지 않는구나.

Exercise 013

모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_n + a_{n+1} = n$
(나) $a_n + b_n = a_{n+1}$

$a_1 = 0$일 때, $\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$의 값을 구하여라.[13)]

Exercise 014

일반항이 $a_n = 3 + \cos(n\pi)$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 다음을 만족시킨다.

(가) $b_1 = b_2 = 1$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $b_{n+2} = a_n b_n$

$b_n = 1024$를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하여라.[14)]

Path Through 〉

$\{a_n\}$과 $\{b_n\}$을 나열해보자. 충분히.

Path Through 〉

$\{b_n\}$은 홀짝홀짝 규칙이다. 식으로 쓰려면 좀 헷갈리지.

$b_{2k-1}=\boxed{㉣}$에서 $k=11$일 때, $b_{21}=1024$이다.
$b_{2k}=\boxed{㉤}$에서 $k=6$일 때, $b_{12}=1024$이다.

$b_n=\begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & (n\text{은 홀수}) \\ \boxed{㉥} & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$도 구해보자. 편한 것 쓰면 된다.

문제 정답

1번	50	2번	⑤	3번	32	4번	110	5번	24
6번	①	7번	6	8번	②	9번	③	10번	54
11번	③	12번	①	13번	110	14번	33		

박스 정답

[중복조합과 부정방정식]

㉠ : ${}_{12}\mathrm{C}_{10}$

㉡ : ${}_{3}\mathrm{H}_{7}$

㉢ : ${}_{3}\mathrm{H}_{6}$

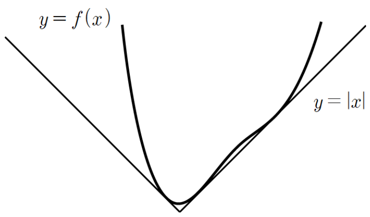
㉣ : $b+c+d=4$

㉤ : 1

㉥ : 두 개 또는 세 개 또는 네 개

㉦ : 20의 약수

[인수와 다항식의 구성]

㉠ : 

㉡ : $k\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x-\alpha)^2$

㉢ : $f(x)=-x$

㉣ : $\mathrm{P}'\left(-\frac{1}{3}\right)=0$

㉤ : $\frac{1}{6}$

㉥ : $k\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x-\alpha)^2+2x$는

$k\left(x+\frac{1}{3}\right)^2(x^2+ax+b)$로 나타난다.

㉦ : $k(x-1)^3(x-a)+3$

㉧ : 미분해봐.

㉨ : $\int_0^{b-a} x^2(x-b+a)^2dx$

[삼각형의 분석]

㉠ : $2\sqrt{7}$

㉡ : $\frac{5}{6}\pi$

㉢ : $\frac{2}{3}\pi$

㉣ : 6

㉤ : $\frac{\sqrt{5}}{3}$

㉥ : $a=b$

[부분적분의 의미]

㉠ : $-tf'(t)+f(t)$

㉡ : $-tf''(t)$

㉢ : $\int_1^{e^2}\left\{\frac{1}{t}\times(-tf''(t))\right\}dt$

㉣ : $-2e^2f''(e^2)+f'(e^2)-f'(1)$

㉤ : $ef''(ex)=f''(x)$

㉥ : 3

㉦ : $\frac{1}{e^2}$

[점화식의 적용]

㉠ : d

㉡ : d

㉢ : $-a_1-d$

㉣ : 2^{k-1}

㉤ : 4^{k-1}

㉥ : $4^{\frac{n}{2}-1}$