2020학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ③	02. ⑤	03. ③	04. ⑤	05. ②
06. ①	07. ②	08. ④	09. ①	10. ④
11. ④	12. ⑤	13. ④	14. ⑤	15. ③
16. ③	17. ②	18. ①	19. ①	20. ②
21. ⑤	22. 28	23. 6	24. 8	25. 10
26. 9	27. 21	28. 75	29. 49	30. 42

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^3 \div 81^{\frac{1}{2}}$

$=3^3 \div (3^4)^{\frac{1}{2}}$

$=3^3 \div 3^{4\times\frac{1}{2}}$

$=3^3 \div 3^2$

$=3^{3-2}$

$=3$

정답 ③

2. **출제의도** : 집합의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$n(A\cap B)=1$이고

$1\in B$, $1\notin (A\cap B)$이므로

$a\in (A\cap B)$이다.

즉, $a\in A$이므로

$a=2$ 또는 $a=3$ 또는 $a=4$

따라서 모든 a의 값의 합은

$2+3+4=9$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 합성함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(g\circ f)(1)$

$=g(f(1))$

$=g(4)$

$=3$

정답 ③

4. **출제의도** : 충분조건이 되기 위한 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p : $a-1\le x\le a+1$

이므로

$P=\{x|a-1\le x\le a+1\}$

$Q=\{x|x<10\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면

$P\subset Q$이어야 하므로

$a+1<10$, 즉 $a<9$이어야 한다.

따라서 정수 a의 최댓값은 8이다.

정답 ⑤

5. **출제의도** : 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

두 자리의 자연수가 2의 배수이므로

일의 자리의 수는

0, 2, 4, 6, 8

중 하나이다.

조건 (나)에서

십의 자리의 수는 6의 약수이므로

1, 2, 3, 6

중 하나이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1 = 5 \times 4 = 20$

정답 ②

6. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_0^2 (3x^2+6x)dx$

$= [x^3+3x^2]_0^2$

$= 8+12$

$= 20$

정답 ①

7. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1 = a_3 + 8$에서

$a_1 = (a_1+2d)+8$

이므로

$d = -4$

이때 $2a_4 - 3a_6 = 3$에서

$2(a_1+3d) - 3(a_1+5d)$

$= -a_1 - 9d$

$= -a_1 + 36 = 3$

따라서 $a_1 = 33$이므로

$a_n = 33 + (n-1)(-4) = -4n+37$

$a_k = -4k+37 < 0$에서

$k > \frac{37}{4} = 9.25$

따라서 자연수 k의 최솟값은 10이다.

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1 = a_3 + 8$에서

$a_3 - a_1 = 2d = -8$

이므로

$d = -4$

이때 $a_4 - a_6 = a_1 - a_3 = 8$이므로

$2a_4 - 3a_6 = 2(a_4 - a_6) - a_6$

$= 2 \times 8 - a_6 = 3$

에서

$a_6 = 13$

따라서

$a_9 = a_6 + 3d = 13 + 3(-4) = 1 > 0$,

$a_{10} = a_6 + 4d = 13 + 4(-4) = -3 < 0$

이므로 $a_k = -4k+37 < 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 10이다.

정답 ②

8. **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(A^C)$

$= 1 - \mathrm{P}(A)$

$= 1 - \frac{7}{10}$

$= \frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(A^C \cap B^C)$

$= \mathrm{P}((A \cup B)^C)$

$= 1 - \mathrm{P}(A \cup B)$

$= 1 - \frac{9}{10}$

$= \frac{1}{10}$

따라서

$\mathrm{P}(B^C|A^C)$

$=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}$

$=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}$

$=\dfrac{1}{3}$

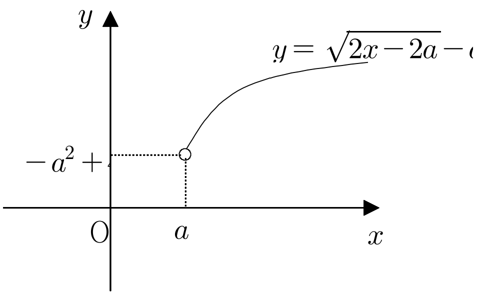
정답 ④

9. **출제의도** : 무리함수의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지날 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

정의역이 $\{x|x>a\}$인 함수

$y=\sqrt{2x-2a}-a^2+4$의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $a\ge 0$이고 $-a^2+4\ge 0$을 만족해야 한다.

이때, $-a^2+4\ge 0$에서 $a^2\le 4$이므로

$-2\le a\le 2$

즉, $0\le a\le 2$이므로 실수 a의 최댓값은 2이다.

정답 ①

10. **출제의도** : 수열의 극한의 대소 관계에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$의 각 변을 제곱하면

$9n^2+4<na_n<(3n+2)^2$

위 등식의 각 변을 n^2으로 나누면

$\dfrac{9n^2+4}{n^2}<\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{9n^2+12n+4}{n^2}$

이때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^2+4}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^2+12n+4}{n^2}=9$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=9$이다.

정답 ④

11. **출제의도** : 유리함수의 그래프의 점근선을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=\dfrac{k}{x-1}+5$의 그래프의 점근선은

$x=1,\ y=5$

이때, 두 점근선의 교점의 좌표가

$(1,\ 2a+1)$이므로

$2a+1=5$

$a=2$

함수 $y=\dfrac{k}{x-1}+5$의 그래프가

점 $(5,\ 3a)$, 즉 $(5,\ 6)$을 지나므로

$6=\dfrac{k}{5-1}+5$

따라서

$k=4$

정답 ④

12. **출제의도** : 시그마의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$

$=(2^2+3^2+\cdots+10^2)-(0^2+1^2+\cdots+9^2)$

$=10^2-1^2$

$=100-1$

$=99$

정답 ⑤

13. **출제의도** : 정규분포의 성질을 이용하여 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{m}{3}\right)^2\right)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\frac{m}{3}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(X\le\frac{9}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\frac{m}{3}}\le\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3(9-2m)}{2m}\right)$

$=0.9987$

그런데,

$\mathrm{P}(Z\le 3)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=0.5+0.4987$

$=0.9987$

이므로

$\frac{3(9-2m)}{2m}=3$, 즉 $27-6m=6m$

이어야 한다.

따라서 $m=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$

정답 ④

14. **출제의도** : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 큰 사건을 A라 하면

A^C은 선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 작거나 같은 사건이다.

이때, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{17}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{17}{66}$이므로

$\mathrm{P}(A)$

$=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{17}{66}$

$=\frac{49}{66}$

정답 ⑤

15. **출제의도** : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$-f(x-1)-1$

$=-\{(x-1)^2-2(x-1)\}-1$

$=-(x^2-4x+3)-1$

$=-x^2+4x-4$

이므로 두 곡선 $y=f(x)$,

$y=-f(x-1)-1$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=-x^2+4x-4$, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$

따라서 두 곡선 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^2 \{(-x^2+4x-4)-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)$$

$$=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

정답 ③

16. 출제의도 : 극한의 성질을 이용하여 다항함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$$

이므로 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. …… ㉠

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서

$x\to-1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$이어야 한다.

………… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$

(단, a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+ax+b)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)$$

$$=1-a+b=2$$

이므로

$b=a+1$ … ㉢

이때

$$f(1)=2(1+a+b)=2(2a+2)$$
$$=4(a+1)\le 12$$

에서 $a+1\le 3$이므로

$$a\le 2$$

따라서

$$f(2)=3(4+2a+b)$$
$$=3(3a+5)$$
$$\le 3(3\times 2+5)$$
$$=33$$

(단, 등호는 $a=2$일 때 성립한다.)

이므로 $f(2)$의 최댓값은 33이다.

정답 ③

17. 출제의도 : 함수의 극대, 극소에 대한 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)$

$f'(x)=0$에서

$3x^2-6ax+3(a^2-1)=0$

$3(x-a+1)(x-a-1)=0$

$x=a-1$ 또는 $x=a+1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=a-1$에서 극댓값을 가진다.

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 4이므로 $f(a-1)=4$이다. 즉,

$(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a^2-1)(a-1)=4$

$a^3-3a-2=0$

$(a-2)(a+1)^2=0$

$a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때

$f(x)=x^3+3x^2$

이때 $f(-2)=4>0$이므로 주어진 조건을 만족한다.

(ii) $a=2$일 때

$f(x)=x^3-6x^2+9x$

이때, $f(-2)=-50<0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에서

$f(x)=x^3+3x^2$

따라서

$f(-1)=(-1)^3+3\times(-1)^2=2$

정답 ②

18. 출제의도 : 무한히 반복되는 도형에서 넓이의 합에 대한 급수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 OCE에서

$\overline{OC}=1,\quad \overline{OE}=2$

이므로

$\angle COE=60^\circ$

같은 방법으로 생각하면

$\angle DOF=60^\circ$

따라서 직각삼각형 OCI에서

$\angle COI=30^\circ$ 이므로

$\overline{CI}=1\times\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$S_1=\square OCGD-\triangle OCI-\text{TRIANGLEOHD}$

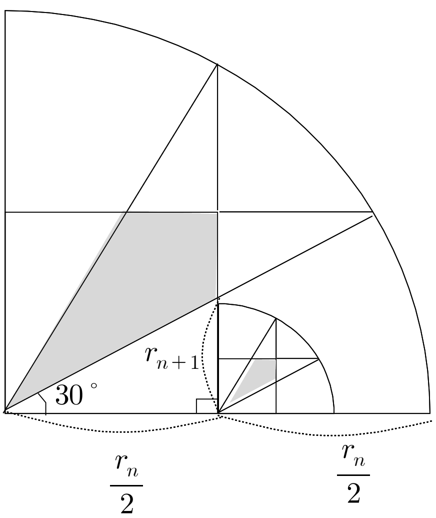
$=1\times1-2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times1$

$=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$

또한, 다음 그림과 같이 그림 R_n에 새롭게 그려진 부채꼴의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 그림 R_{n+1}에 새롭게 그려진 부채꼴의 반지름의 길이 r_{n+1}은

$r_{n+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}r_n$



따라서 닮음비는 $1:\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ 이므로 넓이의 비는 $1:\dfrac{1}{12}$이고 부채꼴의 개수는 2배식 증가하므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{1-2\times\frac{1}{12}}$$

$$= \frac{2(3-\sqrt{3})}{5}$$

정답 ①

19. **출제의도** : 정적분의 정의를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{n+k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $g(x)=\frac{1}{1+x}f(x)$라 하면

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이고 ㉡은 정적분의 정의

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b g(x)dx$$

에서

$a=0,\ b=1$인 경우와 같으므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 g(x)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+x}f(x)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{4x^4+4x^3}{1+x}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{4x^3(x+1)}{1+x}dx$$

$$=\int_0^1 4x^3dx$$

$$=\left[\,x^4\right]_0^1$$

$$=1-0=1$$

정답 ①

20. **출제의도** : 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

꺼낸 빨간색 공의 개수를 x, 파란색 공의 개수를 y, 노란색 공의 개수를 z라 할 때, 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐이기 위해서는 $x,\ y,\ z$가 다음 조건을 만족시켜야 한다.

$x=6,\ 0<y<3,\ 0<z<3,\ y+z\geq 3$

이 조건을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는

$(6,\ 1,\ 2),\ (6,\ 2,\ 1),\ (6,\ 2,\ 2)$

이다.

(i) $(x,\ y,\ z)=(6,\ 1,\ 2)$인 경우의 확률은

$$\frac{{}_6C_6\times{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_{12}C_9}$$

$$=\frac{{}_6C_6\times{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_{12}C_3}$$

$$=\frac{1\times3\times3}{\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}}$$

$= \boxed{\dfrac{9}{220}}$

(ⅱ) $(x,\ y,\ z)=(6,\ 2,\ 1)$인 경우의 확률은

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_6\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_9}$$

$$=\frac{{}_6\mathrm{C}_6\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{1\times3\times3}{\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}}$$

$$=\boxed{\frac{9}{220}}$$

(ⅲ) $(x,\ y,\ z)=(6,\ 2,\ 2)$인 경우는 10번째 시행에서 빨간색 공이 나와야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_5\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_9}\times\frac{{}_1\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_1}$$

$$=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_1\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_1}$$

$$=\frac{6\times3\times3}{\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}}\times\frac{1}{3}$$

$$=\boxed{\frac{9}{110}}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

구하는 확률은

$$2\times\boxed{\frac{9}{220}}+\boxed{\frac{9}{110}}=\frac{9}{55}$$

따라서 $p=\dfrac{9}{220}$, $q=\dfrac{9}{110}$ 이므로

$$p+q=\frac{27}{220}$$

정답 ②

21. 출제의도 : 다항함수의 미분의 성질과 사잇값의 정리를 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $h(x)=(x-1)f(x)$에서

$h'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$

따라서

$h'(x)=g(x)$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지므로

$f'(-1)=0,\ f(-1)=0$

이다. 이때,

$f'(x)=3x^2+2x+a$이므로

$f'(-1)=3-2+a=0$

$a=-1$

또, $f(-1)=-1+1-a+b=0$에서

$b=a=-1$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x-1$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)dx&=\int_0^1 h'(x)dx\\&=\left[h(x)\right]_0^1\\&=\left[(x-1)f(x)\right]_0^1\\&=0-\{-f(0)\}\\&=f(0)\\&=-1\end{aligned}$$

(참)

ㄷ. 함수 $h(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의해

$$\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=h'(c)$$

를 만족시키는 c가 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 존재한다.

이때,

$h'(c)=h(1)-h(0)=0-\{-f(0)\}=0$

이므로

$g(c)=h'(c)=0$

따라서 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

22. 출제의도 : 조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$${}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8\times7}{2\times1}=28$$

정답 28

23. 출제의도 : 함수의 연속의 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2-} f(x) = \lim_{x\to2+} f(x) = f(2)$$

즉, $a+2=3a-2=f(2)$이다.

$a+2=3a-2$에서

$a=2$

이때 $f(2)=a+2=2+2=4$

따라서

$a+f(2)=2+4=6$

정답 6

24. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 각 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_{n+1}+a_n=3n-1$에서

$n=1$일 때,

$a_2+a_1=2$

$n=2$일 때

$a_3+a_2=5$

$n=3$일 때

$a_4+a_3=8$

$n=4$일 때

$a_5+a_4=11$

이고, $a_3=4$ 이므로

$a_4+a_3=8$에서

$a_4=4$

따라서 $a_5+a_4=11$ 에서

$a_5=7$

또한, $a_3+a_2=5$ 에서

$a_2=1$

따라서 $a_2+a_1=2$ 에서

$a_1=1$

이므로

$a_1+a_5=1+7=8$

정답 8

25. 출제의도 : 모평균의 신뢰구간을 추정할 수 있는가?

정답풀이 :

고객의 주문 대기 시간이 표준편차가 σ인 정규분포를 따를 때, 64명을 임의추출하여 얻은 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 고객의 주문 대기 시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}} \le m \le \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}$$

즉,

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{8} \le m \le \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{8}$$

이때 $a\le m\le b$이고 $b-a=4.9$이므로

$$b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{8}=0.49\sigma$$

따라서 $0.49\sigma=4.9$에서

$\sigma=10$

정답 10

26. **출제의도** : 시그마의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$에서

$(x-n)(x-n+1)=0$

$x=n$ 또는 $x=n-1$

이때, $\alpha_n=n,\ \beta_n=n-1$ 또는

$\alpha_n=n-1,\ \beta_n=n$

따라서

$$\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{81}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

$$=(1-0)+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})$$

$=\sqrt{81}$

$=9$

정답 9

27. **출제의도** : 다항함수의 미분법을 이용하여 삼차방정식의 실근의 개수가 2일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^3-3x^2+2x-3=2x+k$에서

$x^3-3x^2-3=k\cdots$㉠

따라서 $y=x^3-3x^2-3$이라 하면

$y'=3x^2-6x$

이므로 $y'=0$에서

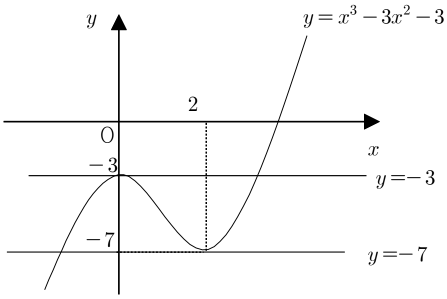
$3x^2-6x=3x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

이때 함수 $y=x^3-3x^2-3$의 증가와 감소를 표로 나타내면다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	-3	↘	-7	↗

따라서 곡선 $y=x^3-3x^2-3$은 다음 그림과 같으므로 ㉠이 서로 다른 두 실근만을 갖기 위해서는 곡선 $y=x^3-3x^2-3$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서만 만나야 한다.



즉, $k=-3$ 또는 $k=-7$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$(-3)\times(-7)=21$

정답 21

28. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$3^a=5^b=k^c=d(d>1)$

이라 놓을 수 있다.

$3^a=d$에서

$a=\log_3 d$ ⋯⋯ ㉠

$5^b=d$에서

$b=\log_5 d$ ⋯⋯ ㉡

$k^c=d$에서

$c=\log_k d$ ⋯⋯ ㉢

조건 (나)에서

$\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

$\log c = \log\dfrac{2ab}{2a+b}$

$c = \dfrac{2ab}{2a+b}$

$c(2a+b) = 2ab$ …… ㉣

㉠, ㉡, ㉢을 ㉣에 대입하면

$\log_k d(2\log_3 d + \log_5 d) = 2\log_3 d \log_5 d$

$\dfrac{1}{\log_d k} \times \dfrac{2}{\log_d 3} + \dfrac{1}{\log_d k} \times \dfrac{1}{\log_d 5}$

$= \dfrac{2}{\log_d 3} \times \dfrac{1}{\log_d 5}$

$2\log_d 5 + \log_d 3 = 2\log_d k$

$\log_d 75 = \log_d k^2$

따라서

$k^2 = 75$

[다른풀이]

조건 (나)에서

$\log c = \log\dfrac{2ab}{2a+b}$

이므로

$c = \dfrac{2ab}{2a+b}$, $\dfrac{1}{c} = \dfrac{2a+b}{2ab}$

따라서 $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2a}$이므로

$\dfrac{c}{b} + \dfrac{c}{2a} = 1$ … ㉠

조건 (가)에서

$3 = k^{\frac{c}{a}}$, $5 = k^{\frac{c}{b}}$

이므로

$k^{\frac{c}{b} + \frac{c}{2a}}$

$= k^{\frac{c}{b}} \times k^{\frac{c}{2a}}$

$= k^{\frac{c}{b}} \times \left(k^{\frac{c}{a}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= k^{\frac{c}{b}} \times \sqrt{k^{\frac{c}{a}}}$

따라서 ㉠에서

$k^1 = 5 \times \sqrt{3}$

이므로

$k^2 = 5^2 \times (\sqrt{3})^2 = 75$

정답 75

29. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) 여학생 3명은 연필을 각각 1자루씩, 남학생 2명은 볼펜을 각각 1자루씩 받은 경우

남학생 2명이 받는 연필의 개수를 x, y, 여학생 3명이 받는 볼펜의 개수를

x', y', z'이라 하면

$x + y = 4$(단, x, y는 음이 아닌 정수)

$x' + y' + z' = 2$(단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)

이므로 그 경우의 수는

${}_2H_4 \times {}_3H_2 = {}_5C_4 \times {}_4C_2$

$= 5 \times \dfrac{4 \times 3}{2}$

$= 30$

(ⅱ) 여학생 3명은 연필을 각각 2자루씩, 남학생 2명은 볼펜을 각각 1자루씩 받은 경우

남학생 2명이 받는 연필의 개수를 x, y, 여학생 3명이 받는 볼펜의 개수를

x', y', z'이라 하면

$x + y = 1$(단, x, y는 음이 아닌 정수)

$x' + y' + z' = 2$(단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)

이므로 그 경우의 수는

${}_2H_1 \times {}_3H_2 = {}_2C_1 \times {}_4C_2$

$=2\times 6$

$=12$

(ⅲ) 여학생 3명은 연필을 각각 2자루씩, 남학생 2명은 볼펜을 각각 2자루씩 받은 경우

남학생 2명이 받는 연필의 개수를 x, y라 하면

$x+y=1$(단, x, y는 음이 아닌 정수)

이므로 그 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$

(ⅳ) 여학생 3명이 연필을 각각 1자루씩, 남학생 2명은 볼펜을 각각 2자루씩 받은 경우

남학생 2명이 받는 연필의 개수를 x, y라 하면

$x+y=4$(단 x, y는 음이 아닌 정수)

이므로 그 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$30+12+2+5=49$

정답 49

30. 출제의도 : 등차수열의 성질과 접선의 방정식을 이용하여 사차함수의 식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

네 개의 수 -1, 0, 1, 2가 이 순서대로 등차수열을 이루고 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$도 이 순서대로 등차수열을 이루므로 좌표평면에서 네 점 $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$는 한 직선 위에 있다. 이 직선의 방정식을 $y=mx+n$ (단, m, n은 상수)라 하자.

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)-(mx+n)=x(x+1)(x-1)(x-2)$

즉, $f(x)=x(x+1)(x-1)(x-2)+mx+n$

으로 놓을 수 있다.

$f'(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)$
$\quad +x(x+1)(x-2)+x(x+1)(x-1)+m$

에서

$f'(-1)=-6+m$, $f'(2)=6+m$

점 $(-1, f(-1))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$을 지나므로

$f'(-1)=\dfrac{0-f(-1)}{k-(-1)}$에서

$-6+m=\dfrac{m-n}{k+1}$,

$mk+n=6(k+1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$을 지나므로

$f'(2)=\dfrac{0-f(2)}{k-2}$에서

$6+m=\dfrac{-2m-n}{k-2}$,

$mk+n=6(2-k)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$6(k+1)=6(2-k)$이므로

$k=\dfrac{1}{2}$

㉠에 $k=\dfrac{1}{2}$을 대입하면

$\dfrac{1}{2}m+n=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$f(2k)=20$에서

$f(2k)=f(1)=m+n=20$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$m=22$, $n=-2$

따라서

$f(x)=x(x+1)(x-1)(x-2)+22x-2$

이므로

$f(4k)=f(2)=22\times 2-2=42$

정답 42