나형 정답

1	②	2	③	3	⑤	4	③	5	①
6	④	7	②	8	③	9	②	10	④
11	④	12	⑤	13	②	14	①	15	③
16	①	17	⑤	18	①	19	④	20	⑤
21	④	22	42	23	12	24	90	25	6
26	510	27	40	28	18	29	273	30	80

나형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기
$3\times 27^{\frac{1}{3}}=3\times\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}=3\times 3=9$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기
$A\cap B=\{4\}$ 이므로 $a+2=4$, $b=4$
따라서 $a+b=2+4=6$

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기
$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{5}{2}$$

4. [출제의도] 역함수 이해하기
$f(2)+f^{-1}(3)=4+1=5$

5. [출제의도] 정적분 계산하기
$$\int_0^3(x^2-2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x\right]_0^3=3$$

6. [출제의도] 함수의 연속 이해하기
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 2-}(x+1)=\lim_{x\to 2+}(x^2-4x+a)=f(2)$
$3=-4+a$
따라서 $a=7$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim_{x\to -2-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=-1+3=2$

8. [출제의도] 유리함수의 성질 이해하기
직선 $y=x$는
함수 $y=\frac{4}{x-3}+a$의 두 점근선의 교점 $(3,\ a)$를
지나므로 $a=3$

9. [출제의도] 사건의 독립 이해하기
$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$
두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\frac{2}{3}=7\,\mathrm{P}(A\cap B)=7\,\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=7\times\frac{1}{3}\times\mathrm{P}(B)$
따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{7}$

10. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기
함수 $y-(-1)=\sqrt{(x-b)-1}+a$의 그래프와
함수 $y=\sqrt{x-4}$의 그래프가 일치하므로
$a=1$, $b=3$
따라서 $a+b=4$

11. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기
이 고등학교 3학년 학생 300명 중 임의로 선택한 1명이 영화 관람을 희망한 학생일 사건을 X, 뮤지컬 관람을 희망한 학생일 사건을 Y라 하면
$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{90}{300}}{\frac{210}{300}}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$$

12. [출제의도] 로그의 성질 이해하기
$\log_a\frac{a^3}{b^2}=\log_a a^3-\log_a b^2=3-2\log_a b=2$
$\log_a b=\frac{1}{2}$, $\log_b a=2$
따라서 $\log_a b+3\log_b a=\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2}$

13. [출제의도] 정규분포를 활용하여 문제해결하기
전기 자동차 배터리 1개의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(64.2,\ 0.4^2)$을 따른다.
Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
$$\mathrm{P}(X\ge 65)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{65-64.2}{0.4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

14. [출제의도] 등차수열의 성질 이해하기
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a+8d=2(a+2d)$, $a=4d$
$$\sum_{n=1}^{24}\frac{(a_{n+1}-a_n)^2}{a_na_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{24}\frac{d^2}{a_na_{n+1}}=d^2\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=d\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{24}}-\frac{1}{a_{25}}\right)\right\}$$
$$=d\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{25}}\right)=d\left(\frac{a_{25}-a_1}{a_1\times a_{25}}\right)$$
$$=d\times\frac{24d}{a\times(a+24d)}=\frac{24d^2}{4d\times 28d}=\frac{3}{14}$$

15. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 추론하기
$S(A)=a+b+c+d+e=37$
$S(B)=a+b+c+d+e+5k=37+5k$
$S(B)=S(A\cup B)-S(A-B)$
$37+5k=92-15$ 따라서 $k=8$
(참고) $A=\{2,\ 4,\ 9,\ 10,\ 12\}$
$B=\{10,\ 12,\ 17,\ 18,\ 20\}$

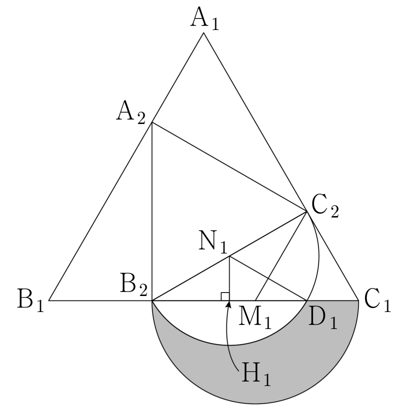
16. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기
8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택한 3개의 레인 번호를 각각 X, Y, $Z(X<Y<Z)$라 하자.
X, Y, Z를 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.
X보다 작은 레인 번호의 개수를 a,
X보다 크고 Y보다 작은 레인 번호의 개수를 b,
Y보다 크고 Z보다 작은 레인 번호의 개수를 c,
Z보다 큰 레인 번호의 개수를 d라 하면
$a+b+c+d=5\ (a\ge 0,\ b\ge 1,\ c\ge 1,\ d\ge 0)$
$b=b'+1$, $c=c'+1$
$a+b'+c'+d=3\ (a\ge 0,\ b'\ge 0,\ c'\ge 0,\ d\ge 0)$
${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$
3개의 레인 번호 X, Y, Z를
3명의 학생이 선택하는 경우의 수는 $3!$
따라서 $20\times 3!=120$

17. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질 이해하기
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d,
등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_7=a_6+d$, $b_7=b_6\times r$
$9+d=9r$
$r=1+\frac{d}{9}$ 이므로 d는 9의 배수
$a_{11}=a_6+5d=9+5d$
$94<9+5d<109$, $17<d<20$
d는 9의 배수이므로 $d=18$
$9+18=9r$, $r=3$
$a_7+b_8=(a_6+d)+(b_6\times r^2)$
$=(9+18)+(9\times 3^2)=108$

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기
꺼낸 3장의 카드의 앞면에 적혀 있는 수를 차례로 α, β, γ라 할 때, 이를 순서쌍 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$와 같이 나타내자.
$X=0$인 사건은
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 모두 같은 경우이므로 $(1,\ 2,\ 3)$의 1가지
$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{60}$
$X=1$인 사건은
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 2인 경우이다.
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1과 2로 같은 경우는 $(1,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 2,\ 5)$의 2가지,
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가
1과 3 또는 2와 3으로 같은 경우도 각각
2가지이므로
$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2\times 3}{60}=\boxed{\frac{1}{10}}$
$X=2$인 사건은
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 1인 경우이다.
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1로 같은 경우는
$(1,\ 3,\ 2)$, $(1,\ 3,\ 4)$, $(1,\ 3,\ 5)$, $(1,\ 4,\ 2)$, $(1,\ 4,\ 5)$, $(1,\ 5,\ 2)$, $(1,\ 5,\ 4)$의 7가지,
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가
2 또는 3으로 같은 경우도 각각 7가지이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{7\times 3}{60}=\boxed{\frac{7}{20}}$
$X=3$인 사건의 경우에는
$\mathrm{P}(X=3)=1-\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{10}+\frac{7}{20}\right)=\frac{8}{15}$
$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{60}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{7}{20}+3\times\frac{8}{15}$$
$$=\boxed{\frac{12}{5}}$$
$a=\frac{1}{10}$, $b=\frac{7}{20}$, $c=\frac{12}{5}$
따라서 $10a+20b+5c=20$

19. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기
선분 $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1A_1}$을 $1:2$로 내분하는 점이 각각 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$이므로 $\overline{\mathrm{B_2C_1}}=2$, $\overline{\mathrm{C_1C_2}}=1$
선분 $\mathrm{B_2C_1}$을 지름으로 하는 반원의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\overline{\mathrm{B_2C_1}}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$
선분 $\mathrm{B_2C_1}$, $\mathrm{B_2C_2}$의 중점을 각각 $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{N_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{B_2C_2}$를 지름으로 하는 반원의 호와

선분 B_2C_1의 교점을 D_1이라 하자.



$\overline{M_1C_1} = \overline{C_1C_2} = 1$, $\angle C_1 = 60^\circ$ 이므로

삼각형 $C_1C_2M_1$은 정삼각형

$\angle B_2M_1C_2 = 120^\circ$

삼각형 $M_1C_2B_2$는 $\overline{M_1B_2} = \overline{M_1C_2} = 1$인

이등변삼각형이므로 $\angle M_1C_2B_2 = 30^\circ$

삼각형 $B_2C_1C_2$는 $\angle C_2 = 90^\circ$인 직각삼각형

$\overline{B_2C_2}^2 = \overline{B_2C_1}^2 - \overline{C_1C_2}^2 = 4 - 1 = 3$

$\overline{B_2C_2} = \sqrt{3}$,

같은 방법으로 $\overline{A_2B_2} = \overline{C_2A_2} = \sqrt{3}$ 이므로

삼각형 $A_2B_2C_2$는 정삼각형

삼각형 $N_1B_2D_1$은

$\angle B_2N_1D_1 = 120^\circ$,

$\overline{N_1B_2} = \overline{N_1D_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 인 이등변삼각형

부채꼴 $N_1B_2D_1$의 넓이는

$\pi \times \overline{B_2N_1}^2 \times \dfrac{120^\circ}{360^\circ} = \pi \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

점 N_1에서 선분 B_2D_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면,

$\overline{N_1H_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\overline{B_2H_1} = \dfrac{3}{4}$

$\overline{B_2D_1} = 2\overline{B_2H_1} = \dfrac{3}{2}$

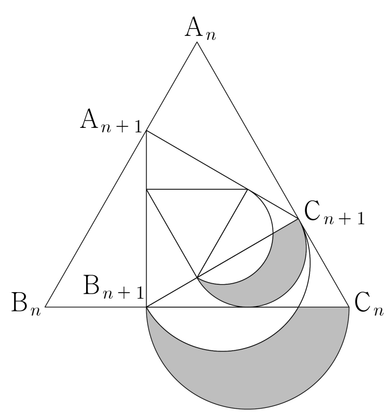
삼각형 $N_1B_2D_1$의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{B_2D_1} \times \overline{N_1H_1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

$S_1 =$ (선분 B_2C_1을 지름으로 하는 반원의 넓이)
$-$(부채꼴 $N_1B_2D_1$의 넓이)
$+$(삼각형 $N_1B_2D_1$의 넓이)

$= \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{16} = \dfrac{4\pi + 3\sqrt{3}}{16}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다. $(n \geq 1)$



정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$\overline{B_{n+1}C_n} = \dfrac{2}{3}a_n$, $\overline{C_nC_{n+1}} = \dfrac{1}{3}a_n$

삼각형 $B_{n+1}C_nC_{n+1}$은

$\angle C_{n+1} = 90^\circ$인 직각삼각형이므로

$(a_{n+1})^2 = \left(\dfrac{2}{3}a_n\right)^2 - \left(\dfrac{1}{3}a_n\right)^2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}a_n$

그림 R_{n+1}에 새로 색칠된 부분의 넓이를

b_{n+1}이라 하면 $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n$, $b_1 = S_1$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{4\pi + 3\sqrt{3}}{16}$ 이고,

공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \dfrac{\dfrac{4\pi + 3\sqrt{3}}{16}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{12\pi + 9\sqrt{3}}{32}$$

20. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x) = f(-x)$ 이고 방정식 $f(x) = 0$의

서로 다른 실근의 개수가 3이므로 $f(0) = c = 0$

$f(1) = a + b + 0 = -\dfrac{3}{4}$, $f'(-1) = -4a - 2b = 1$

$a = \dfrac{1}{4}$, $b = -1$

ㄱ. $f(0) = 0$ (참)

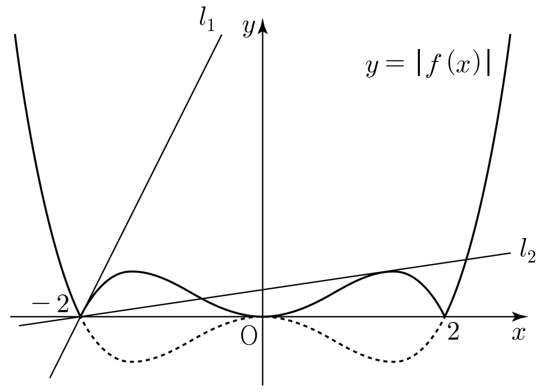
ㄴ. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^2 = \dfrac{1}{4}x^2(x+2)(x-2)$

$\alpha = -2$, $\beta = 0$, $\gamma = 2$

$f'(x) = x^3 - 2x$

$f'(\alpha) = f'(-2) = -4$ (참)

ㄷ.



곡선 $y = -f(x)$ 위의 점 $(-2, 0)$에서의

접선 l_1의 기울기는 $-f'(-2) = -(-4) = 4$

점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y = -f(x)$에 그은

접선 중 하나를 l_2라 할 때,

접점을 $\left(t, -\dfrac{1}{4}t^4 + t^2\right)$ $(t \neq -2, 0)$이라 하자.

직선 l_2의 기울기는

$-f'(t) = -(t^3 - 2t) = -t^3 + 2t$

직선 l_2의 방정식은

$y = (-t^3 + 2t)(x - t) - \dfrac{1}{4}t^4 + t^2$

직선 l_2가 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0 = (-t^3 + 2t)(-2 - t) - \dfrac{1}{4}t^4 + t^2$

$t(3t - 4)(t + 2)^2 = 0$, $t = \dfrac{4}{3}$

$-f'\left(\dfrac{4}{3}\right) = -\left(\dfrac{4}{3}\right)^3 + 2 \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{27}$

함수 $y = |f(x)|$의 그래프와 직선

$y = k(x+2)$의 교점의 개수는

(i) $0 < k < \dfrac{8}{27}$ 일 때, 5개

(ii) $k = \dfrac{8}{27}$ 일 때, 4개

(iii) $\dfrac{8}{27} < k < 4$ 일 때, 3개

(iv) $k \geq 4$ 일 때, 2개

그러므로 방정식 $|f(x)| = k(x+2)$의

서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는

양수 k의 범위는 $\dfrac{8}{27} < k < 4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 접선의 방정식과 합성함수를 활용하여 문제해결하기

점 $(0, t)$를 지나는 직선이

곡선 $y = x^3 - ax^2 + 3x - 5$와 접할 때의 접점을

$(k, k^3 - ak^2 + 3k - 5)$라 하자.

$y' = 3x^2 - 2ax + 3$이므로

접선의 방정식은

$y = (3k^2 - 2ak + 3)(x - k) + k^3 - ak^2 + 3k - 5$

이고, 이 접선이 점 $(0, t)$를 지나므로

$t = -2k^3 + ak^2 - 5$

$f(t)$는 곡선 $y = -2k^3 + ak^2 - 5$와

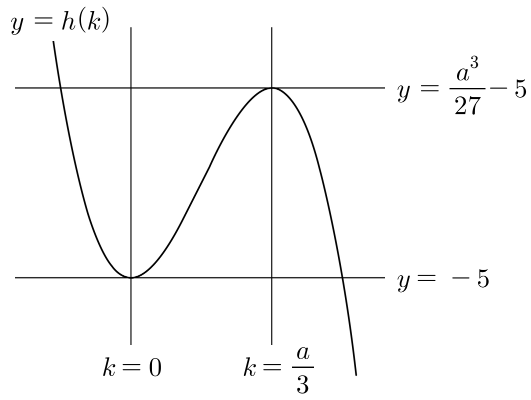
직선 $y = t$의 교점의 개수이다.

$h(k) = -2k^3 + ak^2 - 5$라 하면,

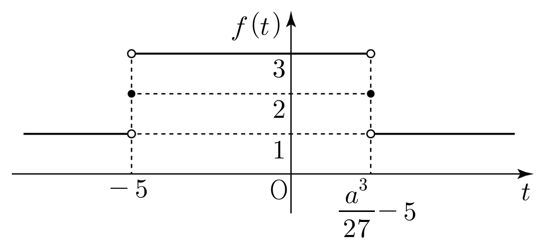
$h'(k) = -6k^2 + 2ak = -2k(3k - a)$

$h'(0) = h'\left(\dfrac{a}{3}\right) = 0$

$h(0) = -5$, $h\left(\dfrac{a}{3}\right) = \dfrac{a^3}{27} - 5$



$$f(t) = \begin{cases} 1 & (t < -5) \\ 2 & (t = -5) \\ 3 & \left(-5 < t < \dfrac{a^3}{27} - 5\right) \\ 2 & \left(t = \dfrac{a^3}{27} - 5\right) \\ 1 & \left(t > \dfrac{a^3}{27} - 5\right) \end{cases}$$



$$g(t) = f(f(t)) = \begin{cases} f(1) & (t < -5) \\ f(2) & (t = -5) \\ f(3) & \left(-5 < t < \dfrac{a^3}{27} - 5\right) \\ f(2) & \left(t = \dfrac{a^3}{27} - 5\right) \\ f(1) & \left(t > \dfrac{a^3}{27} - 5\right) \end{cases}$$

함수 $g(t)$에서

(ⅰ) $\frac{a^3}{27}-5<3$인 경우

$-5<t<\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(3)=1$이므로 조건(가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\frac{a^3}{27}-5=3$인 경우

$t<-5$, $t>\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(1)=3$

$t=-5$, $\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(2)=3$

$-5<t<\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(3)=2$

함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수가 2이므로 조건(나)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $\frac{a^3}{27}-5>3$인 경우

실수 전체의 집합에서

$f(t)\le 3<\frac{a^3}{27}-5$이므로 $g(t)=3$이다.

이는 조건(가), (나)를 모두 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 a의 범위는 $a^3>8\times27=6^3$

자연수 a의 최솟값 $m=7$,

$g(m)=f(f(7))=3$

따라서 $m+g(m)=7+3=10$

22. [출제의도] 순열 계산하기

${}_7\mathrm{P}_2=7\times6=42$

23. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=4x^3-10x$, $f'(2)=12$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

$(3x+1)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}\times1^r$

$5-r=2$, $r=3$

따라서 x^2의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_3\times3^2=90$

25. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t\,(t\ge0)$에서의 속도 $v(t)$는

$v(t)=3t^2-6t+a$

$v(3)=3\times3^2-6\times3+a=15$

따라서 $a=6$

26. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

판별식 $D=(a_{n+1})^2-4(a_n)^2=0$

$(a_{n+1}+2a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a_{n+1}=2a_n$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{2(2^8-1)}{2-1}=510$

27. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$b=\frac{a^3}{2}$, $S_1=S_2$이므로

$\int_0^1\frac{1}{2}x^3dx=\int_1^a\left(\frac{a^3}{2}-\frac{1}{2}x^3\right)dx$

$\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^1=\left[\frac{a^3}{2}x-\frac{1}{8}x^4\right]_1^a$

$a^3(3a-4)=0$, $a>1$이므로 $a=\frac{4}{3}$

따라서 $30a=30\times\frac{4}{3}=40$

28. [출제의도] 조합을 활용하여 문제해결하기

$f(2)\le2$, $f(3)\le3$, $f(5)\le5$, $f(7)\le7$

$f(1)<f(2)<f(4)<f(8)$

함수 f가 일대일 대응이므로

$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$

$f(5)$가 될 수 있는 값은 4, 5

$f(7)$이 될 수 있는 값은 4, 5, 6, 7

(ⅰ) $f(5)=4$인 경우

$f(7)=5$일 때,

$f(4)$, $f(6)$, $f(8)$이 될 수 있는 값은 6, 7, 8

$f(6)$을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$

남겨진 두 수 중에서 작은 수를 $f(4)$, 큰 수를 $f(8)$에 대응시키면 되므로

${}_3\mathrm{C}_1\times1=3$

$f(7)=6$, $f(7)=7$일 때, $f(4)$, $f(6)$, $f(8)$을 정하는 경우의 수도 각각 3이므로

함수 f의 개수는 $3\times3=9$

(ⅱ) $f(5)=5$인 경우

(ⅰ)의 경우와 같은 방법으로

함수 f의 개수는 $3\times3=9$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 f의 개수는 18

29. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a\ne0)$, 공차를 d라 하면

$S_9=S_{18}$이므로

$\frac{9(2a+8d)}{2}=\frac{18(2a+17d)}{2}$

$a=-13d$

$S_n=\frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n(n-27)$

$S_1=S_{26}=-13d$,

$S_2=S_{25}=-25d$,

$S_3=S_{24}=-36d$,

$\vdots$

$S_{13}=S_{14}=-91d$,

$S_{27}=0$, $S_{28}=14d$, $S_{29}=29d$, $\cdots$

집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 자연수 n의 값은 13, 14, $\cdots$, 26

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$13+14+15+\cdots+26=273$

30. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

모든 실수 t에 대해서 $|f'(t)|\ge0$이고,

$g(a)=\int_0^a|f'(t)|dt=-8<0$이므로 $a<0$

$x\ge-3$에서 $|f'(x)|\ge0$이므로

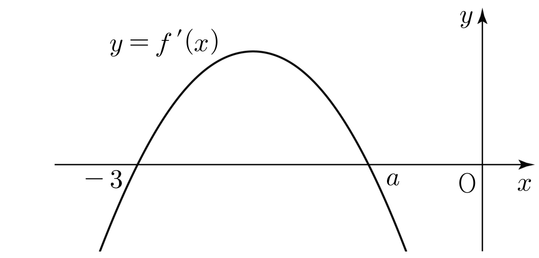
함수 $g(x)=\int_0^x|f'(t)|dt$는 증가한다.

삼차함수 $f(x)$는

$x=-3$과 $x=a\,(a>-3)$에서 극값을 가지므로 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $x<-3$에서 $f(x)$는 증가한다.

이때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 극솟값을 갖지 않는다.

따라서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.



(ⅰ) $x<-3$일 때, $g(x)=f(x)$

(ⅱ) $-3\le x<a$일 때,

$g(x)=\int_0^a\{-f'(t)\}dt+\int_a^x f'(t)dt$

$=f(x)+f(0)-2f(a)$

(ⅲ) $x\ge a$일 때,

$g(x)=\int_0^x\{-f'(t)\}dt=-f(x)+f(0)$

함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-3-}g(x)=\lim_{x\to-3-}f(x)=f(-3)$

$\lim_{x\to-3+}g(x)=\lim_{x\to-3+}\{f(x)+f(0)-2f(a)\}$

$=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(-3)=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(0)=2f(a)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$g(a)=-f(a)+f(0)=-8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $f(0)=-16$, $f(a)=-8$

$f'(x)=k(x+3)(x-a)$

$=k\{x^2+(3-a)x-3a\}$ $(k<0)$이라 하면

$f(x)=k\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{3-a}{2}x^2-3ax\right)-16$

$g(-3)=f(-3)=\frac{9}{2}k(a+1)-16=-16$

$k\ne0$이므로 $a=-1$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<-1)\\ -f(x)-16 & (x\ge-1)\end{cases}$$

$\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx$

$=\int_{-1}^4\{f(x)+(-f(x)-16)\}dx$

$=\int_{-1}^4(-16)dx=-16\times5=-80$

따라서 $\left|\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx\right|=80$

(참고)

$f(x)=-2x^3-12x^2-18x-16$

함수 $g(x)$의 그래프의 개형