정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	⑤	2	③	3	②	4	②	5	①
6	⑤	7	⑤	8	④	9	③	10	②
11	③	12	③	13	⑤	14	④	15	④
16	①	17	②	18	①	19	④	20	⑤
21	②	22	200	23	99	24	64	25	8
26	72	27	120	28	18	29	60	30	95

가형 해설

1. [출제의도] 평면벡터 계산하기
$\vec{a}-\vec{b}=(1,\ 4)$ 이므로 모든 성분의 합은 5

2. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{3}\times\frac{3x}{e^{3x}-1}\times(x^2+2)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\times 1\times 2=\frac{2}{3}$$

3. [출제의도] 공간좌표의 외분점 계산하기
선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times 2-2\times 1}{1-2},\ \frac{1\times 0-2\times 0}{1-2},\ \frac{1\times a-2\times 2}{1-2}\right)$
이므로 $a=4$

4. [출제의도] 사건의 독립 이해하기
두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\frac{7}{9}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$, $\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}$
따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

5. [출제의도] 로그함수를 활용하여 부등식 계산하기
로그의 정의에 의하여 $x>3$ ……㉠
$\log_3(x-3)+\log_3(x+3)=\log_3(x^2-9)$
$\log_3(x^2-9)\le 3$ 에서 $x^2-9\le 27$ 이고
$x^2\le 36$ 에서 $-6\le x\le 6$ ……㉡
㉠, ㉡에 의하여 $3<x\le 6$ 이므로
정수 x는 $x=4$ 또는 $x=5$ 또는 $x=6$
따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 15

6. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기
주사위를 5 번 던져서 나온 다섯 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A 라 하면, 주사위를 5 번 던져서 나온 다섯 눈의 수의 곱이 홀수인 사건은
A^C 이므로 $\mathrm{P}(A^C)={}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$
따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

7. [출제의도] 타원의 성질 이해하기
장축의 길이를 $2a$, 단축의 길이를 $2b$ 라 하면
타원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=2a$, $\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=2a$
이므로 $4a=52$에서 $a=13$
$a^2-b^2=25$ 에서 $b^2=144$ 이고 $b=12$
따라서 단축의 길이는 24

8. [출제의도] 음함수의 미분법 이해하기
음함수의 미분법에 의하여
$$y+x\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}\ln x-y^3\frac{1}{x}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y^3}{x}-y}{x-3y^2\ln x}\ (\text{단, } x-3y^2\ln x\neq 0)$$
$x=1$ 일 때 $y=2$ 이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{8-2}{1-0}=6$

9. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기
$g(e)=t$ 라 하면 $f(t)=e$
$e^{t^3+2t-2}=e$ 에서 $t=1$ 이므로 $g(e)=1$
$f'(x)=(3x^2+2)e^{x^3+2x-2}$
따라서 $g'(e)=\frac{1}{f'(g(e))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5e}$

10. [출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수 이해하기
$\int_a^x f(t)dt=(x+a-4)e^x$ 에서
$x=a$ 를 대입하면
$0=(2a-4)e^a$ 이므로 $a=2$
$\int_2^x f(t)dt=(x-2)e^x$
양변을 x 에 대하여 미분하면
$f(x)=(x-1)e^x$
따라서 $f(a)=f(2)=e^2$

11. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프 이해하기
$f^{-1}(x)=\log_3(x-k)+1$ 이므로
$g(x)=\log_3(x-k^2-k)+1$ 이다.
곡선 $y=f(x)$ 의 점근선은 $y=k$ 이고
곡선 $y=g(x)$ 의 점근선은 $x=k^2+k$ 이다.
두 점근선의 교점의 좌표는 $(k^2+k,\ k)$ 이고
직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위에 있으므로 $k=\frac{1}{3}(k^2+k)$
따라서 $k>0$ 이므로 $k=2$

12. [출제의도] 합성함수의 미분법 이해하기
조건 (나)에서 $h(1)=5$, $h'(1)=12$
$h(1)=g(f(1))=g(2)=5$
$h(x)=g(f(x))$ 에서
$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$
$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=3g'(2)=12$
$g'(2)=4$
따라서 $g(2)+g'(2)=5+4=9$

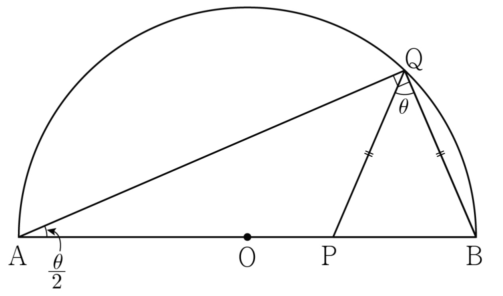
13. [출제의도] 조건부 확률을 활용하여 문제해결하기
주머니에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$
꺼낸 2 개의 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 경우는 (1 과 2), (1 과 4), (2 와 3), (3 과 4) 4 가지이다.
주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼냈을 때, 적혀 있는 숫자의 합이 소수일 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.
동전의 앞면이 2 번 나오는 사건을 X, 꺼낸 2 개의 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 사건을 Y 라 하자.
$$\mathrm{P}(X)=\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}$$
$$=\frac{\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{4}{7}$$

14. [출제의도] 정적분과 곡선의 넓이 이해하기
$x\ge 1$ 이면 $f(x)\ge 0$ 이고
$x<1$ 이면 $f(x)<0$ 이므로
영역 A 의 넓이는
$\int_0^1|f(x)|dx=-\int_0^1 f(x)dx$
영역 B의 넓이는
$\int_1^3|f(x)|dx=\int_1^3 f(x)dx$
영역 A 의 넓이와 영역 B의 넓이의 합은
$$-\int_0^1\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx+\int_1^3\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$$
$$=-\left[\ln(x^2-2x+2)\right]_0^1+\left[\ln(x^2-2x+2)\right]_1^3$$
$$=\ln 2+\ln 5=\ln 10$$

15. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기
$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ 에서 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$ 이므로
$\sin\alpha=-\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$
$\sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha$
$=\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x$
$\cos x\le\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x\le 2\cos x$
양변을 $\cos x$ 로 나누면
$1\le\frac{12}{13}\tan x-\frac{5}{13}\le 2$
$\frac{3}{2}\le\tan x\le\frac{31}{12}$ 에서 최댓값은 $\frac{31}{12}$, 최솟값은 $\frac{3}{2}$
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{49}{12}$

16. [출제의도] 정규분포의 성질을 활용하여 문제해결하기
함수 $f(t)$ 는 $t=4$ 에서 최댓값을 가지므로
$f(4)=\mathrm{P}(4\le X\le 6)$ 에서 확률변수 X 의 평균 m 은 5 이다.
$f(5)=\mathrm{P}(5\le X\le 7)$
$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{7-5}{\sigma}\right)$
$=0.3413$
$\frac{7-5}{\sigma}=1$ 에서 $\sigma=2$
$f(7)=\mathrm{P}(7\le X\le 9)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{7-5}{2}\le Z\le\frac{9-5}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.1359$

17. [출제의도] 도형의 성질을 활용하여 삼각함수의 극한 문제해결하기



삼각형 QPB 는 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{QBP}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$

삼각형 ABQ 는 $\angle \mathrm{Q}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$\angle \mathrm{QAB}=\frac{\theta}{2}$

$\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{QP}}=2\sin\frac{\theta}{2}$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QB}}\times\overline{\mathrm{QP}}\times\sin\theta$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{2\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}$$

$$=2\times1\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{2}$$

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

꺼낸 3 장의 카드의 앞면에 적혀 있는 수를 차례로 α, β, γ라 할 때, 이를 순서쌍 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$와 같이 나타내자.

$X=0$인 사건은

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 모두 같은 경우이므로 (1, 2, 3)의 1가지

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{60}$

$X=1$인 사건은

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 2인 경우이다.

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1과 2로 같은 경우는 (1, 2, 4), (1, 2, 5)의 2가지,

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1과 3 또는 2와 3으로 같은 경우도 각각 2가지이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2\times3}{60}=\boxed{\frac{1}{10}}$

$X=2$인 사건은

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 1인 경우이다.

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1로 같은 경우는 (1, 3, 2), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 2), (1, 4, 5), (1, 5, 2), (1, 5, 4)의 7가지,

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 2 또는 3으로 같은 경우도 각각 7가지이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{7\times3}{60}=\boxed{\frac{7}{20}}$

$X=3$인 사건의 경우에는

$\mathrm{P}(X=3)=1-\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{10}+\frac{7}{20}\right)=\frac{8}{15}$

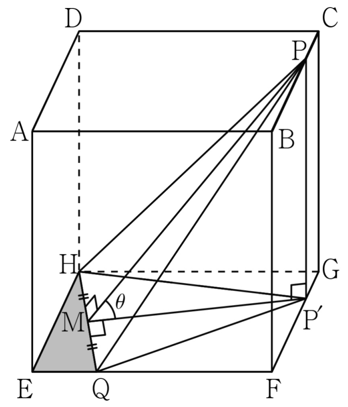
$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{60}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{7}{20}+3\times\frac{8}{15}$

$=\boxed{\frac{12}{5}}$

$a=\frac{1}{10}$, $b=\frac{7}{20}$, $c=\frac{12}{5}$

따라서 $10a+20b+5c=20$

19. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제해결하기

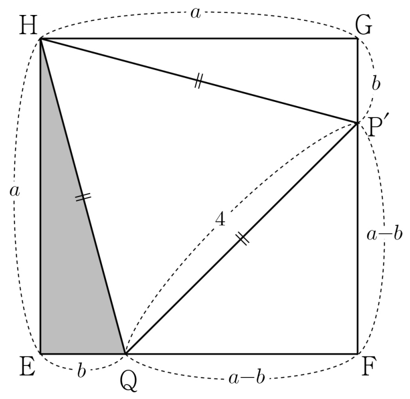


점 P 에서 평면 EFGH 에 내린 수선의 발을 P′, 점 P′에서 선분 HQ 에 내린 수선의 발을 M 이라 하면

$\overline{\mathrm{PP'}}\perp$(평면EFGH)이고 $\overline{\mathrm{P'M}}\perp\overline{\mathrm{HQ}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PM}}\perp\overline{\mathrm{HQ}}$

$\overline{\mathrm{PP'}}=\sqrt{15}$, $\overline{\mathrm{P'M}}=2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PM}}=3\sqrt{3}$

$\angle\mathrm{PMP'}=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{2}{3}$



$\overline{\mathrm{EH}}=a$, $\overline{\mathrm{EQ}}=b$라 하자.

$\overline{\mathrm{GP'}}=b$, $\overline{\mathrm{FP'}}=\overline{\mathrm{FQ}}=a-b$

$\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{QP'}}=4$이므로

$a-b=2\sqrt{2}$, $a^2+b^2=16$에서 $ab=4$

평면 EQH와 평면 PHQ가 이루는 예각의 크기가 θ이므로

삼각형 EQH 의 넓이를 S, 삼각형 EQH 의 평면 PHQ 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S'=S\cos\theta$이다.

따라서 $S'=\frac{1}{2}ab\cos\theta=\frac{1}{2}\times4\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 함수 추론하기

ㄱ. $f(2+x)=f(2-x)=f(1+(1-x))$

$=f(1-(1-x))=f(x)$

$f(x+2)=f(x)$ (참)

ㄴ. $\int_2^5 f'(x)dx=[f(x)]_2^5$

$=f(5)-f(2)=4$ 이고

ㄱ에 의하여 $f(5)=f(1)$ 이고

$f(2)=f(0)$ 이므로 $f(1)-f(0)=4$ (참)

ㄷ. $f(0)=a$라 하면 $f(1)=a+4$

$f(x)=t$라 치환하면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$ 이므로

$\int_0^1 f(f(x))f'(x)dx=\int_{f(0)}^{f(1)}f(t)dt=6$

ㄱ, ㄴ에 의하여

$\int_a^{a+4}f(t)dt=6=2\int_a^{a+2}f(t)dt$ 에서

$\int_0^2 f(t)dt=3$

$\int_0^{10}f(x)dx=5\int_0^2 f(x)dx=15$

$f(1+x)=f(1-x)$ 이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{2}$

$\int_1^{10}f(x)dx=\int_0^{10}f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$

$=15-\frac{3}{2}=\frac{27}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 미분법을 활용하여 문제해결하기

점 P 를 P$(\alpha,\ t)$라 하면 $\sin\alpha=t$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-t^2}$ 이다.

접선의 방정식은 $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$이고

$y-\sin\alpha=\cos\alpha(x-\alpha)$에서

$-\sin\alpha=\cos\alpha(g(t)-\alpha)$

$g(t)=\alpha-\tan\alpha$ 이다.

$\sin\alpha=t$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}=1$ 이므로 $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{\cos\alpha}$

$g'(t)=\frac{d\alpha}{dt}-\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dt}$

$=\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos^3\alpha}$

$=\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^3\alpha}$

$=\frac{-t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$

따라서 $g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-24$

22. [출제의도] 순열과 조합 계산하기

${}_5\mathrm{P}_2=20$, ${}_5\mathrm{C}_2=10$ 이므로 ${}_5\mathrm{P}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=200$

23. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 이므로 $\tan^2\theta=99$

24. [출제의도] 이항분포의 평균과 분산 이해하기

확률변수 X는 이항분포 B$(72,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=72p$ 이다.

$\mathrm{E}(2X-3)=2\mathrm{E}(X)-3$

$=144p-3=45$

$p=\frac{1}{3}$ 이므로

$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$

따라서 $\mathrm{V}(2X-3)=4\mathrm{V}(X)=64$

25. [출제의도] 평면운동의 속도 이해하기

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=t+1$ 이고

$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$ 에서 $t=1$ 이다.

$t=1$일 때, $\vec{v}=(2,\ 2)$이므로

$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

따라서 $|\vec{v}|^2=8$

26. [출제의도] 부분적분법을 활용하여 문제해결하기

$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=xe^x$

$\frac{f(x)}{x}=(x-1)e^x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=0$ 이므로 $C=0$

$f(x)=x(x-1)e^x$

$f(3)=6e^3$, $f(-3)=12e^{-3}$

따라서 $f(3)\times f(-3)=72$

27. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택한 3개의 레인 번호를 각각 X, Y, $Z\,(X<Y<Z)$라 하자.

X, Y, Z를 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.

X보다 작은 레인 번호의 개수를 a,

X보다 크고 Y보다 작은 레인 번호의 개수를 b,

Y보다 크고 Z보다 작은 레인 번호의 개수를 c,

Z보다 큰 레인 번호의 개수를 d라 하면

$a+b+c+d=5\ (a\geq 0,\ b\geq 1,\ c\geq 1,\ d\geq 0)$

$b=b'+1$, $c=c'+1$

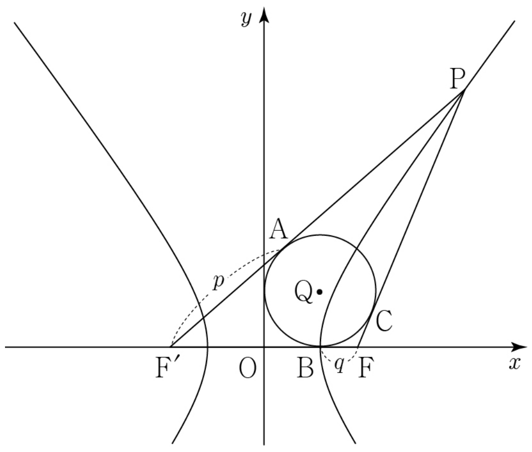
$a+b'+c'+d=3\ (a\geq 0,\ b'\geq 0,\ c'\geq 0,\ d\geq 0)$

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

3개의 레인 번호 X, Y, Z를 3명의 학생이 선택하는 경우의 수는 $3!$

따라서 $20\times 3!=120$

28. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제해결하기



주어진 쌍곡선의 두 초점 F′, F의 좌표는 F′$(-5,\ 0)$, F$(5,\ 0)$이다.

그림과 같이 삼각형 PF′F에 내접하는 원과 삼각형의 세 변의 접점을 각각 A, B, C라 하자.

$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{F'B}}=p$, $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{FC}}=q$라 하면

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=p-q=6$

$\overline{\mathrm{F'B}}+\overline{\mathrm{BF}}=p+q=10$

$p=8$이므로 점 B의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

삼각형 PF′F에 내접하는 원의 중심 Q의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}^2=18$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적을 활용하여 삼각형의 넓이 추론하기

세 점 A, B, C는 원 위의 점이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$

$x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 에서

$x^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+10x(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})+25|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=9|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

$x^2+10x(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})+25=9$ 이고

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{-x^2-16}{10x}=-\frac{1}{10}\left(x+\frac{16}{x}\right)$

$x>0$ 이므로

$x+\frac{16}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{16}{x}}=8$

(등호는 $x=4$일 때 성립한다.)

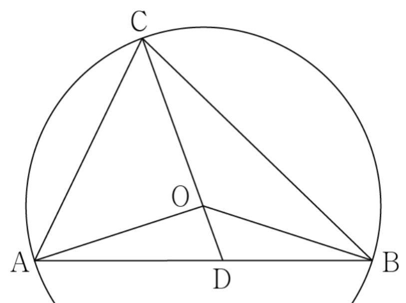
$-\frac{1}{10}\left(x+\frac{16}{x}\right)\leq -\frac{4}{5}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$는 $x=4$일 때 최댓값 $-\frac{4}{5}$를 갖는다.

$x=4$일 때 주어진 식은

$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{9}$



선분 AB를 $5:4$로 내분하는 점을 D라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{9}$ 이다.

$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ 에서 $\overline{\mathrm{CO}}:\overline{\mathrm{OD}}=3:1$ 이므로

$\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{OD}}=4:1$ ……㉠

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$ 에서

$\cos\theta=-\frac{4}{5}$ 이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\sin\theta=\frac{3}{10}$

㉠에 의하여 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{6}{5}$

따라서 $50S=60$

30. [출제의도] 미분법을 활용하여 함수 추론하기

$f(x)\neq 0$일 때

$g'(x)=\frac{\pi(\sin\pi x)f(x)-(1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$f(0)\neq 0$이면 $g'(0)=0$이 되어 조건 (가)에 모순이므로

$f(0)=0$ 이고 $g(0)=\frac{7}{128}\pi^2$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}g(x)=\frac{7}{128}\pi^2$ ……㉠

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\pi x}{f(x)(1+\cos\pi x)}$

$\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2\times\frac{(\pi x)^2}{f(x)}\times\frac{1}{1+\cos\pi x}\right\}$

$=\frac{7}{128}\pi^2$

이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)=kx^2h(x)$ ……㉡

(k는 $k\neq 0$인 상수, $h(0)\neq 0$)이라 하자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지므로

$f'(a)=0$ 이다.

$f(a)=0$ 이라 가정하면 $f(x)=kx^2(x-a)^2$ 이고 $k>0$일 때 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가지므로 모순이고,

$k<0$일 때 $f(1)\leq 0$이므로 $g(1)=\frac{2}{7}$ 라는 조건에 모순이다.

그러므로 $f(a)\neq 0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로

$g'(a)=\frac{\pi(\sin a\pi)f(a)}{\{f(a)\}^2}=0$

$\sin a\pi=0$ 이고

$\sin 2a\pi=0$, $\cos 2a\pi=1$ ……㉢

$f(2a)\neq 0$ 이면

$g'(x)=\frac{\pi(\sin\pi x)f(x)-(1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$ 에서

$g'(2a)=0$이 되어 조건 (가)에 모순이므로

$f(2a)=0$ 이다.

㉡에서 $f(x)=kx^2(x-2a)(x-b)$라 하면

$f'(a)=ka^2(b-2a)=0$ 이므로

$b=2a$ 이고 $f(x)=kx^2(x-2a)^2$

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이므로 $k>0$

㉠에서 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi x}{kx^2(x-2a)^2}=\frac{7}{128}\pi^2$

$ka^2=\frac{16}{7}$ ……㉣

$g(1)=\frac{2}{7}$ 에서 $k(1-2a)^2=7$ ……㉤

㉣, ㉤에서 $\frac{7a^2}{16}=\frac{(1-2a)^2}{7}$ 이므로

$a=\frac{4}{15}$ 또는 $a=4$

㉢에 의하여 $a=4$ 이고 $k=\frac{1}{7}$ 이다.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{7(1-\cos\pi x)}{x^2(x-8)^2} & (x\neq 0 \text{ 이고 } x\neq 8)\\ \frac{7}{128}\pi^2 & (x=0 \text{ 또는 } x=8)\end{cases}$$

$g(-1)=\frac{14}{81}$

따라서 $p+q=95$