

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. ${}_9C_7$ 의 값은? [2점]

- ① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

2. 함수 $f(x) = 7 + 3\ln x$ 에 대하여 $f'(3)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{3x} - 2}{2x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}, P(A^C \cap B) = \frac{2}{3}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? (단, A^C 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

5. $\int_0^{\ln 3} e^{x+3} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{e^3}{2}$ ② e^3 ③ $\frac{3}{2}e^3$ ④ $2e^3$ ⑤ $\frac{5}{2}e^3$

6. 곡선 $x^2 + xy + y^3 = 7$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는?
[3점]

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

7. 같은 종류의 비어 있는 상자 3개가 있다. 같은 종류의 장난감 12개를 남김없이 이 3개의 상자에 빈 상자가 없도록 나누어 넣으려고 한다. 각 상자에 넣은 장난감의 개수가 모두 다르게 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? [3점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

8. 포물선 $y^2 - 4y - ax + 4 = 0$ 의 초점의 좌표가 $(3, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 양수이다.) [3점]

- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

10. $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3e^4}{16}$ ② $\frac{3e^4+1}{16}$ ③ $\frac{3e^4+2}{16}$
 ④ $\frac{3e^4+3}{16}$ ⑤ $\frac{3e^4+4}{16}$

9. 함수 $f(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ 과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(2)$ 의 값은? [3점]

(가) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+4h) - g(2)}{h} = 8$
 (나) 함수 $(f \circ g)(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수는 10이다.

- ① 1 ② $\log_2 3$ ③ 2 ④ $\log_2 5$ ⑤ $\log_2 6$

11. 함수 $f(x) = xe^x$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 (a, b) 일 때, 두 수 a, b 의 곱 ab 의 값은? [3점]

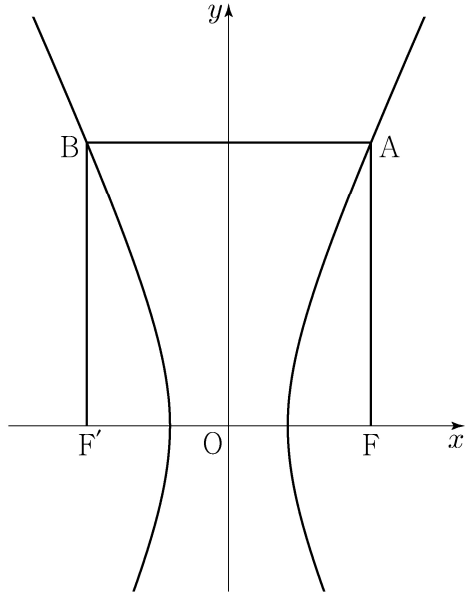
- ① $4e^2$ ② e ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{4}{e^2}$ ⑤ $\frac{9}{e^3}$

12. 함수 $f(x) = \sin(x+\alpha) + 2\cos(x+\alpha)$ 에 대하여

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ 일 때, $\tan\alpha$ 의 값은? (단, α 는 상수이다.) [3점]

- ① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

13. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이고 주축의 길이가 2인 쌍곡선이 있다. 점 F 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 A , 점 F' 을 지나고 x 축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제2사분면에서 만나는 점을 B 라 하자. 사각형 $ABF'F$ 가 정사각형일 때, 정사각형 $ABF'F$ 의 대각선의 길이는? [3점]



- ① $3+2\sqrt{2}$ ② $5+\sqrt{2}$ ③ $4+2\sqrt{2}$
 ④ $6+\sqrt{2}$ ⑤ $5+2\sqrt{2}$

14. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c 라 할 때, $a > b$ 이고 $a > c$ 일 확률은? [4점]

- ① $\frac{13}{54}$ ② $\frac{55}{216}$ ③ $\frac{29}{108}$ ④ $\frac{61}{216}$ ⑤ $\frac{8}{27}$

6

수학 영역(가형)

15. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 $t (t > 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 2\sqrt{t+1}, y = t - \ln(t+1)$$

이다. 점 P의 속력의 최솟값은? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

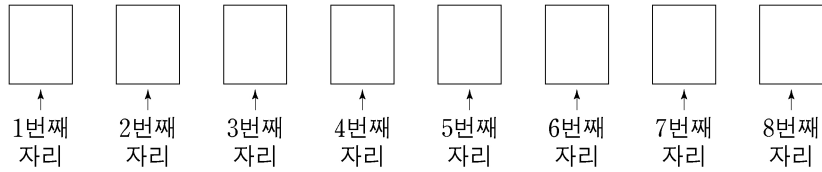
$$g(x) = \frac{f(x)\cos x}{e^x}$$

라 하자. $g'(\pi) = e^\pi g(\pi)$ 일 때, $\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$ 의 값은? (단, $f(\pi) \neq 0$)

[4점]

- ① $e^{-2\pi}$ ② 1 ③ $e^{-\pi} + 1$
 ④ $e^\pi + 1$ ⑤ $e^{2\pi}$

17. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 8개의 자리에 각각 한 장씩 임의로 놓을 때, 8 이하의 자연수 k 에 대하여 k 번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 k 이하인 사건을 A_k 라 하자.



다음은 두 자연수 m, n ($1 \leq m < n \leq 8$)에 대하여 두 사건 A_m 과 A_n 이 서로 독립이 되도록 하는 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하는 과정이다.

A_k 는 k 번째 자리에 k 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k 번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로

$$P(A_k) = \boxed{\text{(가)}}$$

이다.

$A_m \cap A_n$ ($m < n$)은 m 번째 자리에 m 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, n 번째 자리에 n 이하의 자연수 중 m 번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고, m 번째와 n 번째 자리를 제외한 6개의 자리에 나머지 6장의 카드가 놓여 있는 사건이므로

$$P(A_m \cap A_n) = \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

한편, 두 사건 A_m 과 A_n 이 서로 독립이기 위해서는

$$P(A_m \cap A_n) = P(A_m)P(A_n)$$

를 만족시켜야 한다.

따라서 두 사건 A_m 과 A_n 이 서로 독립이 되도록 하는

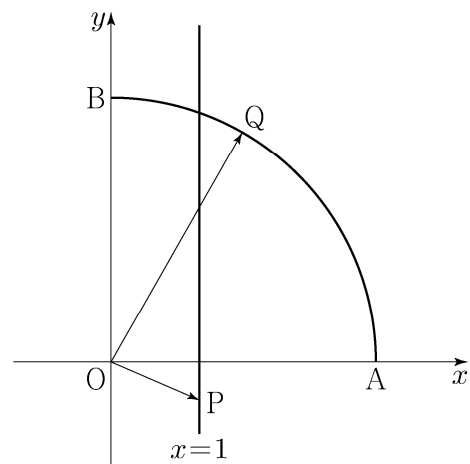
m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $k=4$ 를 대입한 값을 p , (나)에 알맞은 식에 $m=3, n=5$ 를 대입한 값을 q , (다)에 알맞은 수를 r 라 할 때, $p \times q \times r$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

18. 좌표평면 위에 두 점 $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ 과 직선 $x=1$ 위의 점 $P(1, a)$ 가 있다. 점 Q 가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 의 호 AB 위를 움직일 때 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 의 최댓값을 $f(a)$ 라 하자. $f(a)=5$ 가 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

- ① $-5\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$ ④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$



19. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4 의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수는? [4점]

(가) $n=1, 2, 3$ 일 때, $x_{n+1} - x_n \geq 2$ 이다.

(나) $x_4 \leq 12$

- ① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) > 0$

(나) $\ln f(x) + 2 \int_0^x (x-t)f(t)dt = 0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

ㄱ. $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$ 를 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 라 할 때,

$f(1) + \{F(1)\}^2 = 1$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 와 양의 실수 t 에 대하여 기울기가 t 인 직선이 곡선 $y=f(x)$ 에 접할 때 접점의 x 좌표를 $g(t)$ 라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 기울기가 a 일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 $a \times g'(a)$ 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{e}}{5}$
 ④ $-\frac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{e}}{7}$

단답형

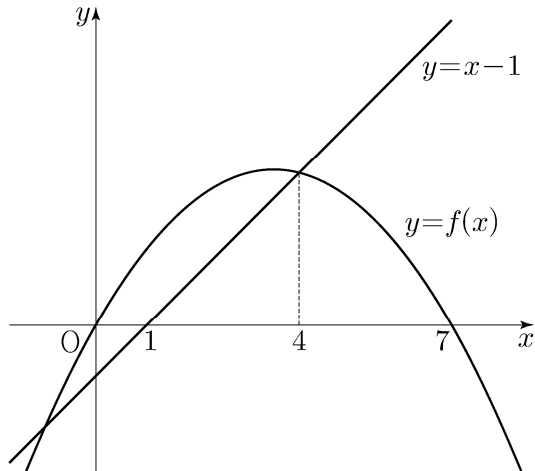
22. 벡터 $\vec{a} = (2, 1)$ 에 대하여 벡터 $10\vec{a}$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

23. $\cos\theta = \frac{1}{7}$ 일 때, $\csc\theta \times \tan\theta$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-1$ 이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합을 구하시오.
(단, $f(0)=f(7)=0$, $f(4)=3$) [3점]



25. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오. [3점]

- (가) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 4이다.
- (나) $f(a)=a$ 인 X 의 원소 a 의 개수는 3이다.

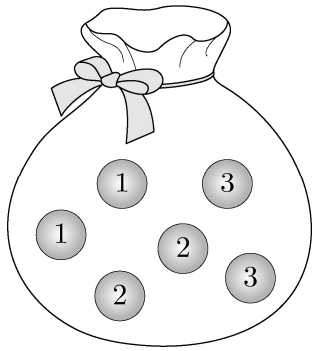
26. 좌표평면에서 $|\overrightarrow{OP}| = 10$ 을 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형 위의 점 $A(a, b)$ 에서의 접선을 l , 원점을 지나고 방향벡터가 $(1, 1)$ 인 직선을 m 이라 하고, 두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$ 일 때, 두 수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하시오.
(단, O 는 원점이고, $a > b > 0$ 이다.) [4점]

27. 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 6번 반복할 때, $k(1 \leq k \leq 6)$ 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k 라 하자. 두 자연수 m, n 을

$$m = a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3,$$

$$n = a_4 \times 100 + a_5 \times 10 + a_6$$

이라 할 때, $m > n$ 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



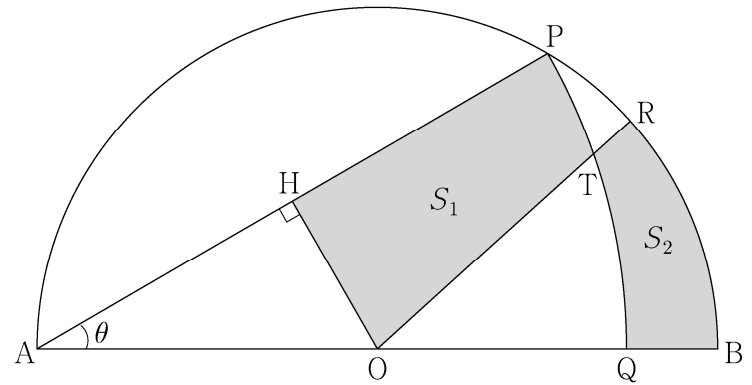
28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 \overline{AP} 인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.

호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3:7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.

세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $\angle PAB = \theta$ 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S_1 - S_2}{OH} = a$ 이다. $50a$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

[4점]



29. 좌표평면에서 곡선 $C: y = \sqrt{8-x^2}$ ($2 \leq x \leq 2\sqrt{2}$) 위의 점 P에 대하여 $\overline{OQ} = 2$, $\angle POQ = \frac{\pi}{4}$ 를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자.
 점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.
 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OZ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.) [4점]

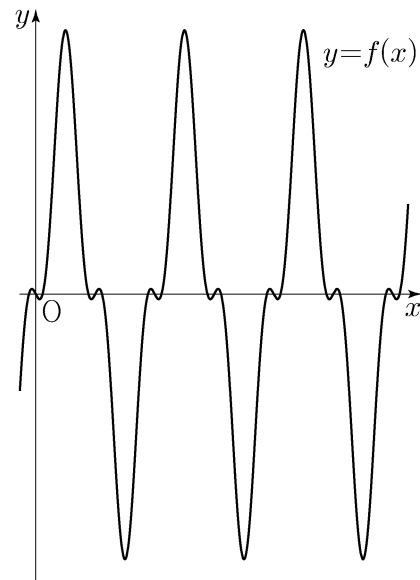
30. 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = a \sin^3 x + b \sin x$ 가

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 t ($1 < t < 14$)에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n 이라 하고

$$c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)} dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101} c_n = p + q\sqrt{2}$ 일 때, $q-p$ 의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.