2019학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 [나형] •

정 답

1	③	2	③	3	④	4	④	5	③
6	⑤	7	①	8	③	9	②	10	②
11	②	12	④	13	①	14	④	15	③
16	②	17	①	18	⑤	19	①	20	⑤
21	①	22	16	23	15	24	3	25	11
26	32	27	6	28	34	29	5	30	75

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$(\sqrt[3]{3})^3=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3=3$

2. [출제의도] 지수 계산하기

$8^{\frac{1}{3}}\times 16^{\frac{1}{4}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{4}}=2\times2=4$

3. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 계산하기

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 이므로 $-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}$ 이다.

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ 에서 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 이다.

4. [출제의도] 로그 계산하기

$$\log_2\frac{4}{3}+\log_2 12=\log_2\left(\frac{4}{3}\times12\right)=\log_2 16=4$$

5. [출제의도] 상용로그표 이해하기

$$\log 312=\log(3.12\times10^2)=0.4942+2=2.4942$$

수	0	1	2	3	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	⋯
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	⋯
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	⋯

6. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$$(\sqrt[3]{7})^n=\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^n=7^{\frac{n}{3}}$$

$7^{\frac{n}{3}}$ 이 자연수가 되도록 하려면 n은 3의 배수가 되어야 한다. $1\le n\le15$ 이므로 n은 3, 6, 9, 12, 15 이고 개수는 5 이다.

7. [출제의도] 로그함수 이해하기

$f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이다.
$f(k)=\log_3(k+12)+2=5$이므로 $\log_3(k+12)=3$ 이다. 따라서 $k+12=3^3=27$ 이므로 $k=15$ 이다.

8. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

$$\cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right)=\cos\frac{8}{3}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

이므로 $\sin\frac{5}{6}\pi+\cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ 이다.

9. [출제의도] 로그함수 이해하기

함수 $f(x)=\log_5(x+1)-2$는 증가한다.
따라서 $0\le x\le4$에서 함수 $f(x)=\log_5(x+1)-2$는 $x=4$에서 최댓값 $f(4)=\log_5 5-2=-1$을 갖는다.

10. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$\sqrt{(-2)^6}=\sqrt{2^6}=8$,
$(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=3-2=1$이므로
$\sqrt{(-2)^6}+(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=9$ 이다.

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프의 점근선이 $y=3$이므로 $b=3$이다. 함수 $y=2^{x-a}+3$의 그래프가 점 $(3, 5)$를 지나므로 $5=2^{3-a}+3$에서 $a=2$이다.
따라서 $a+b=5$이다.

12. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$이다. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin\theta<0$이므로 $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$이다. 따라서

$\tan\theta-\sin\theta=2\sqrt{2}-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{3}$ 이다.

13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 최댓값 문제 해결하기

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-4x+1}$ 은 x^2-4x+1이 최솟값을 가질 때, 최댓값을 갖는다.
$x^2-4x+1=(x-2)^2-3\ge-3$ 이므로
함수 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-4x+1}$ 은 $x=2$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=125$를 갖는다.
따라서 $a+M=2+125=127$ 이다.

14. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y=a\sin bx+c$의 최댓값과 최솟값이 각각 2, -4이고 $a>0$이므로
$a+c=2$, $-a+c=-4$에서 $a=3$, $c=-1$이다.
함수 $y=a\sin bx+c$의 주기는 π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$에서 $b=2$이다.
따라서 $2a+b+c=6+2+(-1)=7$이다.

15. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활 문제 해결하기

$$B_1=\frac{kI_0r_1^2}{2\left(x_1^2+r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$B_2=\frac{kI_0(3r_1)^2}{2\left\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{kI_0\times9r_1^2}{2\left(9x_1^2+9r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{9kI_0r_1^2}{2\times9^{\frac{3}{2}}\left(x_1^2+r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{kI_0r_1^2}{6\left(x_1^2+r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3}B_1$$

이므로 $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{3}$ 이다.

16. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 문제 해결하기

조건 (가)에서 $(\log_2 a)(\log_b 3)=0$이므로
$\log_2 a=0$ 또는 $\log_b 3=0$이다.
$\log_b 3=0$을 만족시키는 b는 존재하지 않는다.
따라서 $\log_2 a=0$이므로 $a=1$이다.
조건 (나)에서 $\log_b 3=2$이므로 $b^2=3$이다.
그러므로 $a^2+b^2=1+3=4$ 이다.

[다른 풀이]

$\log_2 a$와 $\log_b 3$을 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(\log_2 a+\log_b 3)x+(\log_2 a)(\log_b 3)=0$ 이다.
$x^2-2x=0$
$x=0,\ 2$
따라서 $\log_2 a=0$, $\log_b 3=2$ 또는 $\log_2 a=2$, $\log_b 3=0$이다. $\log_b 3=0$을 만족시키는 b는 존재하지 않으므로 $\log_2 a=0$, $\log_b 3=2$이다.
그러므로 $a=1$, $b^2=3$이고 $a^2+b^2=4$ 이다.

17. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 추론하기

$3+2\sin^2\theta=t$로 놓으면

$$3+2\sin^2\theta+\frac{1}{3-2\cos^2\theta}=t+\frac{1}{\boxed{t-2}}$$

이다. $0<\theta<2\pi$에서 $t\ge3$이므로
$\boxed{t-2}>0$이다.

$$t+\frac{1}{\boxed{t-2}}=t-2+\frac{1}{\boxed{t-2}}+2\ge4$$

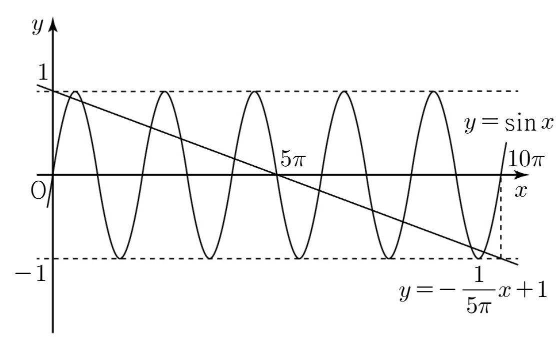
이다. (단, 등호는 $t-2=\frac{1}{t-2}$ 에서 $t=\boxed{3}$ 일 때 성립한다.)
따라서 $3+2\sin^2\theta=t=3$ 일 때 $\theta=\boxed{\pi}$이고,
이때 $3+2\sin^2\theta+\frac{1}{3-2\cos^2\theta}$ 은 최솟값 4를 갖는다.
$f(t)=t-2$, $p=3$, $q=\pi$이므로

$$f(p)+\tan^2\left(q+\frac{\pi}{3}\right)=f(3)+\tan^2\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=1+3=4$$

이다.

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프 문제 해결하기

직선 $y=-\frac{1}{5\pi}x+1$과 함수 $y=\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 두 그래프의 교점의 개수는 11 이다.

19. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 문제 해결하기

$$\log_2 ab=\log_2\left(2^{\frac{1}{n}}\times 2^{\frac{1}{n+1}}\right)$$
$$=\log_2 2^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1},$$
$$(\log_2 a)(\log_2 b)=\left(\log_2 2^{\frac{1}{n}}\right)\left(\log_2 2^{\frac{1}{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}$$

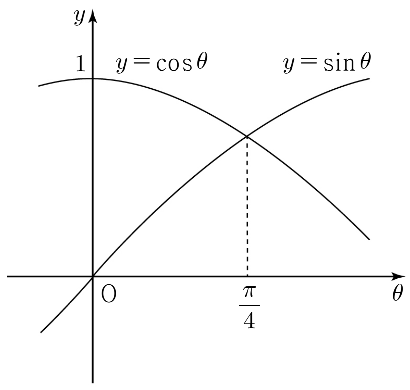
이다. 지수법칙에 의하여

$$\left\{\frac{3^{\log_2 ab}}{3^{(\log_2 a)(\log_2 b)}}\right\}^5=\left\{\frac{3^{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)}}{3^{\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\right)}}\right\}^5$$
$$=\left\{3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}}\right\}^5$$
$$=3^{\frac{10}{n+1}}$$

이다. $3^{\frac{10}{n+1}}$ 이 자연수가 되도록 하려면 $n+1$ 은 10의 약수가 되어야 한다. 그러므로 자연수 n 의 값은 1, 4, 9 이고 모든 자연수 n의 값의 합은 14 이다.

20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 추론하기

ㄱ. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 에서 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $0<\sin\theta<\cos\theta<1$이다. (참)

ㄴ. $0<\sin\theta<1$이므로 함수 $f(x)=\log_{\sin\theta}x$는 감소한다. $\sin\theta<\cos\theta<1$이므로

$\log_{\sin\theta}1<\log_{\sin\theta}\cos\theta<\log_{\sin\theta}\sin\theta$ 이다.

따라서 $0<\log_{\sin\theta}\cos\theta<1$이다. (참)

ㄷ. $0<\sin\theta<\cos\theta$ 이므로

$(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}$이다.

$0<\cos\theta<1$이므로 함수 $f(x)=(\cos\theta)^x$은 감소한다.

$\sin\theta<\cos\theta$이므로 $(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$ 이다.

따라서 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$ 이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[ㄷ의 다른 풀이]

ㄷ. $\sin\theta<\cos\theta$ 이고 $\log_{\sin\theta}\cos\theta>0$ 이므로

$$\sin\theta\times\log_{\sin\theta}\cos\theta<\cos\theta\times\log_{\sin\theta}\cos\theta$$
$$\log_{\sin\theta}(\cos\theta)^{\sin\theta}<\log_{\sin\theta}(\cos\theta)^{\cos\theta}$$

이다. $0<\sin\theta<1$이므로 $(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$ 이다. $\log_{\sin\theta}\cos\theta<1$ 이므로

$$\log_{\sin\theta}\cos\theta<\log_{\sin\theta}\sin\theta$$
$$\cos\theta\times\log_{\sin\theta}\cos\theta<\cos\theta\times\log_{\sin\theta}\sin\theta$$
$$\log_{\sin\theta}(\cos\theta)^{\cos\theta}<\log_{\sin\theta}(\sin\theta)^{\cos\theta}$$

이다. $0<\sin\theta<1$이므로 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}$ 이다.

따라서 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$ 이다. (참)

21. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

함수 $y=\cos\frac{\pi x}{4}$ 의 주기가 8 이고 함수 $y=\tan\frac{(2x+1)\pi}{4}$ 의 주기가 2 이므로 다음과 같이 8 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $n=8k$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos 2k\pi=1$ 이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{1}{4}\right)\pi=1$ 이다.

$(a^2+b^2+2ab-4)+(b^2+ab+2)=0$ 이므로

$a^2+2b^2+3ab-2=0$ 이다. 따라서

$(a+b)(a+2b)=2$ 이고 $a+b\le a+2b$ 이므로

$a+b=1$, $a+2b=2$ 이다. 그러므로 $a=0$, $b=1$ 인데 이것은 $a\ge b$ 라는 조건에 맞지 않다.

(ii) $n=8k+1$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{3}{4}\right)\pi=-1$ 이므로

$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$ 이다.

$b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(iii) $n=8k+2$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi=0$ 이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{5}{4}\right)\pi=1$ 이므로

$b^2+ab+2=0$ 이다. $b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(iv) $n=8k+3$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{7}{4}\right)\pi=-1$ 이므로

$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$ 이다.

$b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(v) $n=8k+4$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos(2k+1)\pi=-1$이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{9}{4}\right)\pi=1$ 이다.

$-(a^2+b^2+2ab-4)+(b^2+ab+2)=0$ 이므로

$a^2+ab-6=0$ 이다.

따라서 $a(a+b)=6$ 이고 $a\le a+b$ 이므로

$a=1$, $a+b=6$ 또는 $a=2$, $a+b=3$ 이다.

그러므로 $a=1$, $b=5$ 또는 $a=2$, $b=1$ 이다.

$a\ge b$ 이므로 $a=2$, $b=1$ 이다.

(vi) $n=8k+5$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{5}{4}\right)\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{11}{4}\right)\pi=-1$ 이므로

$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$ 이다.

$b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(vii) $n=8k+6$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi=0$ 이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{13}{4}\right)\pi=1$ 이므로

$b^2+ab+2=0$ 이다. $b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(viii) $n=8k+7$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{7}{4}\right)\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{15}{4}\right)\pi=-1$ 이므로

$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$ 이다.

$b^2+ab+2=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

따라서 $n=8k+4$ (k는 음이 아닌 정수)이고 $a=2$, $b=1$ 이다. 그러므로

$$a+b+\sin^2\frac{n}{8}\pi=2+1+\sin^2\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi=4$$

이다.

22. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식 계산하기

$\log_2 x=4$에서 $x=2^4=16$

23. [출제의도] 로그 계산하기

진수 조건에 의해 $6-x>0$ 이므로 $x<6$ 이다.

따라서 자연수 x 의 값은 1, 2, 3, 4, 5 이고, 모든 자연수 x 의 값의 합은 15 이다.

24. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$
$$2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$$

따라서 $8\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}\times 4=3$이다.

25. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{6}+k=2+k=7$이므로 $k=5$ 이다.

따라서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}+5=6+5=11$이다.

26. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식 이해하기

$$\left(\log_2\frac{x}{2}\right)(\log_2 4x)=4$$
$$(\log_2 x-1)(\log_2 x+2)=4$$

$\log_2 x=X$로 놓으면

$$(X-1)(X+2)=4$$
$$X^2+X-6=0$$
$$(X-2)(X+3)=0$$
$$X=2,\ -3$$

이므로 $\alpha\beta=2^2\times 2^{-3}=2^{-1}$이다. 따라서 $64\alpha\beta=64\times 2^{-1}=32$ 이다.

27. [출제의도] 로그함수의 최댓값과 최솟값 문제 해결하기

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 에서 $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}$ 이고

함수 $g(x)=3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 는 증가하므로

$$3\tan\frac{\pi}{6}\le 3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 3\tan\frac{\pi}{3}$$
$$\sqrt{3}\le 3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 3\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}\le g(x)\le 3\sqrt{3}$$

이다. $g(x)=t$로 놓으면 $\sqrt{3}\le t\le 3\sqrt{3}$ 이다.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=\log_3 t+2$ 이고

함수 $f(t)=\log_3 t+2$ 도 증가하므로

$$\frac{1}{2}+2\le\log_3 t+2\le\frac{3}{2}+2$$
$$\frac{5}{2}\le(f\circ g)(x)\le\frac{7}{2}$$

이다. 따라서 $M=\frac{7}{2}$, $m=\frac{5}{2}$ 이다.

그러므로 $M+m=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=6$ 이다.

28. [출제의도] 로그함수의 그래프 문제 해결하기

곡선 $y=\log_2 x$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=-\log_2(-x)$ 이고, 이것을 다시 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$ 만큼 평행이동한 곡선은

$$y=-\log_2\left\{-\left(x-\frac{5}{2}\right)\right\}=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$$

이다. 따라서 $f(x)=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$ 이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 두 실수 α, β는 방정식 $\log_2 x=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$ 의 해다. 따라서

$$\log_2 x=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$$
$$\log_2 x+\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)=0$$
$$\log_2\left\{x\left(-x+\frac{5}{2}\right)\right\}=0$$
$$x\left(-x+\frac{5}{2}\right)=1$$
$$2x^2-5x+2=0$$
$$(2x-1)(x-2)=0$$
$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=2$$

따라서 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$ 이고, 직선 AB의 기울기는 $\frac{q}{p}=\frac{1-(-1)}{2-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$ 이다.

따라서 $10p+q=34$ 이다.

29. [출제의도] 삼각함수의 그래프 문제 해결하기

함수 $y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$ 의 그래프에서

(ⅰ) $k=0$일 때

$y=-6$ 이므로 함수의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

(ⅱ) $k>0$일 때

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$ 의 최댓값은 $k+(k^2-6)$ 이고, 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$$k+(k^2-6)\ \le\ 0$$
$$k^2+k-6\ \le\ 0$$
$$(k-2)(k+3)\le 0$$
$$-3\le k\le 2$$

따라서 $0<k\le 2$이다.

(ⅲ) $k<0$일 때

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$ 의 최댓값은 $-k+(k^2-6)$ 이고, 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$$-k+(k^2-6)\ \le 0$$
$$k^2-k-6\ \le 0$$
$$(k+2)(k-3)\le 0$$
$$-2\le k\le 3$$

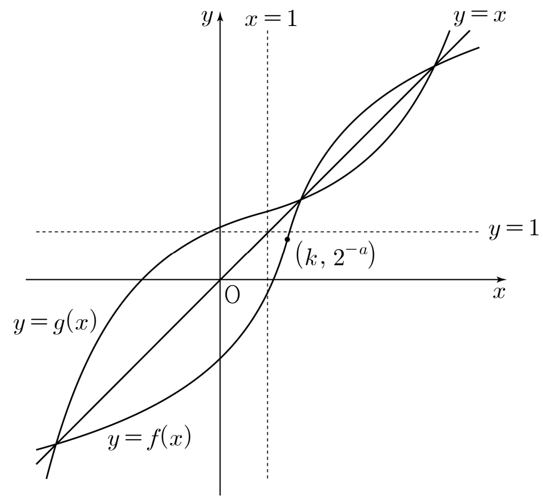
따라서 $-2\le k<0$이다.

그러므로 $-2\le k\le 2$ 이고 모든 정수 k의 개수는 5이다.

30. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 추론하기

(ⅰ) $k>1$일 때

$0<\frac{1}{k}<1$ 이고 $0<2^{-a}<1<k$ 이므로 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

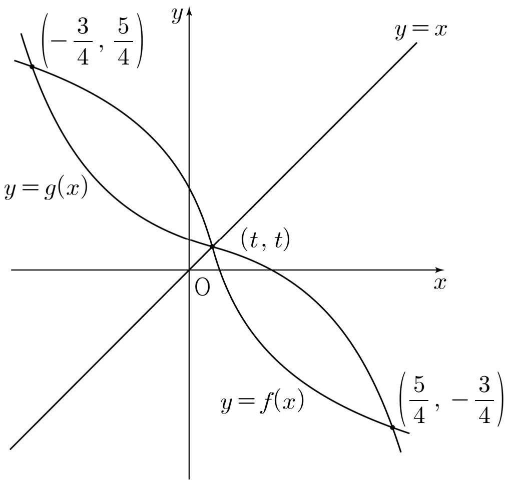


방정식 $f(x)=g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 세 교점의 x좌표이다. 그림에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(k,\ 2^{-a})$ 을 지나며 $1<k<t$ 이므로 $0<t<1$ 을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $0<k<1$일 때

$\frac{1}{k}>1$ 이고 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 해가 $-\frac{3}{4}$, t, $\frac{5}{4}$ 이므로 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$, $f(t)=t$, $f\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$ 이다.

두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$2\log_{\frac{1}{k}}\left(\frac{7}{4}+k\right)+2^{-a}=\frac{5}{4}\ \cdots\ ㉠$$
$$2\log_k\left(\frac{9}{4}-k\right)+2^{-a}=-\frac{3}{4}\ \cdots\ ㉡$$

㉡ − ㉠에서

$$2\log_k\left(\frac{9}{4}-k\right)\left(\frac{7}{4}+k\right)=-2$$
$$\left(\frac{9}{4}-k\right)\left(\frac{7}{4}+k\right)=\frac{1}{k}$$
$$16k^3-8k^2-63k+16=0$$
$$\begin{aligned}16k^3&-8k^2-63k+16\\&=16k^3-8k^2+k-64k+16\\&=(16k^3-8k^2+k)-(64k-16)\\&=k(4k-1)^2-16(4k-1)\\&=(4k-1)(4k^2-k-16)\\&=0\end{aligned}$$
$$k=\frac{1}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{257}}{8}$$

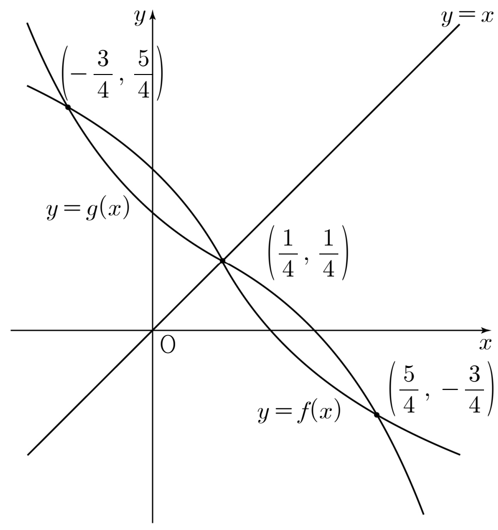
$0<k<1$이므로 $k=\frac{1}{4}$이고

$$f\left(\frac{5}{4}\right)=2\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}+1\right)+2^{-a}=-\frac{3}{4}$$

$2^{-a}=\frac{1}{4}$ 이므로 $a=2$이다. 따라서 함수

$$f(x)=\begin{cases}2\log_{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4} & \left(x\ \ge\ \frac{1}{4}\right)\\ 2\log_4\left(-x+\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4} & \left(x<\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이다. $y=f(x)$ 의 그래프는 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ 을 지나므로 $t=\frac{1}{4}$ 이다.



그러므로 $30(a+k+t)=30\times\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=75$ 이다.

[참고]

$$\begin{aligned}16k^3&-8k^2-63k+16\\&=16k^3-4k^2-4k^2-63k+16\\&=4k^2(4k-1)-(4k^2+63k-16)\\&=4k^2(4k-1)-(4k-1)(k+16)\\&=(4k-1)(4k^2-k-16)\end{aligned}$$